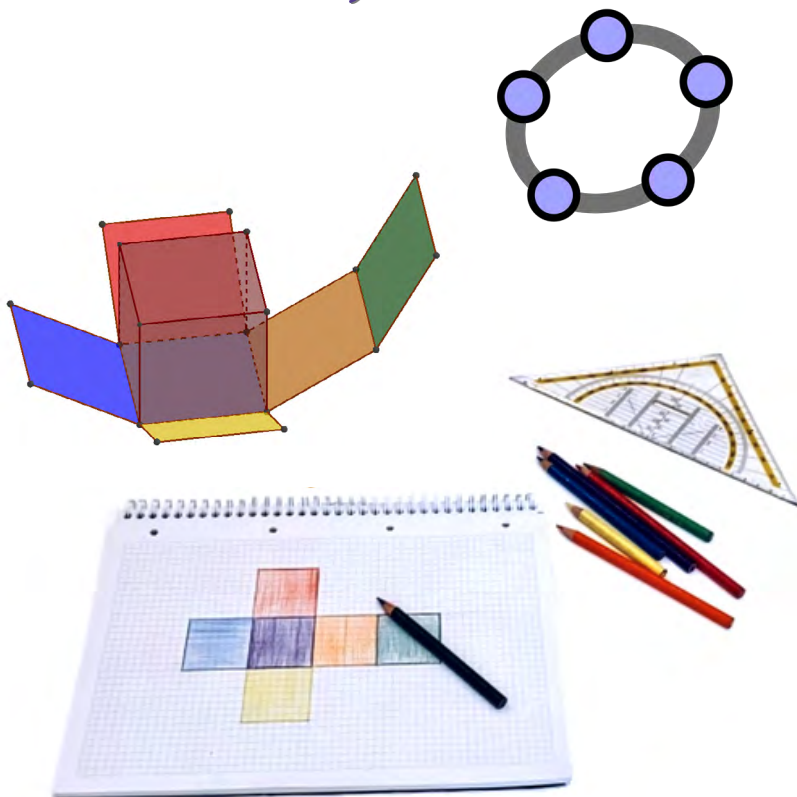




Факултет педагошких наука  
Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

Милан П. Миликић

# ГЕОГЕБРА И ПОЧЕТНА НАСТАВА ГЕОМЕТРИЈЕ



**Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина**

Едиција  
МОНОГРАФИЈЕ

Милан П. Миликић

# **ГЕОГЕБРА И ПОЧЕТНА НАСТАВА ГЕОМЕТРИЈЕ**

Јагодина  
2025

*Издавач*

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу  
Милана Мијалковића 14, Јагодина

*За издавача*

Проф. др Ненад Вуловић

*Уредник*

Проф. др Александра Михајловић

*Рецензенти*

Проф. др Ненад Вуловић

Проф. др Бранислав Поповић

Доц. др Александар Миленковић

*Дизајн корица*

Проф. Слободан Штетић

*Илустрација на корици*

GeoGebra.com

*Илустрације*

Милан Миликић

GeoGebra.com

*Технички уредник*

Владан Димитријевић

*Лектура и коректура*

Мср Марија Ђорђевић

*Штампа*

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

*Тираж*

50

**ISBN 978-86-7604-244-9**

Наставно-научно веће Факултета педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина, одобрило је објављивање и штампање ове монографије одлуком 01-867/1 од 28. 3. 2025. године

© Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

*Слађани, Димитрију и Николи*



## САДРЖАЈ

|                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| ПРЕДГОВОР .....                                                                                  | 7          |
| УВОД .....                                                                                       | 9          |
| <b>I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР .....</b>                                                                   | <b>13</b>  |
| 1. ОБРАЗОВНИ СОФТВЕР ГЕОГЕБРА .....                                                              | 13         |
| 1.1. Образовни софтвер – појмовно одређење, настанак и примена<br>у настави .....                | 13         |
| 1.2. Образовни софтвер Геогедра – настанак и развој .....                                        | 15         |
| 1.3. Изглед и карактеристике Геогедра софтвера .....                                             | 16         |
| 1.4. Геогедра алати за рад са објектима у равни .....                                            | 26         |
| 1.5. Геогедра алати за рад са тродимензионалним објектима .....                                  | 38         |
| 2. ПОЧЕТНА НАСТАВА ГЕОМЕТРИЈЕ .....                                                              | 47         |
| 2.1. Геометрија и почетна настава математике .....                                               | 47         |
| 2.2. Постигнућа ученика из геометрије на крају првог циклуса<br>обавезног образовања .....       | 53         |
| 2.3. Теоријска заснованост учења у почетној настави геометрије .....                             | 58         |
| 2.4. Очигледност, визуелизација и репрезентација објеката у почетној<br>настави геометрије ..... | 69         |
| 3. ГЕОГЕБРА И УЧЕЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ .....                                                             | 77         |
| 3.1. Модели примене Геогедре у почетној настави геометрије .....                                 | 81         |
| 3.2. Потенцијална ограничења примене Геогедре у почетној настави<br>геометрије .....             | 90         |
| 4. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА .....                                                          | 95         |
| <b>II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР .....</b>                                                                | <b>105</b> |
| 1. Проблем и предмет истраживања .....                                                           | 105        |
| 2. Циљ и задаци истраживања .....                                                                | 107        |
| 3. Хипотезе истраживања .....                                                                    | 108        |
| 4. Варијабле истраживања .....                                                                   | 108        |
| 5. Узорак истраживања .....                                                                      | 109        |
| 6. Методе истраживања .....                                                                      | 111        |
| 7. Технике и инструменти истраживања .....                                                       | 112        |
| 8. Припрема и ток истраживања .....                                                              | 114        |
| 9. Обрада података .....                                                                         | 116        |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>III АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА И ЊИХОВА<br/>ИНТЕРПРЕТАЦИЈА .....</b>                 | <b>117</b> |
| 1. ГЕОГЕБРА И ОБРАЗОВНА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА .....                                           | 117        |
| У ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИЈЕ .....                                                                 | 117        |
| 1.1. Геогедбра и образовна постигнућа ученика по нивоима .....                             | 121        |
| 1.1.1. Геогедбра и образовна постигнућа ученика на<br>основном нивоу .....                 | 122        |
| 1.1.2. Геогедбра и образовна постигнућа ученика на<br>средњем нивоу .....                  | 126        |
| 1.1.3. Геогедбра и образовна постигнућа ученика на<br>напредном нивоу .....                | 129        |
| 1.2. Геогедбра и образовна постигнућа ученика у зависности<br>од пола .....                | 134        |
| 1.3. Геогедбра и образовна постигнућа ученика у зависности од оцене из<br>математике ..... | 137        |
| 1.4. Геогедбра и образовна постигнућа ученика у зависности од општег<br>успеха .....       | 140        |
| 2. УТИЦАЈ ГЕОГЕДБРЕ НА ТРАЈНОСТ ЗНАЊА УЧЕНИКА .....                                        | 145        |
| 2.1. Утицај Геогедбре на трајност знања ученика по нивоима .....                           | 149        |
| 2.1.1. Утицај Геогедбре на трајност знања ученика на<br>основном нивоу .....               | 150        |
| 2.1.2. Утицај Геогедбре на трајност знања ученика на<br>средњем нивоу .....                | 153        |
| 2.1.3. Утицај Геогедбре на трајност знања ученика на<br>напредном нивоу .....              | 157        |
| 5. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА И ПЕДАГОШКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ .....                                       | 165        |
| ЛИТЕРАТУРА .....                                                                           | 170        |
| ПРИЛОЗИ .....                                                                              | 181        |
| БЕЛЕШКА О АУТОРУ .....                                                                     | 191        |

## ПРЕГОВОР

Монографија *Геометрија и почетна настава геометрије* настала је на основу докторске дисертације *Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике* одбрањене у јуну 2023. године на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу и представља синтезу и надградњу дела резултата приказаних у њој.

Садржај представљен у монографији може бити од користи студентима педагошких факултета, учитељима и наставницима математике који се пратећи савремену литературу континуирано усавршавају. Монографија обухвата три главна дела. Први део представља теоријски оквир истраживања и подељен је у четири мање целине. У овом делу дато је термилошко одређење појма *образовни софтвер*, са посебним акцентом на софтвер Геометрије. Описан је изглед корисничког интерфејса Геометрије, као и алати и функције доступне корисницима. Друга целина теоријског оквира фокусира се на значај геометрије у почетном математичком образовању. Представљена је заступљеност садржаја геометрије у програмима математике за први циклус основног образовања и образовни стандарди и исходи учења који се односе на геометрију. Поред тога, анализирана су постигнућа ученика из геометрије на националним и међународним тестирањима. Презентоване су теорије које наглашавају улогу визуелизације и очигледности у развоју геометријског мишљења ученика. Трећи део разматра могућности увођења основних геометријских појмова у динамичном окружењу Геометрије, док су у четвртном делу наведена ранија истраживања ефеката примене софтвера у настави математике, са фокусом на побољшању образовних постигнућа и трајност знања ученика.

Други део монографије посвећен је методолошким основама истраживања. Детаљно су описани сви елементи истраживања организовани са циљем утврђивања ефеката примене Геометрије на образовна постигнућа ученика и трајност знања. У овом делу извршена је операционализација задатака и хипотеза и дат је преглед садржаја наставног програма који су обухваћени експерименталним истраживањем. Поред тога, детаљно су представљене методе, технике и инструменти истраживања.

У трећем делу анализирани су и интерпретирани резултати експерименталног истраживања који су показали да Геометрија остварује позитиван утицај на образовна постигнућа и трајност знања ученика из геометрије.

Закључак монографије представља синтезу теоријских сазнања и резултата добијених истраживањем, на основу чега су изнете педагошке импликације и предлози за будућа истраживања. Такође, дате су и препоруке свим учесницима образовног процеса са циљем даљег иновирања наставе геометрије, математике и наставе уопште.

Посебну захвалност изражавам рецензентима, проф. др Ненаду Вуловићу, проф. др Браниславу Поповићу и доц. др Александру Миленковићу, као и уредници, проф. др Александри Михајловић, за низ веома корисних и добронамерних савета и сугестија. Такође, захваљујем колегиници Марији Ђорђевић и колеги Владану Димитријевићу за велико стрпљење и драгоцене савете у последњој етапи припреме монографије. Овом приликом изражавам захвалност и својим родитељима, читавој породици и пријатељима на огромном стрпљењу, подршци и енергији коју су ми дали да приведем рад крају.

У Крагујевцу, 2025.

*Аутор*

## УВОД

Од првих организованих облика подучавања па до савремених приступа настави, стално постоји тежња ка развоју ефикаснијих метода и процедура. Са променама образовних парадигми, неке методе су се током времена усталиле у наставном процесу, док су друге биле одбачене и замењене новима. Ова континуирана потреба за иновацијама није успела да реши све изазове, те су неки проблеми и даље отворени и привлаче пажњу истраживача, постављајући темеље за нове студије. Такође, није само настава била подложна променама – истовремено су се дешавале и транзиције у другим аспектима друштвеног живота. Техника и технологија развијале су се и унапређивале, и тако постале интегрални део образовног процеса. Због тога се данас с правом поставља питање: *Треба ли подучавањим и учењим на исти начин као и пре развоја технологије?*

Респектујући ниво когнитивног развоја на којем се налазе ученици млађих разреда основне школе, а у оквиру којег ученици на основу вишеструко потврђених искуствених претпоставки долазе до општих закључака индуктивним путем, приступ у почетној настави математике темељи се на примени очигледних наставних средстава. Међутим, само непосредно опажање није довољно за уочавање свих односа и законитости, због чега је потребно користити искуствене информације састављене од опажаја, представа о појму и самог појма. Такав начин разумевања није могућ само путем перцепција, већ захтева и очигледност засновану на представама, сећањима и дедуктивном закључивању. Ову врсту очигледности није могуће постићи само традиционалним методама, због чега је нужно увођење савремених технологија у наставни процес.

Задатак наставе математике у млађим разредима основне школе је да ученици стекну знања потребна за разумевање односа и законитости који владају у реалном окружењу, а репрезентовани су на садржајима обухваћеним одговарајућим програмима наставе и учења. Ово се првенствено односи на садржаје аритметике, алгебре, геометрије и мерења. Због специфичности које поседују, свака од поменутих области захтева адекватан методички приступ који омогућава ученицима да на најбољи начин савладају одговарајуће садржаје. Фокус овог истраживања јесте на процесу учења у области геометрије, с циљем утврђивања утицаја геометријског резоновања на развој мишљења ученика.

Закључци студија спроведених широм света указују на бројне проблеме са којима се ученици суочавају приликом рада са геометријским садржајима

(Adelabu, Makgato & Ramaligela, 2019; Gal & Linchevski, 2010; Глејзер, 1996; Ismail & Rahman, 2017; Kösa & Karakuş, 2010; Murni, Sariyasa & Ardana, 2017). Да би се ови изазови превазишли, неопходно је анализирати њихове узроке. У том контексту, предмет великог броја истраживања јесу проблеми усвајања геометријских садржаја, развоја геометријских појмова и примене стечених знања. Немогућност адекватног графичког приказа, затим праћења промена које настају трансформацијом геометријских објеката, као и апстрактна природа геометријских појмова само су неки од најчешће истицаних проблема са којима се ученици сусрећу у раду са геометријом.

Потврду да постоје потешкоће у раду са садржајима геометрије и у нашем образовном систему представљају резултати које ученици из Републике Србије постижу на националним и међународним тестирањима. Када се упореде резултати ученика четвртог разреда основне школе из Србије у области геометрије, они су значајно нижи у односу на резултате из других математичких области (Гашић-Павишић и Станковић, 2012; Kadijević, Žakelj & Gutvajn, 2015; Марушић Јаблановић, Гутвајн и Јакшић, 2017; Mullis, Martin, Foy & Hooper, 2016). Разлози за ово могу се пронаћи у организацији наставе и одговарајућој методичкој трансформацији геометријских садржаја. Иако настава геометрије не би требало да се ограничи само на увођење појмова, већ и на унапређење учениковог просторног резонувања и побољшање искуства у мерењу дужине, површине и запремине (Ђокић, 2013), резултати показују да у пракси то није увек тако.

Да би се постигли жељени резултати у учењу геометрије, неопходно је добро разумети карактеристике мишљења ученика. На основу таквог разумевања требало би се усмерити на развој метода које ће побољшати процес учења геометрије, као и на обезбеђивање подршке која ће резултирати формирањем јаснијих представа и појмова. У циљу разумевања потешкоћа које ученици имају током учења геометрије, фокус бројних теорија темељи се на развоју геометријског мишљења. Како је и у овом раду акценат на истраживању учења геометрије, представимо теорије Ван Хила, Удемона и Кузника и Дувала, које су од посебне важности за разумевање значаја визуелизације и очигледности у развоју геометријских појмова (Duval, 1995, 1999, 2006; Ђокић и Зељић, 2017; Houdement & Kuzniak, 2003; Van Hiele, 1986). Све три теорије у својим хијерархијама когнитивних процеса за почетни корак имају репрезентацију и визуелизацију геометријских објеката. Без обзира да ли су то материјални објекти, линије нацртане на папиру или приказане на екрану рачунара, њихова заједничка улога је да применом одговарајућих когнитивних процеса омогуће ученицима доношење исправних закључака.

Увођење ИКТ у наставу геометрије има за циљ њено унапређење, а посебно имплементација образовног софтвера који је створен како би се статични прикази заменили динамичним, да би се постигла боља очигледност и лакша визуелизација. У том контексту, до изражаја посебно долази софтвер Геогедра, који

на једном месту обухвата геометрију, алгебру и анализу. Од свог настанка почетком двадесет првог века па све до данас, овај софтвер привлачи велику пажњу истраживача у области математичког образовања, а резултати бројних студија потврђују да доприноси настави математике на свим нивоима, од основне школе до универзитета (Adelabu, Makgato & Ramaligela, 2019; Божић, 2019; Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis & Lavicza, 2008; Kostić Kovačević & Gavrilović, 2011; Milenković, Takači & Božić, 2024; Milenković & Vučićević, 2024; Љајко, 2014; Žilinskienė, 2014; Yu & Tawfeeq, 2011).

Теоријске основе софтвера заснивају се на приступу учењу путем открића, при чему његова визуелна и симболичка својства омогућавају лако манипулисање математичким објектима, чиме се ученицима пружа више простора за експериментисање и учење (Abu Bakar, Mohd Ayub & Tarmizi, 2010; Herceg & Herceg Mandić, 2013; Kay & Kwak, 2018; Murni, Sariyasa & Ardana, 2017; Станковић, Јордановић и Јанковић, 2015; Tran, Nguyen, Bui & Phan, 2014). Софтвер нуди различите репрезентације – графичку, алгебарску и табеларну – које су узајамно повезане, тако да свака промена у једној утиче на промене у осталим. Захваљујући динамичном окружењу, традиционалне методе, попут употребе лењира и шестара, заменила је проблемски оријентисана настава, у којој ученици уче путем експеримента, разматрајући више могућих решења пре него што дођу до коначног закључка.

Геогедра се може успешно применити у разним областима математике. Помаже разумевању појма рационалног броја (Bulut, Ünlütürk Akçakin, Kaş & Akçakin, 2016; Lee & Boyadzhiev, 2013; Миликић, Вуловић и Михајловић, 2020; Thambi & Eu, 2013), као и појма функције (Božić, Takači & Stankov, 2019; Mudaly & Fletcher, 2019; Mushipe & Ogbonnaya, 2019). Новије верзије софтвера садрже и алате за статистичку обраду и анализу података (Phan-Yamada & Man, 2018; Prodromou, 2014). Геогедра позитивно делује и на оне аспекте наставе математике који се не односе на сам садржај, повећава мотивацију за учење, подстиче развој когнитивних способности, стварање позитивних ставова према настави и повећање самопоуздања ученика.

Прегледом литературе и анализом истраживања која су за предмет имала примену софтвера Геогедра, утврдили смо да његова имплементација у настави математике значајно побољшава резултате учења и трајност усвојених знања. Међутим, приметно је да у Републици Србији готово да нема истраживања која су се фокусирали на примену Геогедре на нивоу почетне наставе математике. Резултати таквих истраживања могли би показати да ли, и на који начин, примена софтвера утиче на наставу геометрије у млађим разредима основне школе и како се одражава на процес подучавања и учења. Разлоге за потребу истраживања ефеката примене Геогедре налазимо у малој заступљености образовног софтвера у основношколској математици, нижим резултатима наших ученика

на међународним тестирањима у домену геометрије у односу на остале домене, недостатку наставних средстава која би обезбедила бољу визуелизацију геометријских појмова, слабој информисаности учитеља о оваквом начину рада, као и недостатку компетенција за реализацију софтверски потпомогнуте наставе.

У доступној домаћој литератури мало је података о заступљености Геогедбре у настави геометрије у млађим разредима основне школе и разлозима који објашњавају зашто овакав облик наставе није присутан. Ово је изненађујуће, с обзиром да *Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019) препоручује употребу ИКТ, са посебним акцентом на Геогедру као алат који може помоћи ученицима да лакше развију основне геометријске појмове. Изузев неколико истраживања која су се бавила ставовима учитеља и наставника математике у Србији (Budinski, 2013; Миликић, Вуловић и Михајловић, 2020), мало је података о ставовима ученика и учитеља у вези са употребом Геогедбре у почетној настави математике.

Опредељење за утврђивање ефеката примене Геогедбре на наставу геометрије у почетној настави математике добили смо из бројних истраживања која су потврдила позитиван утицај овог софтвера на различитим нивоима образовања широм света (Akanmu, 2016; Aspari & Hartono, 2021; Belgheis & Kamalludeen, 2018; Bhagat & Chang, 2015; Boo & Eu, 2016; Ertem Akbaş & Alan, 2022; İbili, 2019; Kanono & Batiibwe, 2024; Kaya, Akçakin & Bulut, 2013; Küçük & Gün, 2023; Martinovski & Martinovski, 2013; Mensah, Ansu, Besing Karadaar & Gurah Junior, 2023; Mukiri, 2016; Tolić, Jukić & Josipović, 2015; Triwahyuningtyas, Rahayu & Agustin, 2019; Shadaan & Eu, 2013; Tutkun & Ozturk, 2013; Udin, Ismail & Alhassora, 2024). Због тога смо нашли за сходно да је важно испитати утицај софтвером потпомогнуте наставе на процес учења геометрије, као и на трајност усвојених знања ученика.

# I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР

## 1. ОБРАЗОВНИ СОФТВЕР ГЕОГЕБРА

### 1.1. Образовни софтвер – појмовно одређење, настанак и примена у настави

Под појмом 'софтвер у образовном систему' или 'образовни софтвер' подразумевају се многи рачунарски програми који се посредно или непосредно користе у планирању, организацији, припреми и/или реализацији наставе и учења. Појам образовног софтвера најчешће се везује за примену информационе технологије у области образовања. Подразумева готове компјутерске програме намењене коришћењу у оквиру наставе и у великој мери подстиче индивидуалне фаза учења. Једном речју, образовни софтвер представља својеврсни алат за учење, истраживање и експериментисање од стране ученика.

Половином двадесетог века појавиле су се прве верзије образовног софтвера намењене настави, док је шездесетих година дизајнирано неколико рачунарски подржаних система са циљем повећања постигнућа ученика. Основни принцип рада тих програма огледао се у формирању проблема, бележењу одговора и табеларном извођењу задатка. Касније, деведесетих година, појавили су се бројни образовни софтвери чији се највећи недостатак огледао у томе што су били затвореног типа, без могућности модификације појединих делова и прилагођавања специфичним потребама корисника.

Почетком XXI века настали су бројни софтверски производи који се разликују у зависности од намене, власништва и технолошких карактеристика које их одликују. Са становишта намене, могу бити: основни алати са широком применом, специјализовани алати са применом у образовању или наменски дизајнирани образовни софтверски производи. Када је о власништву реч, софтвери отвореног кода (*Open Source Software*) омогућавају корисницима да их употребљавају без накнаде. Могуће је модификовати их и слободно користити неки део софтвера, чиме је омогућено да корисници, у зависности од специфичних потреба, прилагоде производ или да на основу постојећег креирају нов софтвер.

Постоје три различита схватања образовног софтвера. Према првом схватању, образовни софтвер се може посматрати као алат дизајниран са акцентом на учење, чији је главни циљ утицај на когнитивну страну мишљења ученика. Дизајн оваквог софтвера почива на некој од постојећих теорија учења (конструктивизам, когнитивизам) и садржи елементе стратегије учења. Може се посматрати са аспекта подучавања, односно као алат намењен првенствено онима који поучавају. У том случају, образовни софтвер представља помоћно средство учитељима. Услед оваквог схватања, централно место учења представља учионица, чиме у потпуности изостаје интеракција ученика са софтвером. Према трећем схватању, образовни софтвер доживљава се као једна врста материјала за наставу. Може бити коришћен од стране учитеља и/или ученика, представљајући ресурс који пружа подршку процесу подучавања и/или учења.

Примена образовног софтвера постаје неизбежна димензија школе, поучавања и/или учења свих наставних предмета. У оквиру наставе математике његова примена огледа се како у школским тако и у ваншколским активностима. Као такав, представља ефикасно средство за модернизацију математичког образовања. Гунчага и Мајхерова наводе разлоге за имплементацију образовног софтвера у наставу математике са циљем модернизације математичког образовања и промене парадигме поучавања и учења. Образовни софтвер одликују бројне могућности за подизање мотивације и радозналости ученика за развијање вештина решавања проблема, побољшање ефикасности и стимулисање преиспитивања приступа настави (Gunčaga & Majherová, 2012). Будући да је дигитализација наставних материјала све присутнија, математички задаци, различити математички проблеми и други математички садржаји све више су доступни у електронском облику (Вуловић, Миленковић и Миликић, 2024), па се у складу са тим и примена образовног софтвера намеће као логична потреба савременог наставног процеса.

Из мноштва софтвера доступних на тржишту, када је настава математике у питању, издвојила су се два облика образовног софтвера који у знатној мери поједностављују процесе поучавања и учења математичких садржаја. То су *системи динамичке геометрије* (DGS софтвери) и *системи рачунарске алгебре* (CAS софтвери), чија појава је допринела да се промени приступ настави математике на свим нивоима (Pech, 2012). Поред великог утицаја који имају на наставу математике, не може се рећи да су поменути софтвери међусобно повезани. Док се CAS софтвери најчешће користе при манипулисању математичким формулама са циљем лакшег решавања сложених алгебарских задатака, DGS софтвери пружају корисницима могућност једноставнијег повезивања математичких објеката са њиховом графичком репрезентацијом.

Оно што CAS софтвере разликује од традиционалних калкулатора јесте могућност да једначине посматрају симболички, а не нумерички. Различите верзије

софтвера опремљене су различитим опцијама, али њихова основна сврха (симболичко манипулисање једначинама) остаје иста. CAS софтвери, поред извођења математичких операција, нуде и могућност графичке репрезентације једначина као и могућност дизајнирања специфичних алгоритама у складу са потребама корисника. Најраспрострањенији CAS софтвери су: *Reduce*, *Derive*, *Maple*, *Mathematica*, *MATLAB*, *Scientific WorkPlace*, *MuPAD*. Већина набројаних софтвера функционише на сличан начин. Међутим, и поред тога што их одликује заједничка основа, сваки од њих има специфичности које га чине посебним.

Теоријске основе DGS софтвера налазе се у теорији когнитивног развоја. Уз обезбеђивање услова потребних за визуелизацију математичких појмова, DGS софтвери подстичу ученика да учи путем открића. Њихова примена је у складу и са теоријом конструктивизма будући да ученик на бази личног искуства сопственом активношћу конструише, изграђује своје знање. Захваљујући захтеву да не само црта, већ анализира начин цртања фигуре, DGS софтвери представљају револуционарна средства за развој геометријског резоновања ученика.

DGS софтвери омогућавају вишеструке математичке репрезентације (графичку, симболичку, табеларну), њихово повезивање и једноставан трансфер са једног математичког аспекта на други. Промовишу конструисање знања у динамичном окружењу, олакшавају учење коришћењем анимација и визуелних материјала, позитивно утичу на постигнућа ученика из математике и формирање позитивног става према математици (Gökçe & Güner, 2022). Вредност DGS софтвера огледа се у интерактивности, ученик је у прилици да манипулише изабраним објектима, мења њихова својства и изводи изометријске трансформације. Уз њихову имплементацију ученик може да конструише и разуме конструкцију геометријских објеката, са циљем даљег повезивања са сродним појмовима. Неки од представника DGS софтвера су: *Cabri*, *Logo*, *Euklides*, *Cinderella*, *Geometer's Sketchpad*, *Dynageo*, *GEONExT*, *Geometrix*, *Zirkel und Lineal*.

Будући да укључује и симболичка и визуелна својства, Геогедбра се истовремено може окарактерисати и као CAS и као DGS софтвер.

## 1.2. Образовни софтвер Геогедбра – настанак и развој

Софтвер Геогедбра настао је 2001. године на Институту за дидактику природних наука Универзитета у Салцбургу<sup>1</sup> као мастер рад Маркуса Хоенвартера<sup>2</sup>. DGS софтвери *Geometer's Sketchpad*, *Cinderella*, *Cabri*, на чијим основама је настала Геогедбра, јесу моћни алати за наставу геометрије, али Хоенвартер је успео да једним софтвером успешно integriше геометрију, алгебру и анализу. Назив

<sup>1</sup> Institut für Didaktik der Naturwissenschaften der Universität Salzburg

<sup>2</sup> Markus Hohenwarter

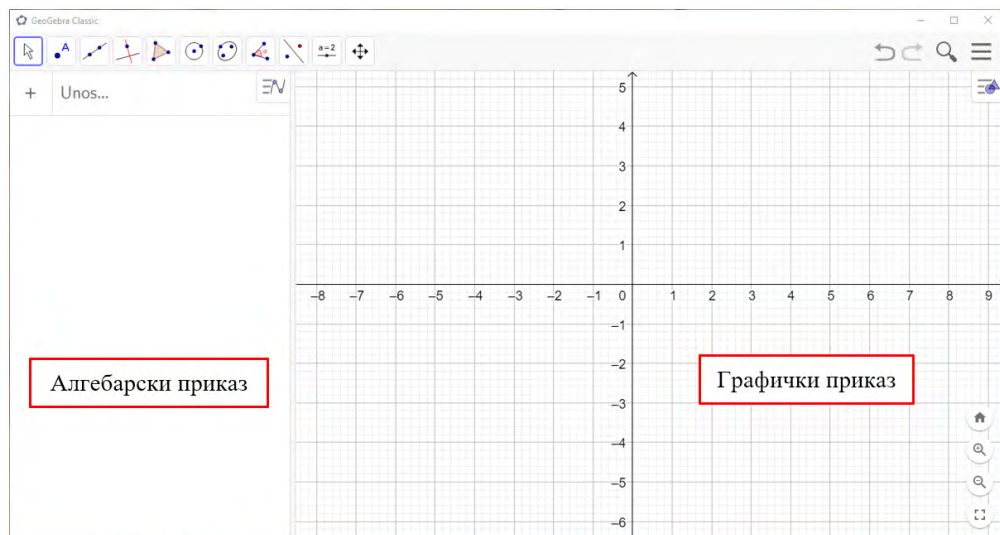
софтвера настао је од речи *геометрија* и *алгебра*, што још једном потврђује да Геогедра у себи садржи карактеристике и CAS и DGS софтвера. Прва верзија Геогедре, под називом *GeoGebra\_1.0*, појавила се 2002. године, а до данас се појавило више нових надограђених верзија. Последња верзија, *GeoGebra\_6.0*, објављена је 2017. године и њене могућности се и даље константно унапређују и надограђују.

Софтвер је написан у програмским језицима *Java* и *HTML5*, што омогућава да се користи независно од оперативног система рачунара. Софтвер је бесплатан, лако је доступан на интернету и може се преузети путем линка <https://www.geogebra.org/download><sup>3</sup>, а може се покренути и директно из веб-претраживача. Наведени линк води до интернет адресе на којој се налази неколико верзија софтвера у зависности од потреба корисника (*GeoGebra Calculator Suite*, *Graphing Calculator*, *3D Calculator*, *Scientific Calculator*), тј. у зависности од тога да ли ће софтвер користити за приказ графика функција, решавање једначина, геометријске конструкције и друге. Када се инсталира на рачунару, Геогедра може функционисати без приступа интернету, што је чини једноставном за коришћење у настави математике на различитим нивоима образовања. Како би се омогућило једноставно манипулисање и управљање функцијама и тиме оставило више простора за учење и експериментисање, приликом дизајнирања софтвера коришћен је *KISS (Keep it small and simple)* принцип, што Геогедру чини прилагођеном и корисницима који нису вешти у руковању рачунаром. Кориснички интерфејс софтвера преведен је на преко осамдесет језика (између осталог и на српски језик), те је самим тим његова употреба додатно олакшана. Како би се пронашао начин да се омогући употреба интерактивних материјала креираних у Геогедри и на мобилним телефонима и таблет рачунарима, створена је апликација коју је могуће преузети преко *Google Play* и *App Store*. Апликација се састоји од бројних алата налик онима који се могу пронаћи у верзији намењеној коришћењу на десктоп и лаптоп рачунарима.

### 1.3. Изглед и карактеристике Геогедра софтвера

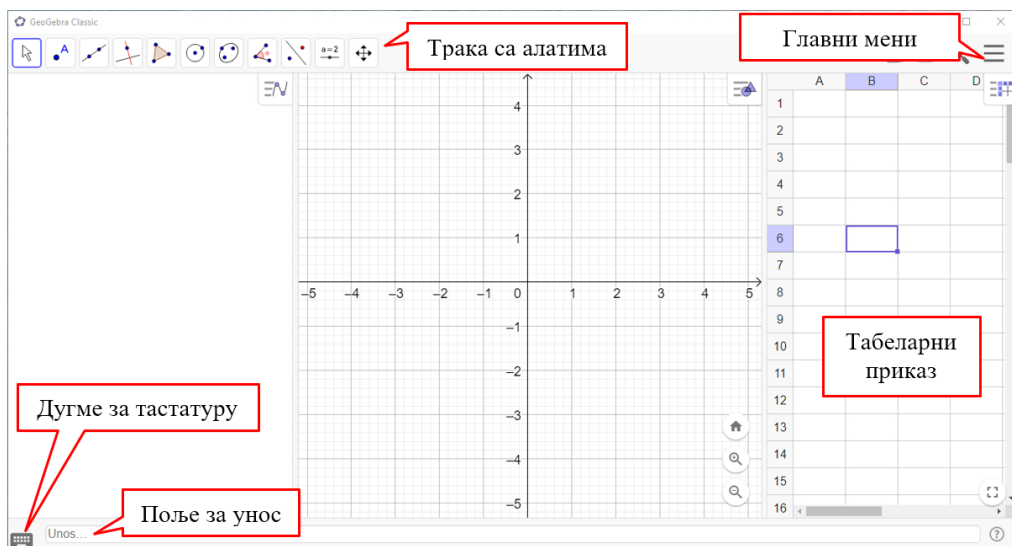
Након преузимања датотеке путем линка <https://www.geogebra.org/download> и покретања поступка инсталације, потребно је да се корисник упозна са условима коришћења и прихвати Геогедра лиценцу за употребу софтвера у некомерцијалне сврхе. Прихватањем услова коришћења, корисник је у могућности да бесплатно користи, копира, дистрибуира и преноси материјал креиран у Геогедра софтверу. По окончању инсталације, на радној површини рачунара појављује се икона са симболом Геогедре путем које се може покренути софтвер. На Слици 1 приказан је кориснички интерфејс софтвера Геогедра.

<sup>3</sup> Намењено употреби у некомерцијалне сврхе.



Слика 1. Изглед корисничког интерфејса Геогедре (верзија *GeoGebra Classic\_6*)

Кориснички интерфејс софтвера једноставан је за коришћење, стандардни алати су лако доступни и једноставни за употребу. На Слици 1, у левом делу налази се алгебарски приказ објекта, док се графички приказ истог објекта налази са десне стране. С обзиром на то да креатори Геогедре нарочит значај придају алгебарској и графичкој репрезентацији (Божић, 2019), табеларни приказ се не појављује приликом покретања софтвера, али се може активирати из главног менија. Дугме главног менија налази се у горњем десном углу (Слика 2), у оквиру којег се избором картице *Prikaz* и одабиром опције *Tabelarni prikaz* може активирати табеларни приказ креираних објеката. Сва три приказа (алгебарски, графички и табеларни) узајамно су повезана и синхронизована, тако да било каква промена објекта у оквиру једне репрезентације истовремено доводи до промене у осталим репрезентацијама. Софтвер сваком нацртаном објекту у алгебарском делу додељује име и једначину, а свакој тачки координате које је једнозначно одређују. У алгебарском делу приказане су и координате вектора, дужине дужи, површине многоуглова, величине углова, вредности параметара и разни прорачуни и мерења. У алгебарском приказу промене креираних објеката извршавају се двоструким кликом миша на једначину жељеног објекта, након чега је могуће извршити трансформацију. Након унете измене у алгебарском приказу, долази и до промене у графичком приказу и обрнуто.

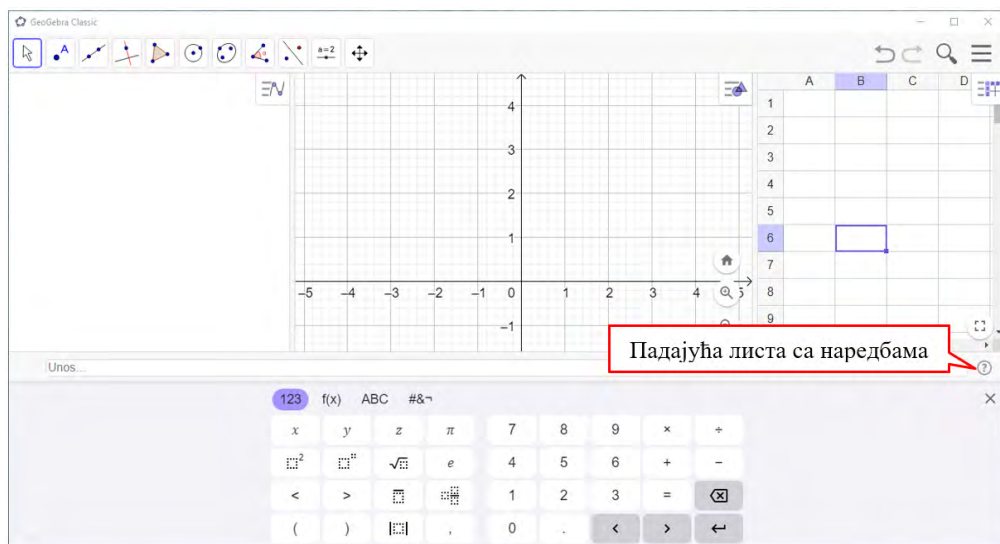


Слика 2. Елементи радног окружења Геогембре

У графичком делу софтвера дат је визуелни приказ креираних објеката: тачака, дужи, правих, вектора, кружница, многоуглова, и разних других сложених објеката. У графичком делу објекти се цртају уз коришћење алата из траке са алатима (Слика 2), док се измене могу вршити директно кликом миша на постојећи објекат.

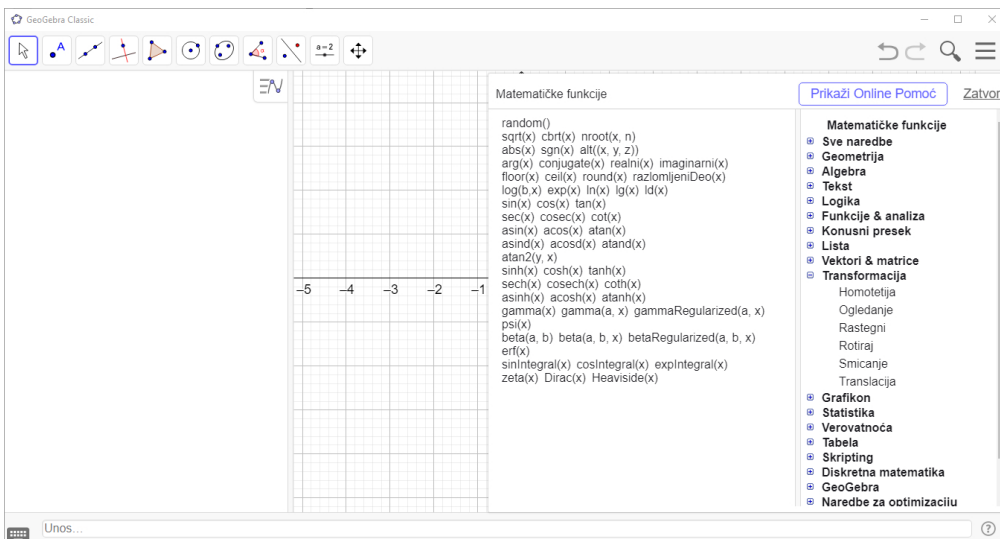
Табеларни приказ састоји се из ћелија од којих је сваку могуће именовати ознаком колоне и врсте (нпр. A1, B6,...). У ћелије је могуће унети бројеве, координате тачака, функције или наредбе, при чему софтвер, уколико је могуће, одмах након уноса у табеларном приказу генерише и графички приказ објекта именованог тако да одговара ознаци ћелије.

Поље за унос (активира се из главног менија избором картице *Prikaz*, а затим одабиром опције *Polje za unos*) налази се у дну прозора и омогућава унос података у природној нотацији, готово истоветно записивању у свесци или на табли. Коришћењем поља за унос могуће је директно унети жељени објекат, након чега се аутоматски генеришу његова алгебарска и графичка репрезентација. Избором иконе у облику тастатуре која се појављује у доњем левом углу прозора када је активан табеларни приказ (Слика 2), појављује се виртуелна тастатура која додатно олакшава задавање наредби (Слика 3). Избором једне од картица приказаних изнад виртуелне тастатуре корисник може одредити у коју сврху жели да користи тастатуру, као калкулатор, за задавање функција, писање текста или математичких симбола.



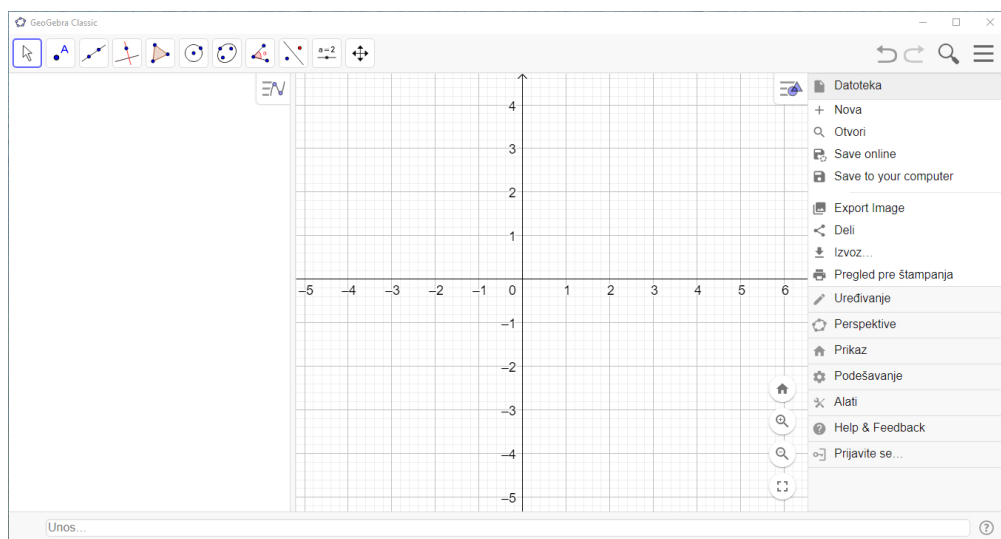
Слика 3. Изглед виртуелне тастатуре

У продужетку поља за унос, налази се дугме означено упитником (Слика 3), кликом на њега отвара се падајућа листа са свим функцијама које нуди Геоггебра. Наредбе су груписане у зависности од сврхе и области примене, могуће их је одабрати из падајуће листе или започети са писањем назива у пољу за унос. Након тога софтвер нуди математичке функције са истим именом и корисник може одабрати ону која му одговара а да притом не мора да откуца читаву наредбу (Слика 4).



Слика 4. Изглед падајуће листе са наредбама

Главни мени се састоји од осам картица (Слика 5). Картица *Datoteka* садржи наредбе намењене раду са датотекама. Прва наредба *Nova* користи за отварање новог прозора. Приликом избора ове наредбе отвара се дијалошки прозор са питањем кориснику жели ли да сачува постојећу датотеку пре отварања нове. Наредба *Otvori* служи за отварање претходно сачуване датотеке. У дијалошком прозору који се избором ове наредбе појављује корисник има прилику да изабере жели ли да отвори датотеку коју је сам претходно креирао или неку од датотека доступних на званичном сајту софтвера. Такође, отварање Геогедбра датотеке могуће је и превлачењем мишем жељене датотеке у претходно отворен радни прозор. Избор наредбе *Save online* омогућава да се жељена датотека сачува креирањем налога на званичном сајту Геогедбре, док наредба *Save to your computer* даје могућност да се датотека сачува у локалној меморији рачунара. И у једном и у другом случају конструкција се чува као Геогедбра датотека и уз назив фајла стоји екстензија *.ggb*. Слично као и са чувањем, кликом на икону *Deli* датотеку је могуће, уз претходну регистрацију корисника, поставити на званични сајт софтвера.

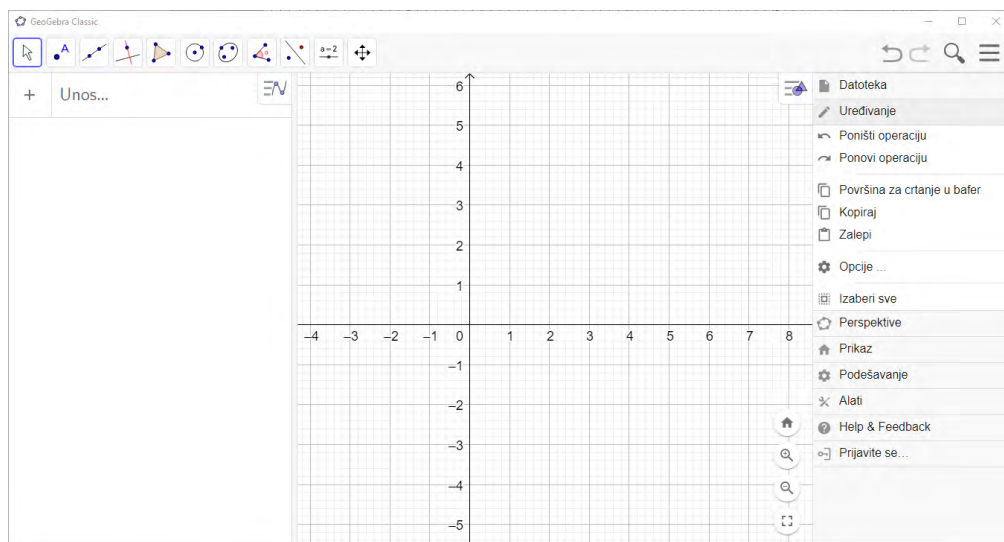


Слика 5. Изглед главног менија

Наредбом *Export Image* графички део радне површине може се сачувати као фотографија, док се кликом на *Izvoz...* појављује падајућа листа са могућим типовима датотека у којима је, поред *ggb* датотеке, могуће сачувати (извести) нацртану конструкцију (*png, svg, pdf, txt, html, stl, dae*). Кликом на наредбу *Pregled pre štampanja* отвара се дијалошки прозор у којем корисник бира да ли ће штампати графички или алгебарски део прозора.

Следећа картица из главног менија – *Uređivanje*, садржи групу од седам наредби за обликовање нацртаних објеката (Слика 6). Наредбе *Poništi operaciju* и

*Ponovi operaciju* могу се употребити како би се последње изведене радње понишtile, односно поништене радње поново извршиле. Употреба наредбе *Površina za crtanje u bafer* омогућава да се графички део прозора копира у бафер (помоћну меморију) рачунара, одакле се једноставно може користити у другим докумен-тима. Сличну улогу имају и наредбе *Kopiraj* и *Zalepi*, уз помоћ којих је жељене објекте могуће копирати у бафер, односно „залепити” у други документ.



Слика 6. Изглед картице *Uređivanje*

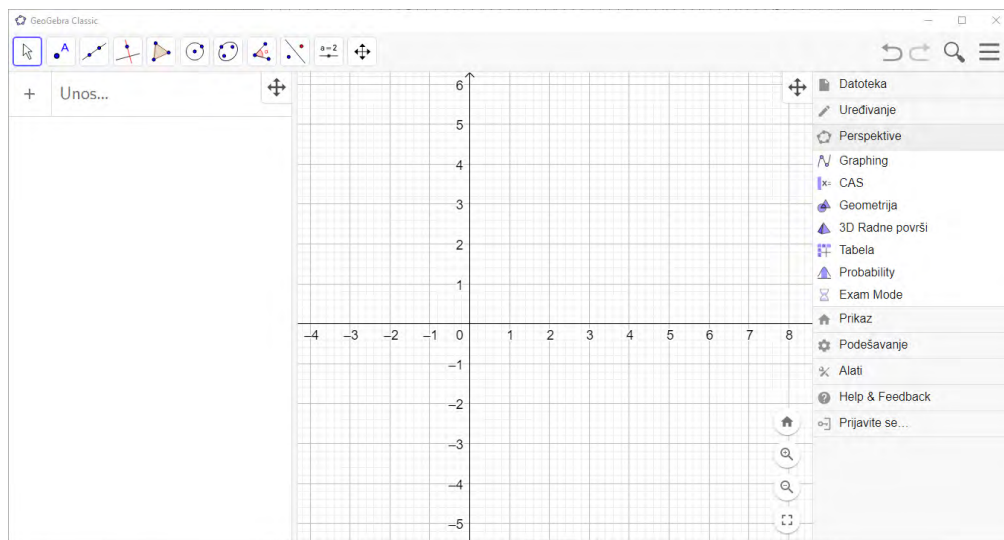
Одабиром наредбе *Opcije...* отварају се четири картице чијим избором се уређује изглед координатне мреже, координатне осе и њихов однос, боја позади-не графичког дела прозора и други параметри. Једним кликом на икону *Izaberi sve* на једноставан начин могу се означити сви приказани објекти.

Након избора одређеног објекта у картици *Uređivanje* појављују се неке нове наредбе. Икона *Obrni odabir* омогућава да се изабере сви објекти осим претход-но означеног, а избором наредбе *Prikaži/sakrij objekte* или *Prikaži/sakrij oznake* приказују се или чине невидљивим изабрани објекат или његова ознака. Опција *Brisanje* служи како би се обрисао означени објекат и сви његови зависни објекти.

Новије верзије софтвера унапређене су додатним наредбама тако да је у слу-чају зависних објеката њихов одабир могуће извршити селектовањем одговара-јућег независног објекта, а затим кликом на икону *Izaberi potomke*, док се кликом на наредбу *Izaberi pretke* врши означавање независних објеката од којих зависи селектовани зависни објекат.

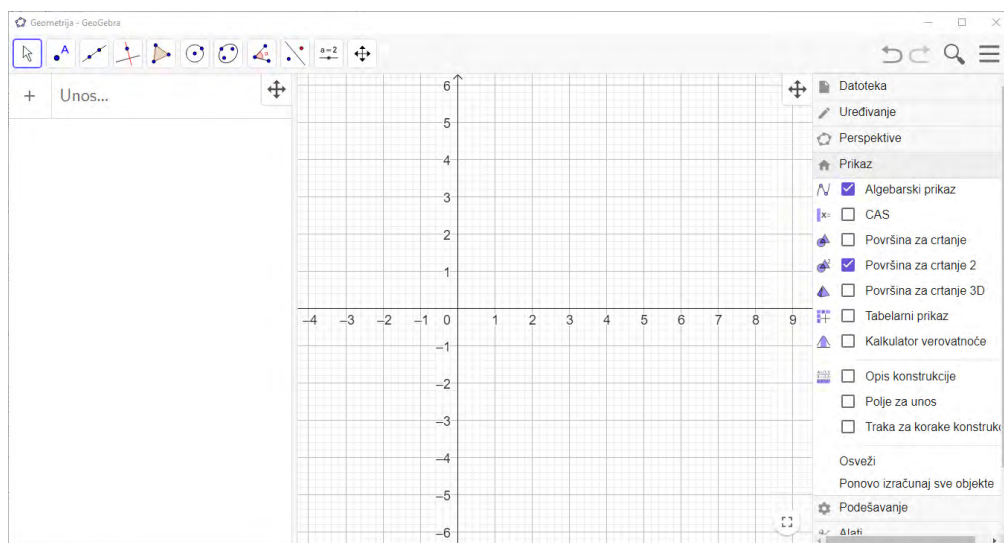
Картица *Perspektive* служи како би корисник изабрао одговарајуће радно окружење у зависности од потреба (Слика 7). У зависности од тога да ли ће се

бавити алгебарским садржајима, 2D или 3D објектима, табелама, вероватноћом, статистиком или жели креирати тест, корисник је у прилици да изабере неки од могућих приказа.



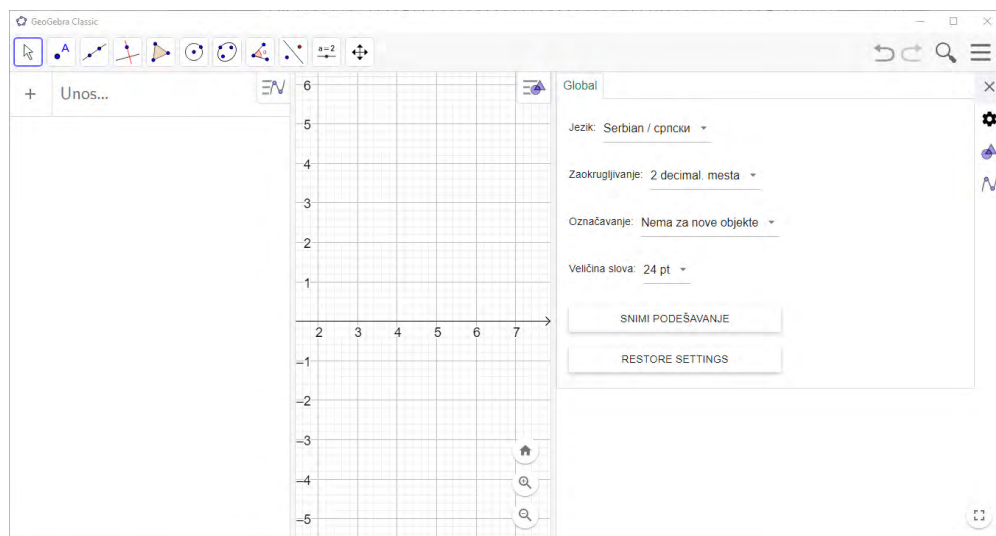
Слика 7. Изглед картице *Perspektive*

Следећа картица, *Prikaz*, нуди избор приказа који ће бити видљиви у оквиру радног окружења (Слика 8). Поред алгебарског, графичког и табеларног приказа, о којима је претходно било речи, избором опције *Površina za crtanje 3D* могу се репрезентовати и тродимензионални објекти. Активирањем поља *Opis konstrukcije* појављује се додатни прозор са списком свих корака начињених приликом конструкције. У зависности од означених карактеристика, за сваки конструисани објекат приказано је име, опис, дефиниција, вредност, натпис и друге. Потврдом поља *Traka za korake konstrukcije* у картици *Prikaz* у дну графичког дела радне површине појављује се трака за кораке конструкције која даје прилику за интерактивно извођење готове конструкције корак по корак. У сваком тренутку могуће је вратити се на претходни корак или прећи на наредни, као и мењати брзину којом се кораци конструкције смењују. Наредба *Osveži* служи како би се графички приказ освежио, као и за уклањање трагова конструисаних објеката (ради лакшег праћења промене положаја објеката у графичком приказу, Геогедра нуди могућност да приликом промене положаја конструисани објекти остављају траг у графичком приказу). Опцијом *Ponovo izračunaj sve objekte* могуће је извршити поновно израчунавање вредности (координата, површине, дужине) постојећих објеката.



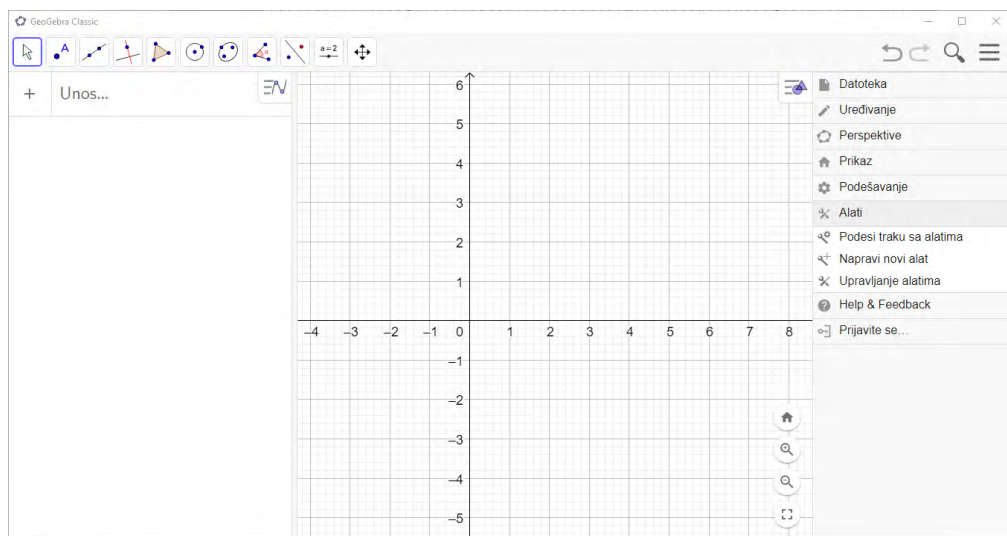
Слика 8. Изглед картице *Prikaz*

Картица *Podešavanje* користи се како би корисник извршио општа подешавања радног окружења софтвера (Слика 9). Може се одабрати жељени језик интерфејса, са колико децималних места ће вредности бити приказане или величина фонта за ознаке објеката и приказаног текста. Опција *Označavanje* пружа могућност избора хоће ли назив нових објеката бити видљив у графичком делу или не, у зависности од тога да ли је активирано аутоматско означавање, означавање свих нових објеката или искључиво нових тачака.



Слика 9. Изглед картице *Podešavanje*

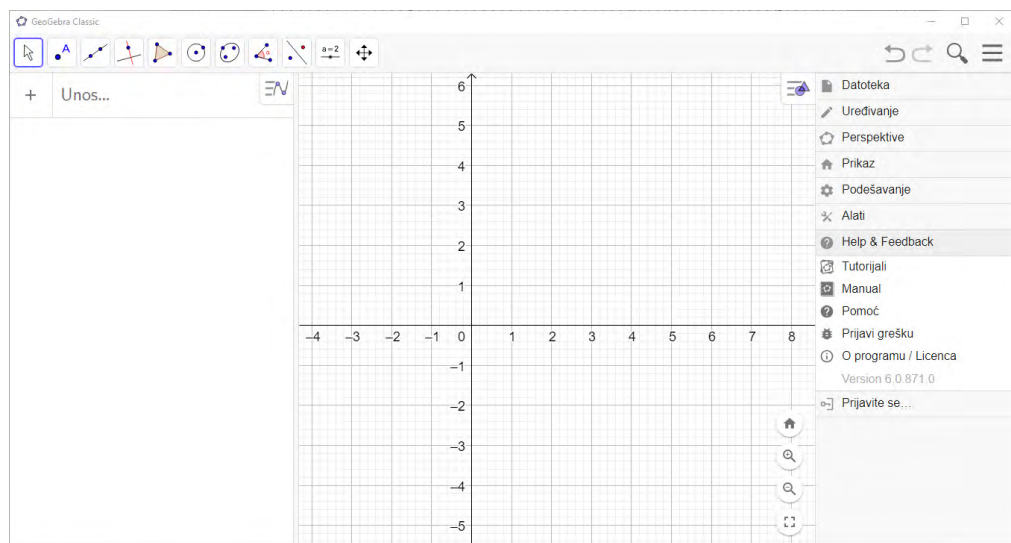
Картица *Alati* користи за управљање већ постојећим и дизајнирање нових алата (Слика 10). Кликом на наредбу *Podesi traku sa alatima* отвара се дијалошки прозор у којем је могуће извршити прилагођавање траке са алатима (променити им редослед, обрисати непотребне и сл.). Избор опције *Napravi novi alat* пружа прилику кориснику да дизајнира специфичан алат у зависности од сопствених потреба. Након израде конструкције на коју се односи нови алат, а затим активирањем поменуте наредбе, у дијалошком прозору који се отвара задају се назив, улазни и излазни објекти. Новонасталом алату приступа се из траке са алатима или поља за унос. Дијалошки прозор који се отвара кликом на *Upravljanje alatima* омогућава брисање алата или мењање његовог визуелног приказа (назива и иконе). Доступно је и премештање одабраног алата у Геогедбра датотеку за алате, из које се касније може користити и у некој другој конструкцији.



Слика 10. Изглед картице *Alati*

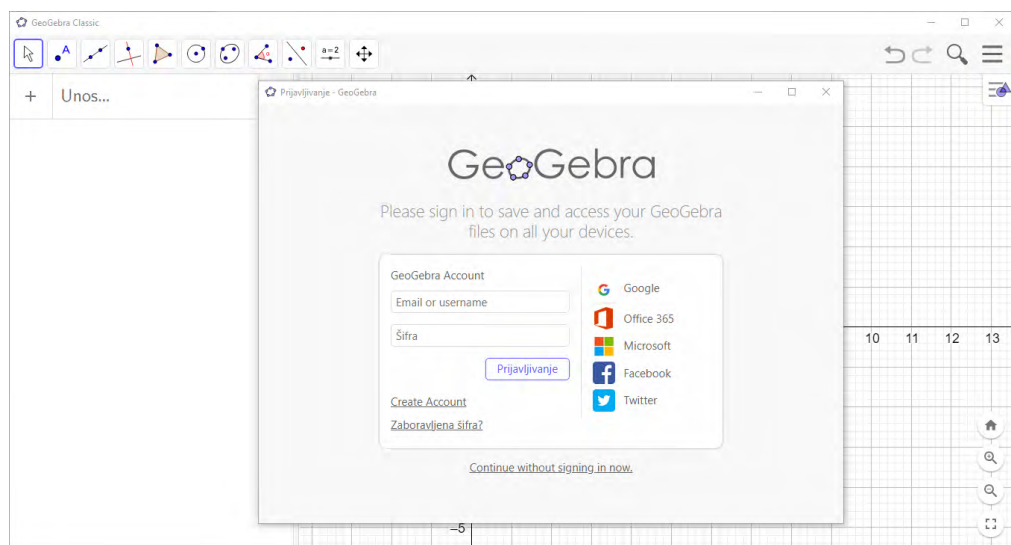
Картица *Help & Feedback* нуди помоћ и подршку кориснику при раду (Слика 11). У случају када је Геогедбра инсталирана на рачунару не захтева приступ интернету, клик на опцију *Tutorijali* води до дела у којем су објашњени почетни кораци и дате основе рада у сваком од делова софтвера (рад са функцијама, геометријским садржајима, табелама и сл.). Избором опције *Manual* отвара се део са приручником за коришћење свих алата и команди које Геогедбра нуди. Икона *Рото* води до дела Геогедбра сајта намењеног пружању помоћи и подршке корисницима софтвера – ту могу поставити питање, претражити жељени појам и пронаћи бројне корисне информације (за приступ је неопходан интернет). У случају појаве проблема у раду, коришћењем наредбе *Prijavi grešku* могуће је пријавити проблем директно на службеној страници Геогедбре, док се кликом на икону

О *programu* / *Licenca* отвара прозор са више информација о лиценци софтвера и условима коришћења. У дну картице *Help & Feedback* налази се и податак о верзији Геогедбре која се тренутно користи.



Слика 11. Изглед картице *Help & Feedback*

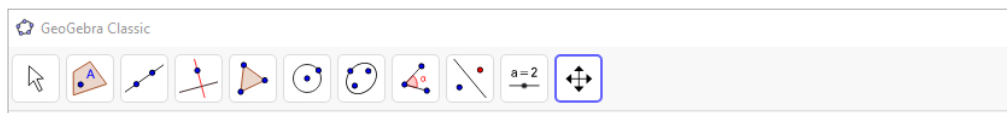
Последња у главном менију, картица *Prijavite se...*, омогућава корисницима да се региструју/пријаве на званичан сајт софтвера како би сачували или приступили већ постојећим материјалима доступним на сајту Геогедбре.



Слика 12. Изглед дијалошког прозора за регистровање/пријаву на сајт Геогедбре

## 1.4. Геогедбра алати за рад са објектима у равни

Основна функција траке са алатима јесте да олакша кориснику рад са објектима у графичком делу софтвера. Састоји се од скупа већег броја алата намењених цртању објеката уз употребу миша. Алати су најчешће груписани у зависности од намене, па тако трака садржи групу алата за померање, алате за тачке, алате за линије, посебне алате за линије, алате за многоуглове, алате за кружнице и лукове, алате за конусне пресеке, алате за мерење, алате за трансформације, посебне алате за објекте, акцијске алате, опште алате (Слика 13). Избором било којег алата у дну радног прозора појављује се поље са додатним инструкцијама за његово коришћење.

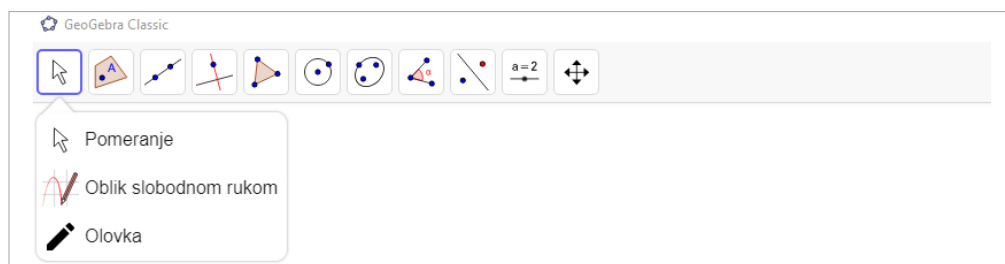


Слика 13. Изглед траке са алатима

Након избора алата за померање (Слика 14), појављује се падајућа листа са три алата. Алат *Pomeranje* омогућава померање изабраног објекта по графичком делу радне површине превлачењем мишем. Такође, након што се одређени објекат означи левим кликом миша, могуће га је избрисати притиском на тастер *Delete* или *Backspace*, или преместити уз коришћење стрелица на тастатури. За истовремено манипулисање већим бројем објеката, приликом њиховог означавања потребно је притиснути тастер *Ctrl*. Други начин за означавање више објеката истовремено јесте притиском и држањем десног тастера миша. На тај начин формира се селекциони правоугаоник након чега се скуп објеката може преместити превлачењем мишем уз очување међусобног односа селекованих објеката. Уз то, селекциони правоугаоник може користити и при одређивању графичког дела за штампање, извозу слика и сл.

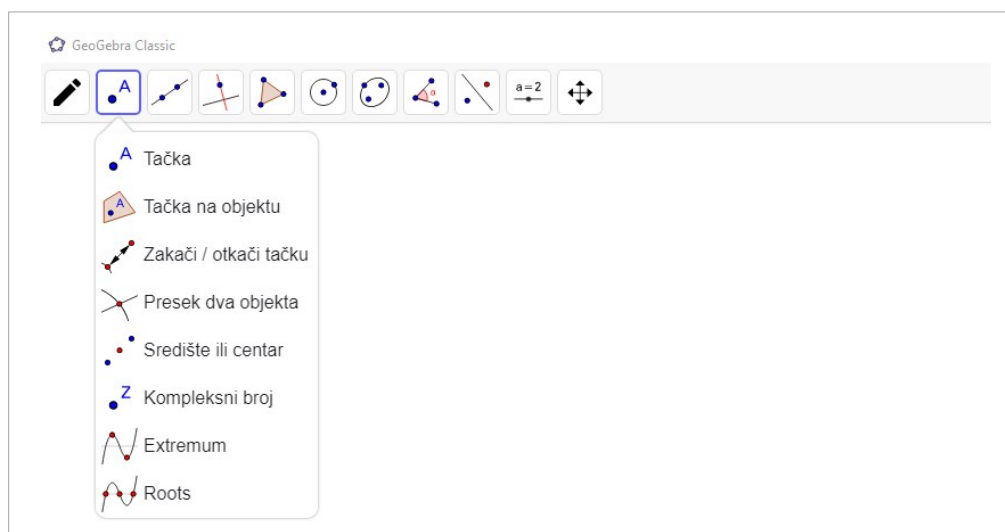
Сви објекти креирани у Геогедбри могу се поделити на независне и зависне. Независни објекти су „самостални”, односно не зависе од неких претходно нацртаних објеката и могуће је мењати њихов положај, док зависни објекти зависе од претходно нацртаних објеката и при промени неког својства независног објекта долази до промене и код зависног објекта. Поред независних и зависних објеката, могу се срести и помоћни објекти. Они су направљени уз помоћ посебних алата, или тако означени од стране корисника.

У групу посебних алата за објекте спадају алати *Oblik slobodnom rukom* и *Olovka*. Алат *Oblik slobodnom rukom* пружа кориснику могућност скицирања графика функције или произвољног геометријског објекта (дужи, кружнице, квадрата и сл.). Након што корисник заврши скицирање, софтвер препознаје контуре и даје тачан приказ скицираног објекта.



Слика 14. Алати за померање и посебни алати за објекте

Одабиром алата *Olovka* може се писати или цртати слободном руком у графичком делу прозора. Геогедра аутоматски нуди црну боју оловке, али корисник може променити боју, стил, дебљину линије кликом на икону у горњем десном углу прозора (испод иконе главног менија). За брисање написаног текста или нацртане фигуре током превлачења мишем преко објекта потребно је држати притиснут десни тастер миша.



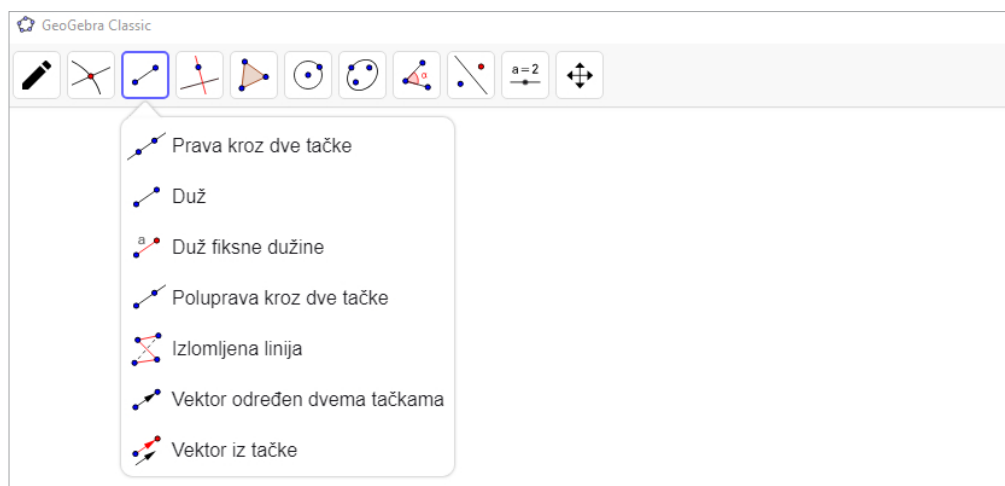
Слика 15. Алати за тачке

Избором алата за тачке појављује се падајућа листа са осам алата (Слика 15). Први у низу, алат *Таčka*, служи за креирање нових тачака у графичком делу прозора. Тачке је могуће нацртати и на другим објектима, на правама, фигурама, графицима функција итд. Након што корисник нацрта тачку, њене координате се појављују у алгебарском делу прозора. Променом координата у алгебарском делу долази и до промене положаја тачке у графичком делу радне површине и обратно. Избором алата *Таčka na objektu* могуће је нацртати тачку која припада неком објекту. Тачку креирану избором овог алата могуће је померати само

унутар објекта или по његовим ивицама. Алат *Zakači/otkači tačku* може послужити како би се независна тачка нацртана алатом *Tačka* „закачила” за неки претходно нацртан објекат. Од тог тренутка тачка преузима особине тачке креиране алатом *Tačka na objektu*, односно могуће је вршити њено померање само у оквиру граница објекта. Такође, поменути алат може користити и како би се тачка нацртана у објекту одвојила од њега и учинила независном. Једна или више тачака пресека два објекта могу се одредити избором алата *Presek dva objekta*, а затим означавањем жељених објеката. На тај начин, уколико постоје, појавиће се све тачке пресека. Посебно, кликом на сам пресек два објекта појавиће се само појединачна тачка пресека. Алатом *Središte ili centar* могуће је одредити средиште дужи или центар кружнице или конусног пресека. За одређивање средишта или центра потребно је кликнути мишем на жељени објекат или у случају дужи кликнути на крајње тачке дужи.

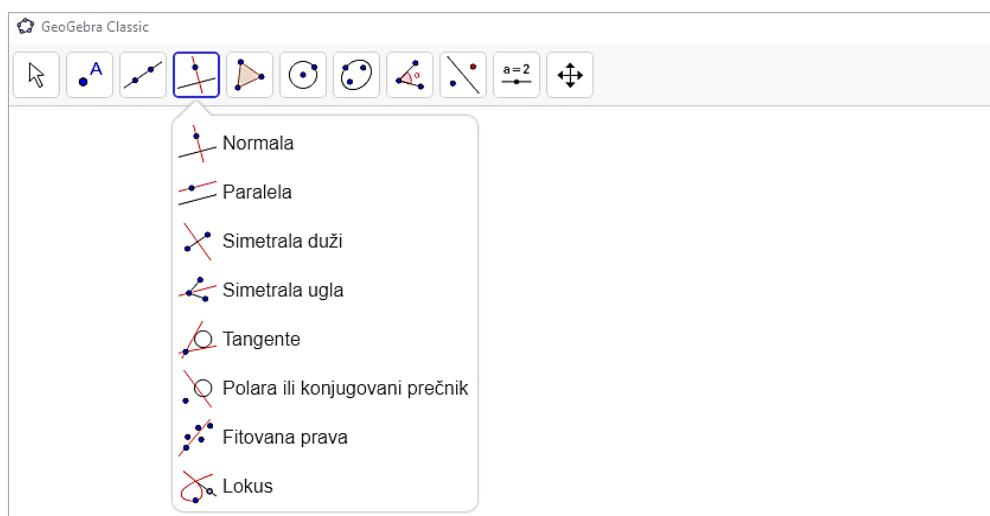
Комплексни број може се увести коришћењем алата *Kompleksni broj* а затим кликом миша у делу за графички приказ, док је истовремено у алгебарском приказу могуће видети вредност комплексног броја. Поред комплексног броја, новије верзије Геогедре нуде и алате за рад са функцијама. Тако, алат *Extremum* је намењен одређивању екстремних вредности функција (уколико постоје). Довољно је изабрати поменути алат, а затим означити график функције чије екстремне вредности треба одредити. Нуле функције, односно пресеке графика функције са  $x$ -осом (уколико постоје), могуће је одредити једноставним избором алата *Roots* а потом означавањем графика жељене функције.

Палета алата за рад са линијама садржи укупно седам алата (Слика 16). Избором првог алата из палете *Prava kroz dve tačke* могуће је извршити креирање праве одређене двема тачкама, било да су унапред задате или добијене након избора алата кликом миша у графичком делу софтвера. Одмах по задавању прве тачке појављује се права чији правац није једнозначно одређен све док корисник не изабере и другу тачку. Будући да права настаје као зависан објекат, брисањем било које од две тачке долази до брисања и саме праве. Такође, промена положаја тачака утиче и на промену правца праве. Дуж, као најкраће растојање између две тачке, настаје уз помоћ алата *Duž*. Довољно је после избора алата одредити крајње тачке, након чега се појављује дуж која их спаја. Истовремено са графичким приказом дужи, у алгебарском приказу појављује се и њена дужина. Дуж је могуће нацртати и избором алата *Duž fiksne dužine*, при чему је потребно изабрати једно теме дужи и задати дужину жељене дужи. Након тога појављује се дуж паралелна са  $x$ -осом и са фиксираним једним теменом. Кроз две тачке, користећи алат *Poluprava kroz dve tačke*, може се нацртати и полуправа са почетком у првој задатој тачки, док положај друге тачке одређује њен правац. За то време у алгебарском приказу може се видети једначина одговарајуће полуправе у имлицитном облику.



Слика 16. Алати за рад са линијама

Поред дужи, права и полуправа, алат *Izlomljena linija* пружа могућност кориснику да нацрта изломљену линију. Након избора алата све што је потребно јесте одредити најмање три тачке, а затим кликнути на прву тачку како би се генерисала отворена изломљена линија. Даље, кликом на алат *Vektor određen dvema tačkama* и избором почетне и крајње тачке вектора може се конструисати вектор, при чему растојање између тачака одређује његов интензитет, а међусобни положај тачака одређују правац и смер вектора. Алатом *Vektor iz tačke* могуће је нацртати нови вектор на основу избора једне тачке и већ постојећег вектора. Коришћењем овог алата добијен је вектор истог интензитета и смера са задатим вектором.



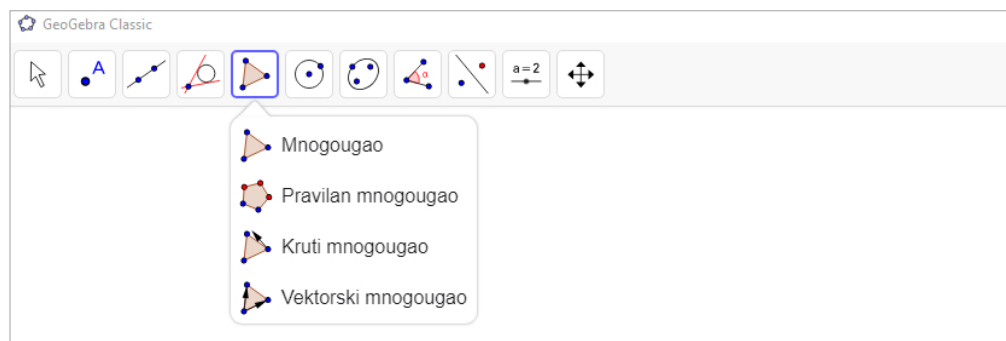
Слика 17. Посебни алати за рад са линијама

На Слици 17 приказана је падајућа листа која се добија кликом миша на четврту икону у траци са алатима и садржи укупно осам посебних Геогедра алата за рад са линијама. Алатом *Normala* корисник може нацртати нормалу у односу на претходно задату праву која пролази кроз одређену тачку. С обзиром на то да настаје као зависни објекат, променом положаја било праве или тачке кроз коју нормала пролази, долази до промене положаја нормале. Алат *Paralela* служи за одређивање праве паралелне са датом правом. Функционише на сличан начин као и алат за добијање нормале на дату праву. За одређивање симетрале жељене дужи може се користити алат *Simetrala duži*, чијим се коришћењем добија симетрала дате дужи. Након избора алата, довољно је кликнути на крајње тачке дужи или саму дуж. Слично са одређивањем симетрале дужи, избором алата *Simetrala ugla* а затим означавањем жељеног угла може се добити права којој припада симетрала угла.

Алатом *Tangente* могу се одредити тангенте на кружницу, конусни пресек или график функције. Тангенте на кружницу из тачке ван кружнице добијају се избором алата, а затим означавањем жељене кружнице и тачке или избором кружнице и праве (том приликом добијају се тангенте паралелне датој правој). Избором поменутог алата а затим две кружнице, уколико постоје, као резултат добиће се њихове заједничке тангенте (највише четири тангенте). Следећи алат у падајућој листи, *Polara ili konjugovani prečnik*, служи да се одреди полара, односно конјуговани пречник конусног пресека. За одређивање поларе треба означити тачку, а затим и поменути конусни пресек, док је за конјуговани пречник потребно одабрати праву или вектор и конусни пресек. Уз помоћ алата *Fitovana prava* могуће је добити фитовану праву за унапред задати скуп тачака, и то креирањем селекционог правоугаоника којим се обухватају тачке или избором тачака из листе у алгебарском делу софтвера. За одређивање локуса треба кликнути на алат *Lokus* а затим одабрати две тачке. Најпре тачку која описује локус, а затим тачку од које прва тачка зависи (друга тачка се налази на неком од објеката, правој, дужи, кружници и сл.).

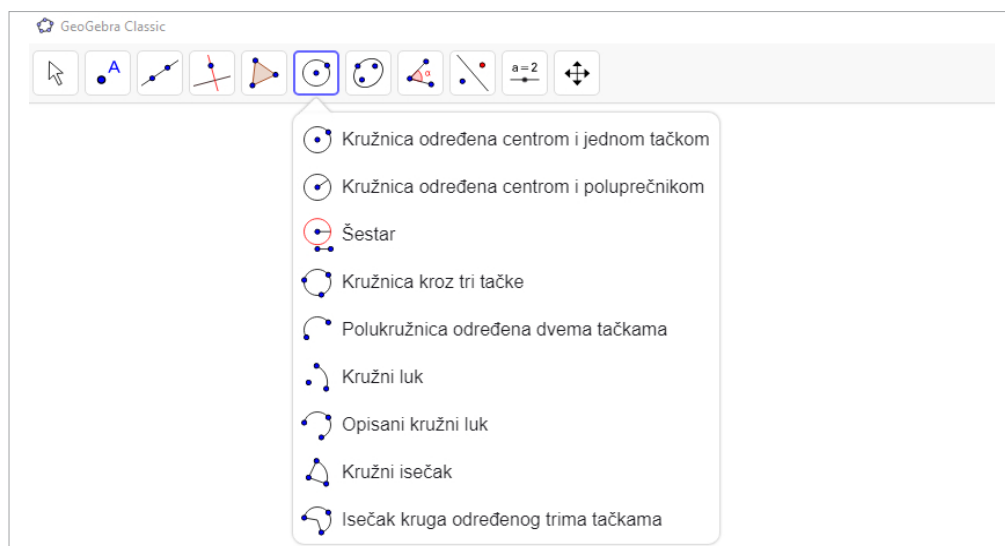
Следећа група алата у траци са алатима намењена је за рад са многоугловима (Слика 18). Уз помоћ алата *Mnogougao* може се нацртати многоугао задавањем тачака које представљају темена многоугла. Потребно је означити најмање три тачке како би многоугао (троугао) могао бити креиран. Све време у алгебарском приказу могу се видети координате темена, дужине страница и површина новонасталог многоугла. Уз употребу алата *Pravilan mnogougao* може се нацртати правилан многоугао (једнакостранични троугао, квадрат, правилан петоугао, правилан шестоугао итд.), и то избором две тачке а затим уписивањем укупног броја темена жељеног многоугла у дијалошки прозор. Сем почетна два темена, остала темена добијеног многоугла јесу зависни објекти и дужине преосталих страница многоугла зависе од дужине странице која спаја прва два темена. Алатом *Kruti mnogougao* корисник има прилику да нацрта многоугао који ће у сваком тренутку

задржати свој облик. Након избора тачака које ће представљати темена многоугла, а затим поново избором прве задате тачке добија се многоугао који остаје исти, без обзира на примењене изометријске трансформације. На сличан начин функционише и алат *Vektorski mnogougao*. По креирању многоугла стандардним поступком, померањем његовог првог темена задржава се почетни облик, док померањем осталих темена многоугла може доћи до промене првобитног облика.



Слика 18. Алати за многоуглове

Падајућа листа са укупно девет различитих алата служи за рад са кружницама и кружним луковима (Слика 19). Креирање кружнице могуће је алатом *Kružnica određena centrom i jednom tačkom* којим се задаје једна тачка која представља центар кружнице и једна тачка која припада кружници. Растојање између поменуте две тачке представља полупречник настале кружнице. Када је позната дужина полупречника, кружницу је могуће нацртати избором алата *Kružnica određena centrom i poluprečnikom*. Означавањем тачке која представља центар, а затим уносом дужине полупречника у дијалошки прозор генерише се кружница. Алат *Šestar* има сличну функцију као алат *Kružnica određena centrom i jednom tačkom*. Након избора дужи или две тачке за полупречник, треба кликнути на тачку која ће бити центар нове кружнице. Када су познате три тачке кроз које пролази кружница, избором алата *Kružnica kroz tri tačke* а затим означавањем те три тачке, конструише се кружница.



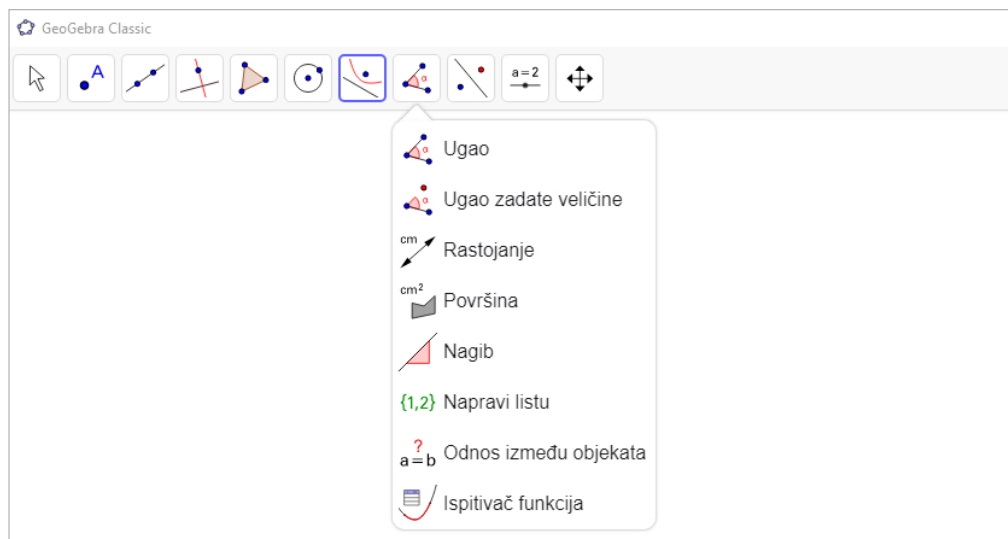
Слика 19. Алати за кружнице и лукове

Полукружницу можемо нацртати коришћењем алата *Polukružnica određena dvema tačkama*. Најпре треба изабрати алат, а потом и две тачке које одређују полукружницу. Кружни лук формира се алатом *Kružni luk* а затим означавањем три тачке. Тада прва тачка представља центар лука, док друге две тачке одређују његову дужину. Описани кружни лук настаје тако што треба изабрати алат *Opisani kružni luk* и три тачке кроз које пролази лук. Померањем било које од тачака долази до промене облика лука. У алгебарском приказу у сваком тренутку приказана је дужина лука. Задавањем центра и две тачке уз помоћ алата *Kružni isečak* генерише се графички приказ кружног исечка. Прва од две тачке представља почетну тачку исечка, док је другом (не мора нужно лежати на исечку) одређена дужина лука. Кружни исечак може се креирати и алатом *Isečak kruga određenog trima tačkama*, при чему све три тачке морају припадати луку. Положај тачака једнозначно одређује центар исечка, а у алгебарском делу може се пратити промена површине исечка која зависи од међусобног положаја тачака.



Слика 20. Алати за конусне пресеке

Цртање и рад са конусним пресецима могући су уз помоћ алата груписаних у падајућем менију са укупно четири алата (Слика 20). Први алат, *Elipsa*, намењен је цртању елипсе. Након што корисник изабере поменути алат треба да одреди две тачке које ће представљати жиже (фокусе) и једну тачку кроз коју ће пролазити елипса. Истовремено са графичком репрезентацијом, у алгебарском делу приказује се и општи облик једначине елипсе. На сличан начин, уз употребу алата *Hiperbola* и задате три тачке (прве две изабране тачке одређују жиже, а трећа се налази на хиперболи) може се нацртати крива другог реда. Избором алата *Pomeranje* и селектовањем неке од тачака, мењају се облик и положај хиперболе. Алат *Parabola* служи за цртање параболе, уз претходно задату праву и тачку које представљају директрису и жижу параболе. По избору алата треба кликнути на тачку и директрису како би се генерисала парабола. У новијим верзијама Геогедре међу алатима за рад са кривама другог реда налази се и алат *Konusni presek kroz pet tačaka* који пружа могућност цртања конусног пресека на основу задатих пет тачака кроз које пролази крива. У зависности од међусобног положаја тачака, конусни пресек може имати облик елипсе, кружнице, параболе или хиперболе.

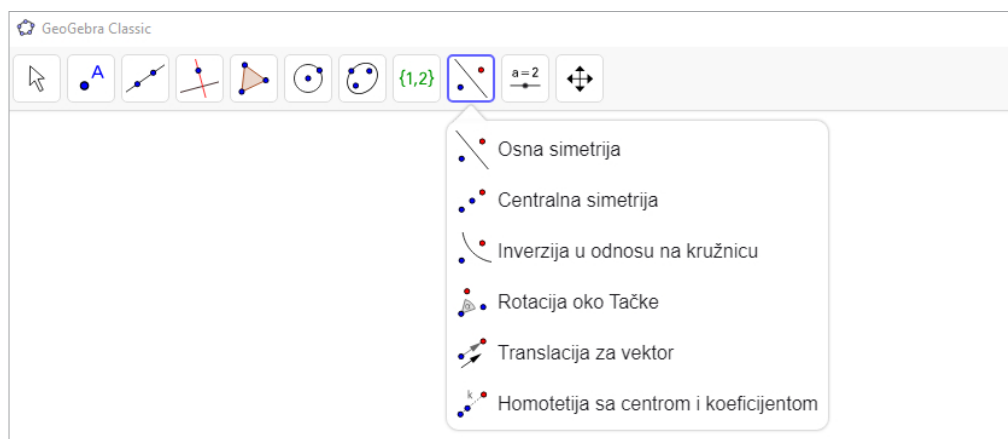


Слика 21. Алати за мерење и посебни алати за објекте

Падајућа листа са укупно пет алата за различита мерења приказана је на Слици 21 (алати *Napravi listu*, *Odnos između objekata* и *Ispitivač funkcija* спадају у групу посебних алата за објекте). Алат *Ugao* омогућава цртање угла на различите начине, било да је угао одређен трима тачкама (при чему је друга изабрана тачка теме угла), двома правима, двома дужима или са два вектора. Ако се изабере алат *Ugao* и кликне на већ постојећи објекат приказаће се сви његови углови. Угао одређене величине може се нацртати избором алата *Ugao zadate veličine*. Након

што се означаи тачка која припада једном углу и теме угла, јавља се дијалошки прозор у којем корисник може изабрати оријентацију и величину угла.

Алат *Rastojanje* користи за одређивање удаљености две тачке, тачке и праве или две праве. Избором овог алата а затим означавањем многоугла или кружнице могуће је одредити њихов обим, који се приказује и у графичком и у алгебарском делу радне површине. Са друге стране, за одређивање мерног броја површине многоугла или дела равни ограниченог кружницом или елипсом намењен је алат *Površina*. Како би Геогедра софтвер одредио површину треба одабрати поменути алат, кликнути на жељени објекат, након чега се мерни број површине исписује у графичком делу у виду текста. Алат *Nagib* служи да корисник одреди вредност нагиба праве према  $x$ -оси, односно коефицијент правца.

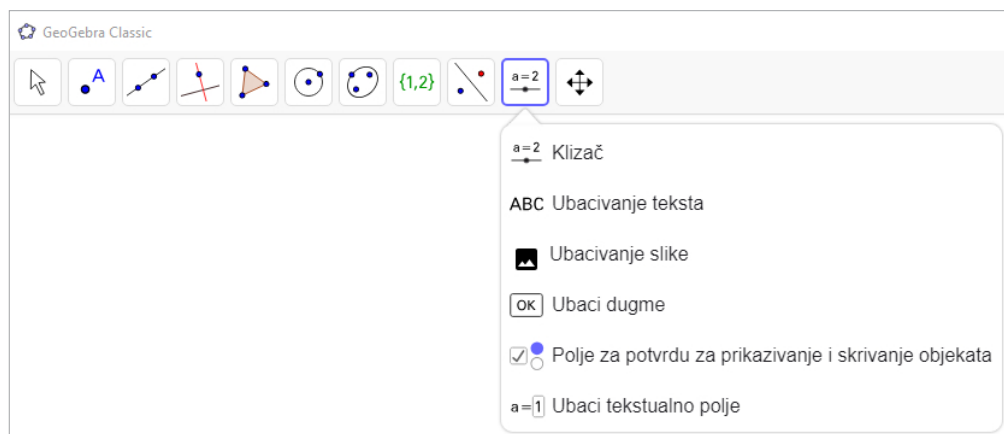


Слика 22. Алати за трансформације

На Слици 22 приказана је група алата намењена извођењу геометријских трансформација нацртаних објеката. Осносиметричну слику изабраног објекта (тачке, кружнице, многоугла) у односу на изабрану праву која представља осу симетрије могуће је одредити помоћу алата *Oсна симетрија*. Имајући у виду да је слика добијена оном симетријом зависна у односу на оригинал, променом неког дела почетног објекта мења се и његова слика. На сличан начин функционише и алат *Centralna симетрија*, код којег је након избора објекта за пресликавање потребно одабрати тачку која ће представљати центар симетрије. Код новијих верзија Геогедре може се наћи и алат *Inverzija u odnosu на кружницу* који се користи за одређивање геометријског објекта инверзног датом у односу на задату кружницу. Све што је потребно јесте означити тачку која је предмет инверзије и селектовати постојећу кружницу, након чега се појављује инверзна слика. Ротацију изабраног објекта могуће је извршити уз помоћ алата *Rotација око тачке*, при чему након избора алата треба означити објекат, одредити тачку која ће представљати центар ротације, а затим у дијалошком прозору уписати величину угла и оријентацију.

Уз коришћење алата *Translacija za vektor* могуће је обавити транслацију. Потребно је само означити објекат који је предмет транслације, а затим и вектор. Тако добијен објекат представља слику почетног објекта и зависи од његових карактеристика, као и од промене правца, смера или интензитета вектора транслације. Последњи у овој групи јесте алат *Homotetija sa centrom i koeficijentom*. Да би дошло до хомотетије, након избора алата, затим објекта и тачке (центра хомотетије), појављује се дијалошки прозор у који треба уписати коефицијент хомотетије.

Као што је претходно било речи, у групу посебних алата за објекте спадају алати *Napravi listu*, *Odnos između objekata* и *Ispitivač funkcija*. Уз употребу алата *Napravi listu* могуће је направити листу постојећих објеката у графичком делу, тако што се након одабира алата уз помоћ селекционог правоугаоника изабере жељени објекти. Додатно, листу објеката могуће је креирати и из табеларног дела софтвера избором свих ћелија а затим одабиром алата *Napravi listu*. Алат *Odnos između objekata* користи се за одређивање међусобног односа два објекта (Тончева, 2011). Након избора алата и означавања објеката, у графичком делу софтвера појављује се информација о њиховом узајамном односу. *Ispitivač funkcija* је такође посебан алат за објекте. Он служи за испитивање функције, тако што након избора алата треба означити функцију која се жели испитати. По отварању дијалошког прозора може се унети интервал на којем ће алат одредити минимум и максимум функције, нулу функције и сл.



Слика 23. Посебни алати за објекте и акцијски алати

У падајућој листи на Слици 23 налазе се још неки посебни алати за објекте (*Ubacivanje teksta* и *Ubacivanje slike*) и акцијски алати. Избором алата *Ubacivanje teksta* могуће је креирање статичних или динамичних текстова и *LaTeX* формула у графичком делу Геогембре. Након што корисник кликне на радну површину, појављује се дијалошки прозор за унос текста. У случају да корисник жели унети текст који ће бити „везан” за неку постојећу тачку, избором алата *Ubacivanje*

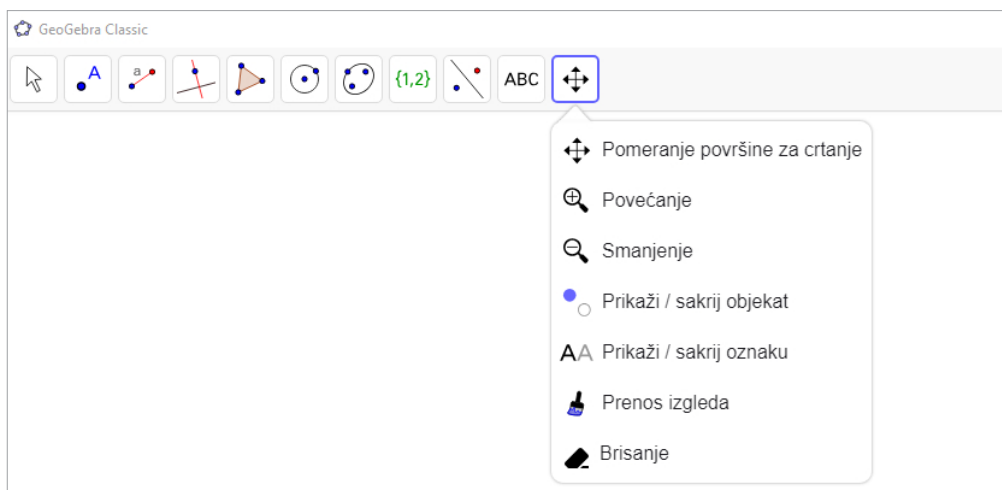
*teksta* а затим кликом на тачку појављује се дијалошки прозор у који се уноси текст чији је положај у графичком делу „везан” за тачку. Било какво померање тачке доводи и до промене положаја текста. Позиција текста може се задати и као апсолутна у графичком делу пакета (зумирање не утиче на текст, увек остаје видљив у графичком делу) или релативна у односу на координатни систем. Геогедбра текст директно унет у дијалошки прозор сматра статичним, односно на њега не утичу промене објеката приказаних у графичком делу. За динамични текст који приказује променљиве вредности, у зависности од промене објеката за које је везан, потребно је у дијалошком прозору у оквиру падајуће листе *Napredno* изабрати картицу са симболом Геогедбре, а затим означити жељени објекат. У истом прозору, уз помоћ опције *LaTeX formula*, лако и једноставно се могу написати математичке формуле. Избором картице *LaTeX formula* појављују се разноврсни готови обрасци, а испод ознаке  $\alpha\beta\gamma$  доступан је велики број математичких симбола и оператора.

Употребом алата *Ubacivanje slike* врши се убацивање фотографије у графички део радне површине. Након одабира алата отвара се прозор за избор жељене фотографије. Фотографија се појављује у графичком приказу са тачкама у доњем делу које користе за промену положаја или величине увезене фотографије.

Поред посебних алата за објекте, на Слици 23 приказан је падајући мени са четири акцијска алата. Алат *Klizač* служи за увођење клизача (променљиве) који може узети вредност броја или величине угла, а којим је могуће управљати променама објеката креираних у Геогедбри. Најпре треба одабрати алат и у графичком делу одредити позицију где ће се клизач налазити (позиција може бити апсолутна или зависити од координатног система). Након тога, активира се дијалошки прозор који омогућава задавање жељене ознаке променљиве, интервала вредности које променљива може узети, оријентацију клизача, брзину којом се вредности мењају и друге. Креирањем клизача и активирањем једне од две врсте анимација које постоје у Геогедбри омогућено је динамично манипулисање нацртаним објектима, при чему је праћење промена које том приликом настају једна од главних предности Геогедбре над осталим *DGS* софтверима. Једна врста анимација покреће се избором опције *Animiraj* (појављује се кликом на десни тастер миша), док друга представља ручну анимацију која настаје променом вредности клизача (Станковић, Јордановић и Јанковић, 2015). Анимација покренута избором опције *Animiraj* може се понављати у три модалитета: растућем (вредност клизача се константно повећава), опадајућем (вредност клизача се смањује) и осцилујућем (вредност клизача расте до максималне задате вредности, а затим опада до минималне вредности).

За уметање дугмета у графички део софтвера користи се алат *Ubaci dugme*. Прво треба изабрати алат и одредити положај дугмета, након чега се појављује дијалошки прозор у којем се може задати натпис који ће се приказивати на дугмету, а у оквиру картице *Na Click* задати наредба која ће се извршавати када се

кликне на дугме. Помоћу алата *Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata* може се направити поље за потврду којим се одређује да ли ће објекти бити видљиви у графичком делу или не. Након што се изабере алат и кликне на графички део софтвера, отвара се дијалошки прозор у који се уноси натпис поља и одређује који објекти ће се приказивати. Одабир објеката могуће је извршити са листе која се појављује по отварању дијалошког прозора или их је могуће означити кликом миша у алгебарском или графичком приказу. Кликном на алат *Ubaci tekstualno polje* а затим на графички приказ може се увести текстуално поље. По отварању дијалошког прозора могуће је задати натпис и повезане објекте, након чега се генерише текстуално поље.



Слика 24. Општи алати

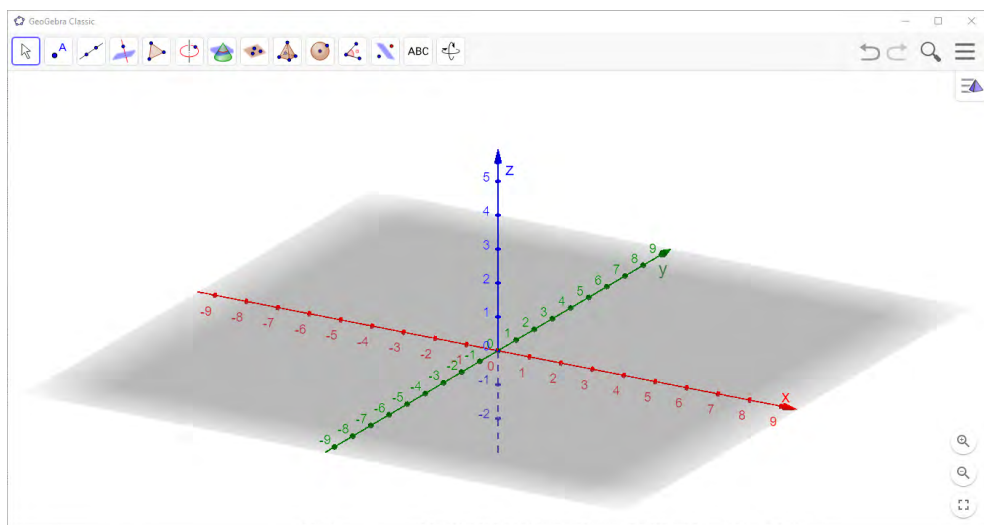
У траци са алатима налази се и падајућа листа са општим алатима (Слика 24). Први од седам алата, *Pomeranje površine za crtanje*, служи за померање видљивог дела графичког приказа. Избором алата а затим превлачењем мишем по графичком делу могуће је изабрати део радне површине који ће бити видљив у оквиру прозора. Такође, коришћењем истог алата може се променити и величина јединичних дужи на координатним осама превлачењем мишем преко осе чије вредности се желе променити. За увећавање или умањивање одређених делова графичког приказа служе алати *Povećavanje* и *Smanjenje*. По одабиру алата треба кликнути мишем на део који се жели увећати/умањити ради боље прегледности радне површине. Исту функцију имају иконице у облику лупе које се налазе у доњем десном углу графичког приказа. Трећи начин за увећавање или умањивање одређених делова јесте постављање миша на део који је потребно увећати или умањити, а затим померање точкића миша напред или назад. Икона у облику куће, такође смештена у доњем десном углу графичког приказа, користи за враћање радне површине графичког дела на приказ координатног почетка.

Помоћу алата *Prikaži/sakrij objekat* објекти се могу учинити невидљивим у графичком делу или се могу поново приказати. По избору алата треба селекувати објекте који се желе учинити невидљивим, а затим изабрати други алат како би наступила промена видљивости. Поновним кликом на исти алат појављују се бледе контуре објеката који су невидљиви, након чега је могуће поништити избор и поново их учинити видљивим. На сличан начин функционише и алат *Prikaži/sakrij oznaku*. Уз овај алат може се изабрати објекат чија се ознака/назив жели приказати или уклонити. Алат *Prenos izgleda* служи за преношење визуелних својстава објеката. Омогућава да се боја, дебљина линије, стил линије преузму са једног објекта и пренесу на више других. Пошто се изабере алат и објекат чија својства се желе пренети, све што је потребно јесте означити објекте који треба да усвоје одговарајуће особине. За брисање објеката користи се алат *Brisanje*, након чијег избора је потребно означити објекат који треба обрисати. Брисањем у графичком делу, аутоматски се брише и једначина објекта у алгебарском приказу.

Пречице за поједина подешавања доступне су кликом на десни тастер миша. Када је изабран алат *Pomeranje*, кликом на десни тастер миша отвара се падајући мени са опцијама за приказивање координатних оса, приказивање координатне мреже, активацију траке за кораке конструкције, подешавање односа координатних оса, зумирање, приказ свих конструисаних објеката, враћање радне површине на приказ координатног почетка, дијалошки прозор за детаљније подешавање радне површине. Када се курсор налази изнад објекта, кликом на десни тастер миша отвара се падајућа листа са опцијама за приказивање/сакривање објекта или ознаке, приказ трага, преименовање, брисање или подешавање. У оквиру опције *Podešavanje* могу се вршити детаљнија подешавања карактеристика објекта, дебљине и стила линије, боја, величина, облика тачке и друге напредне функције.

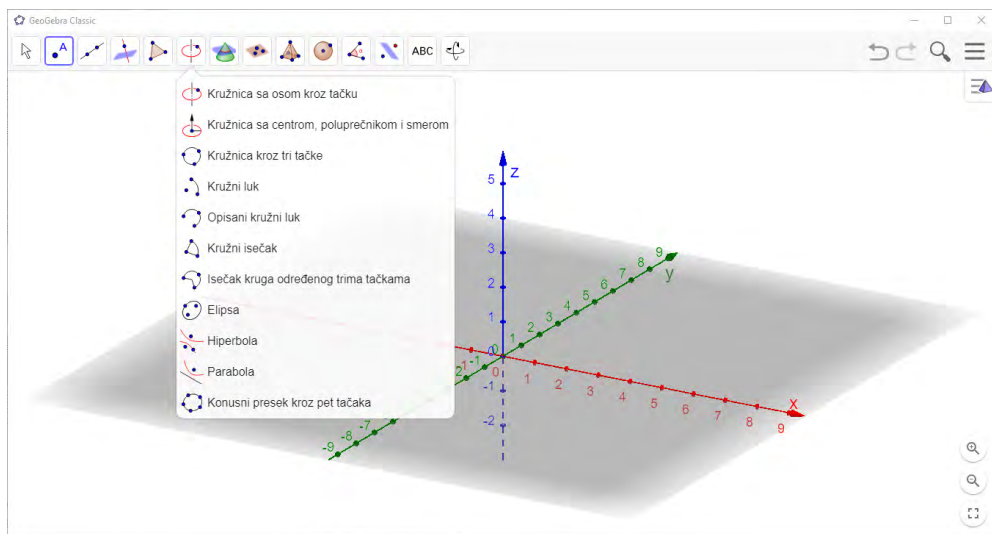
## 1.5. Геогедра алати за рад са тродимензионалним објектима

Када се у главном менију у картици *Prikaz* изабере опција *Površina za crtanje 3D* Геогедра пружа могућност рада са тродимензионалним објектима (Слика 25). Том приликом се у траци са алатима, поред постојећих, појављују и нови алати за рад са тродимензионалним објектима. Ради једноставнијег рада, корисник може активирати приказ координатне мреже, или деактивирати приказ координатних оса и равни које се аутоматски приказују.



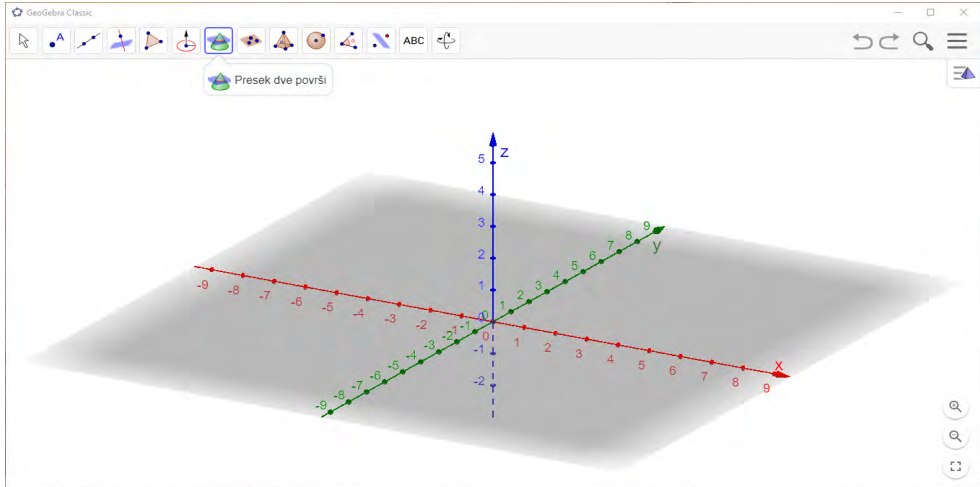
Слика 25. Радно окружење за рад са 3D објектима

Групи алата за кружнице и лукове додата су два алата који пружају могућност цртања кружница у простору (Слика 26). Алат *Kružnica sa osom kroz tačku* служи за цртање кружнице у простору, уз претходно задату праву која представља осу кружнице и тачку кроз коју кружница пролази. Слично алату *Kružnica određena centrom i poluprečnikom* који је намењен цртању кружнице у равни, алат *Kružnica sa centrom, poluprečnikom i smerom* користи да се нацрта кружница у простору, када је унапред дефинисан центар кружнице и дужина полупречника. Остали алати су идентични алатима намењеним за рад у равни.



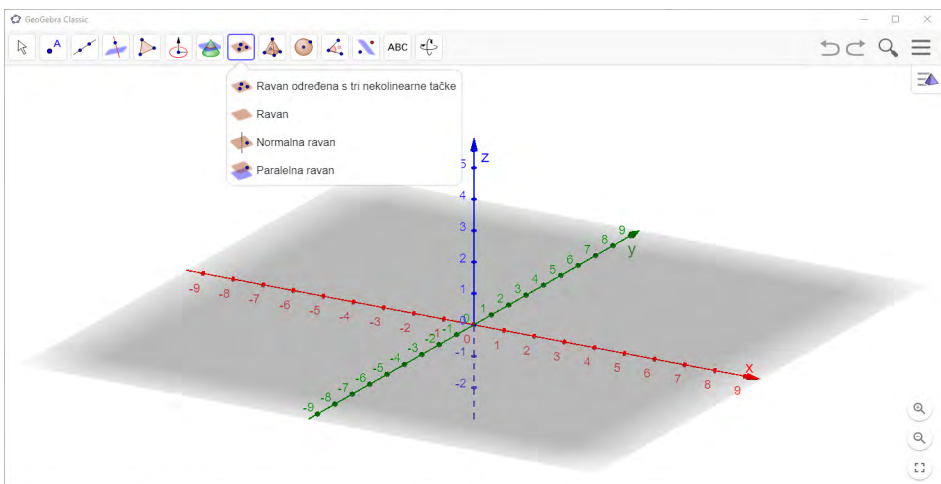
Слика 26. Алати за кружнице и лукове

Алат *Presek dve površi* намењен је за одређивање линије пресека две површи, било да су у питању две равни, два тела или раван и тело. За добијање линије пресека потребно је након избора алата одабрати жељене објекте и уколико постоји појавиће се линија пресека.



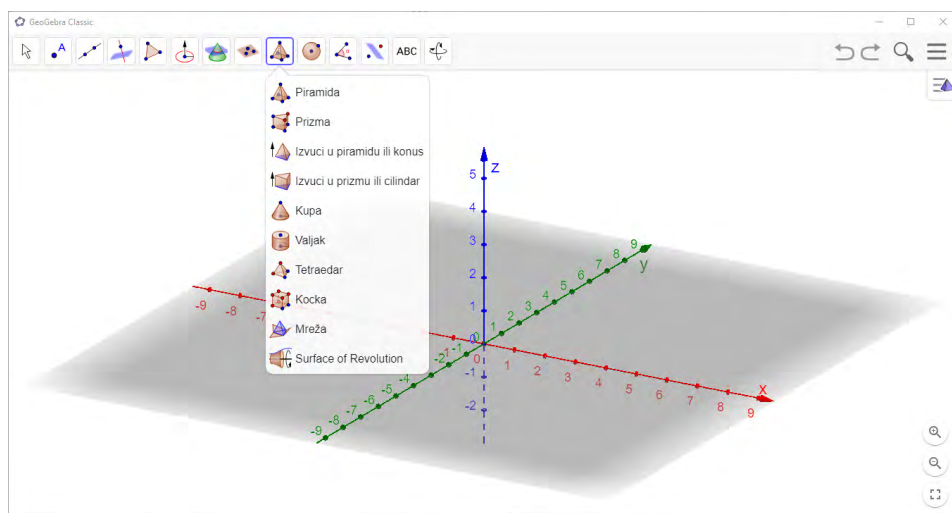
Слика 27. Алат за одређивање пресека две површи

Група алата намењена раду са равнима приказана је на Слици 28. Избором алата *Ravan odredena s tri nekolinearne tačke* а затим означавањем три тачке кроз које се не може повући једна права генерише се раван одређена тим тачкама. На сличан начин, одабиром алата *Ravan* и три неколинеарне тачке, праве и тачке ван ње, две паралелне праве или многоугла, креира се раван одређена неким од поменутих објеката. Коришћењем алата *Normalna ravan* добија се раван која садржи означену тачку и нормална је на дату праву. Слично, уз помоћ алата *Paralelna ravan* настаје раван која садржи дату тачку и паралелна је датој равни.



Слика 28. Алати за рад са равнима

Група алата за рад са геометријским телима садржи укупно десет алата (Слика 29). Алат *Piramida* служи за цртање пирамиде. Након његовог избора, прво треба одабрати или нацртати темена многоугла који ће представљати основу, а затим и изабрати тачку која ће бити врх пирамиде. Аналогно, за цртање призме треба активирати алат *Prizma* и одабрати/нацртати многоугао који ће чинити доњу основу и једно теме које ће припадати горњој основи призме. Уз помоћ једног од алата *Izvuci u piramidu ili konus* или *Izvuci u prizmu ili cilindar* постојећем многоуглу може се придружити пирамида или призма која за основу има дати многоугао, односно кружници се може придружити конус или цилиндар који за основу има дату кружницу.

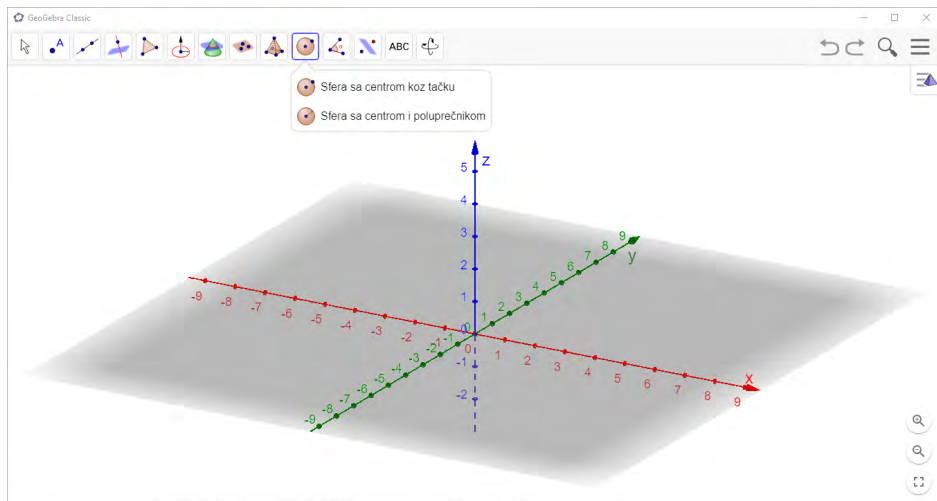


Слика 29. Алати за рад са геометријским телима

Уз помоћ алата *Купа* и две тачке (једна представља центар основе купе, а друга врх) а затим уносом дужине полупречника круга који чини основу настаје купа задатих димензија. Слично, избором алата *Valjak* и две тачке које ће представљати центар доње и горње основе, као и полупречника основа добија се ваљак. Тетраедар се може нацртати избором алата *Tetraedar* а затим означавањем или цртањем двеју тачака које се налазе у истој равни, при чему ће се једна од страна тетраедра налазити у тој равни. Слично, одабиром алата *Kocka* и двеју тачака настаје коцка са дужином ивица једнаком растојању изабраних двеју тачака. Уколико треба приказати мрежу полиедра, избором алата *Mreža* а затим означавањем жељеног објекта приказује се мрежа површи полиедра. У исто време, у алгебарском делу софтвера креира се клизач уз помоћ којег је могуће управљати процесом настанка мреже полиедра. Последњи алат *Surface of Revolution* служи да се добије приказ површи која настаје ротацијом жељеног графика функције или неког другог објекта око  $x$ -осе за  $360^\circ$  или мање.

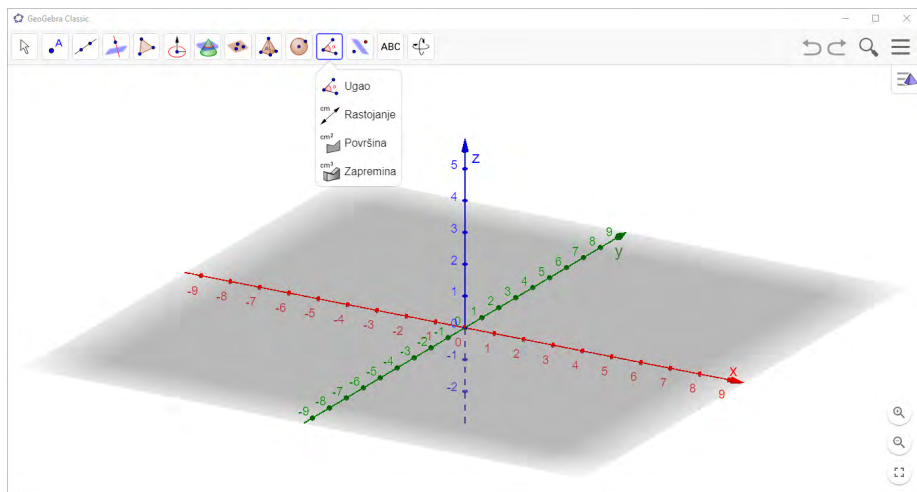
Група алата намењена за рад са тродимензионалним објектима допуњена је и са два алата предвиђена за рад са сферама (Слика 30). Цртање сфере омогућава

алат *Sfera sa centrom kroz tačku*. Избором алата, потом одабиром/цртањем тачке која ће представљати центар и тачке која ће се налазити на сфери настаје сфера, док се уз помоћ алата *Sfera sa centrom i poluprečnikom* може нацртати сфера задавањем тачке за центар и уносом дужине полупречника сфере.



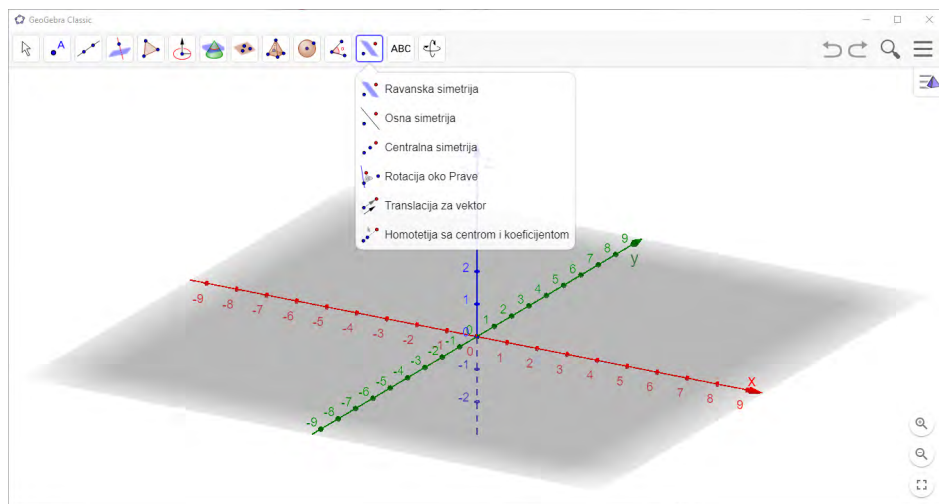
Слика 30. Алати за рад са сферама

Активирањем дела софтвера за рад са 3D објектима листа алата који служе за различита мерења бива редукована, док са друге стране постају доступни неки нови алати (Слика 31). Уз алат који користи за одређивање површине изабраног многоугла или дела равни ограниченог кружницом или елипсом, постаје доступан и алат *Zapremina* након чијег избора треба кликнути на жељени тродимензионални објекат и вредност запремине се појављује у виду текста у графичком приказу, као и у алгебарском делу софтвера.



Слика 31. Алати за мерење

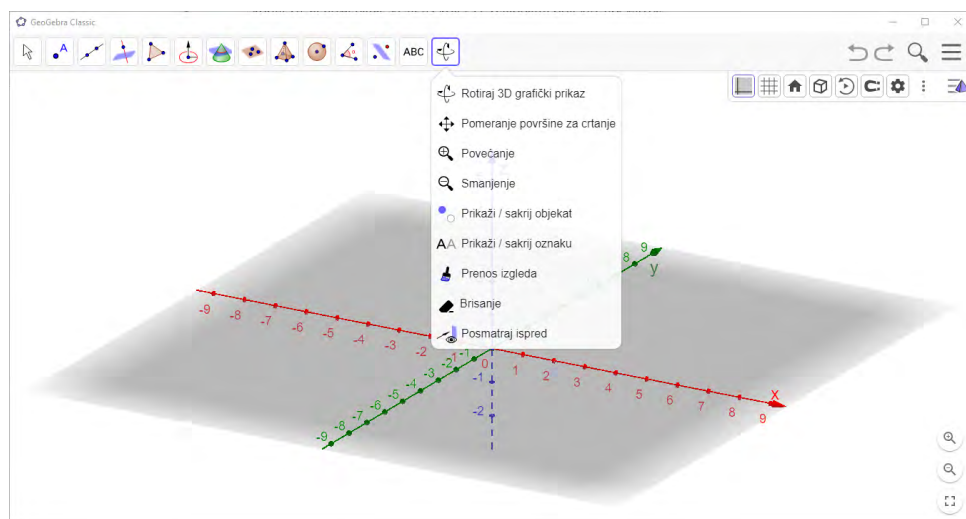
И листа алата за трансформације је проширена увођењем два нова алата (Слика 32). Избором алата *Ravanska simetrija* а затим означавањем објекта и равни симетрије креира се објекат симетричан датом. Аналогно као и код осне симетрије, уколико се изврши промена објекта који се слика раванском симетријом, долази и до промене слике настале овом изометријом. Следећим алатом, *Rotacija oko prave*, врши се ротација изабраног објекта око дате праве за задати угао.



Слика 32. Алати за трансформације

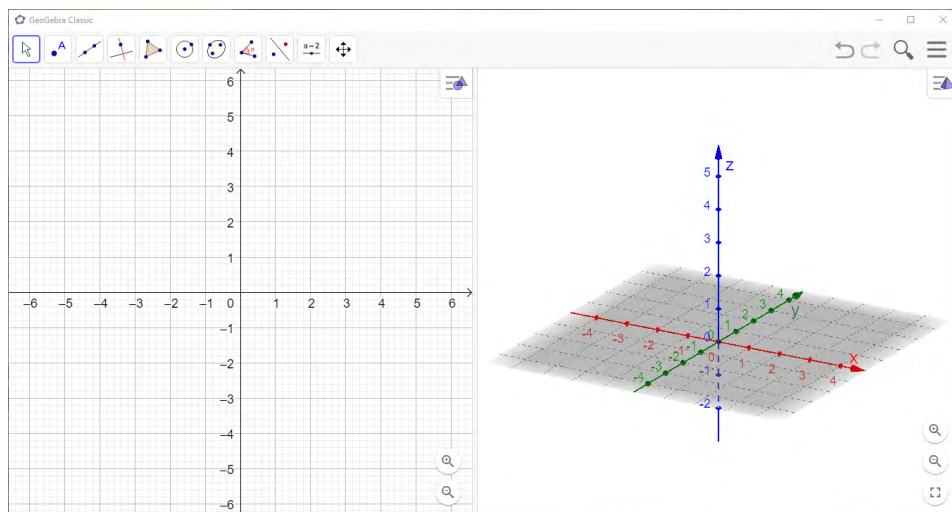
Поред набројаних, доступни су и додатни општи алати који олакшавају праћење промена насталих у делу намењеном за рад са 3D објектима (Слика 33). Избором *Rotiraj 3D grafički prikaz* а затим притиском на леви тастер миша могуће је заротирати читав координатни систем, чиме је у великој мери олакшано уочавање свих елемената и карактеристика тродимензионалног објекта. Алат *Posmatraj ispred* користи за померање угла из којег се одабрани објекат посматра, чиме се такође омогућава лакша визуелизација нацртаних геометријских тела.

Захваљујући палети додатних алата која се појављује у горњем десном углу (Слика 33), могуће је вршити различита подешавања радне површине, слично као у делу софтвера за рад са објектима у равни. Могуће је укључити/искључити приказивање координатних оса, координатне мреже, вратити приказ радне површине на почетни положај, изабрати тип пројекције, ротирати објекат тако да се може видети са свих страна (помоћу клизача који се појављује испод алата могуће је подесити брзину ротације) и др.



Слика 33. Општи алати

Посебно треба истаћи могућност вишеструке репрезентације, односно истовременог приказа радног окружења за рад са објектима у равни и дела софтвера намењеног раду са тродимензионалним објектима (Слика 34). С обзиром да су прикази међусобно повезани, да промене у једном приказу доводе до одговарајућих трансформација истог објекта у другом приказу, знатно је олакшана визуелизација креираних објеката и праћење насталих промена.



Слика 34. Приказ радних окружења за рад са 2D и 3D објектима

Све карактеристике Геогедбра софтвера, његови делови и алати, чине да рад у таквом динамичном окружењу буде поједностављен како би пажња ученика била усмерена искључиво на приказани садржај. Имајући на уму да су садржаји геометрије обухваћени почетном наставом математике најчешће апстрактни за ученике, јавља се оправдана потреба да се ти садржаји учине блиским ученицима, очигледним и визуелно пријемчивим. Из такве потребе проистекла је наша намера да истражимо да ли и у којој мери софтвер Геогедбра може помоћи ученицима млађих разреда основне школе у превазилажењу препрека са којима се сусрећу при усвајању почетних геометријских садржаја. Желели смо да истражимо на који начин софтвер, омогућавајући истакнуту очигледност при раду са геометријским објектима, утиче на њихову лакшу визуелизацију и да ли примени софтвера треба дати предност у односу на традиционално коришћење манипулативних наставних средстава.



## 2. ПОЧЕТНА НАСТАВА ГЕОМЕТРИЈЕ

### 2.1. Геометрија и почетна настава математике

Циљ и задаци наставе су начелни и глобални и они представљају претпоставке укупног образовно–васпитног рада. Они произлазе из вредности које су значајне за одређено друштво, а васпитање у духу одређених вредности представља решење за одређивање циљева васпитања и образовања. Кроз историју па све до данашњих дана, у различитим друштвима постојале су разлике како у односу на садржај циљева, тако и у односу на методе њиховог остваривања. На највишем нивоу обично се формулише један глобални, најопштији циљ који представља образовни идеал одређеног друштва. Тај циљ одражава најзначајније друштвене захтеве према личности – друштвену обавезу према образовању.

*Стратегијом развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године* представљени су циљеви дугорочног развоја образовања. У складу са тим циљевима, циљ учења предмета Математика јесте „да ученик, овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основе апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за даљи развој математичких појмова” (*Правилник о плану и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017: 74). Основ за постизање овако формулисаног циља представљају пажљиво одабрани и адекватно методички обликовани садржаји предвиђени програмима наставе математике.

Математика је дуго била синоним за геометрију. Премда постоје и друге гране математике, упоређујући облике, предмете и њихове везе геометрија омогућава да боље разумемо свет који нас окружује. Она даје посебан допринос разумевању, интеракцији и дескрипцији средине у којој живимо и представља једну од најинтуитивнијих, најконкретнијих и најочигледнијих грана математике са којом ученици имају прилике да се сусретну током свог образовања (*The International Commission on Mathematical Instruction*, 1995).

Бајкул даје преглед разлога због којих геометрија треба да буде заступљена у настави математике (Baýkul, 2005):

- доприноси развијању критичког мишљења и решавања проблема;
- пружа основ за подучавање и учење других области математике, користи се приликом увођења појма разломка, рачунских операција и др.;

- користи се у свакодневном животу (просторије, грађевински објекти, орнаменти за украшавање најчешће имају облике геометријских фигура);
- бројни су примери примене у науци и уметности (у физици, хемији, архитектури, сликарству користе се облици и својства геометријских фигура);
- омогућава ученицима да стекну свест о свету у којем живе;
- може представљати средство које ће мотивисати ученике да заволе математику (танграм, симетрична пресликавања, ротације, транслације и др.).

Резултати наставе геометрије могу бити достигнути само ако се наставом развија интелект ученика. Настава геометрије значајна је са различитих аспеката (Глејзер, 1996): 1) *логичкој* – изучавање геометрије представља извор и средство активног интелектуалног развоја човека и његових менталних способности; 2) *сазнајној* – уз помоћ геометрије дете упознаје свет који га окружује, спознаје његове просторне и количинске односе; 3) *примењеној* – тродимензионална еуклидска геометрија је основа која обезбеђује спремност човека за савладавање како блиских области тако и многих професија, чини му доступним непрекидно образовање и самообразовање; 4) *историјској* – на примерима из историје развоја геометрије прати се не само развој математике, већ и људске културе у целини; 5) *филозофској* – геометрија помаже да се осмисли свет у којем живимо, да се код човека формирају развојне научне представе о реалном физичком простору.

У програмима математике за основну школу садржаји геометрије заузимају значајан део. Почињу на опажајном нивоу, а затим помоћу њихових иконичних представа и кроз вербално изражавање садржаји постају све више апстрактни. Њиховим учењем ученици су у прилици да увиде линију резоновања, прецизног изношења својих ставова и доказивање основних концепата. Зато се поставља питање адекватне методичке трансформације и репрезентације садржаја геометрије у млађим разредима основне школе. Да би се постигла адекватна репрезентација, није довољно користити само скице нацртане на папиру или табли. Садржаји који се на тај начин уводе изгледају веома удаљени од свакодневног живота ученика, због чега они геометрију и доживљавају као веома тешку за учење (Soedjadi, 1991).

*Програмом наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* предвиђени су следећи геометријски садржаји: просторне релације; величина предмета и бића; геометријска тела: лопта, коцка, квадар, ваљак, пирамида и купа; геометријске фигуре: круг, правоугаоник, квадрат и троугао; права, крива и изломљена линија; затворена и отворена линија; тачка и линија; дуж; мерење дужине нестандартним јединицама мере. У оквиру наведених садржаја очекује се да на крају првог разреда ученик буде у стању да: одреди међусобни положај предмета и бића и њихов положај у односу на тло; упореди предмете и бића по величини; уочи и именује геометријске облике предмета из непосредне околине; именује геометријска тела и фигуре; групише предмете и бића са заједничким

својством; сложи/разложи фигуру која се састоји од познатих облика; разликује: криву, праву, изломљену, затворену и отворену линију; црта праву линију и дуж помоћу лењира; измери дужину задатом, нестандартном јединицом мере; пре-слика тачке и фигуре у квадратној мрежи на основу задатог упутства (*Правилник о њлану и њројраму настјаве и учења за њрви разред основној образовања и васѡи-ѡања*, 2017). Програмом је предвиђено да се, од укупно 180 часова колико изно-си годишњи фонд за наставу математике, оквирно 34 часа (око 19%) утросе за усвајање геометријских садржаја. Садржаји програма обухватају пропедевтичко упознавање геометријских тела и фигура (најпре лопте и коцке, затим квадра и ваљка, а касније пирамиде и купе). На овом нивоу ученици геометријске фигуре упознају као целине. Препознају их само по облику, а не по карактеристичним својствима. Ученици фигуре препознају по спољашњем изгледу, што чини осно-ву за формирање представа о геометријским фигурама. Издвајањем једне стране тродимензионалних тела, уводе се фигуре у равни (квадрат, правоугаоник, круг и троугао). Врсте линија уводе се као ивице претходно уведених геометријских облика. Појам тачке уводи се као пресек две линије, док дуж представља део пра-ве ограничен двома тачкама. Програм предвиђа упознавање ученика са појмом мерења дужине, без увођења стандардних мерних јединица. Ученици врше ме-рење користећи се нестандартним јединицама мере и пребројавањем јединичне мере. Уче да прикажу резултат мерења и упореде дужине.

*Пројрам настјаве и учења за друѡи разред основној образовања и васѡиѡања* обухвата следеће садржаје који се односе на област геометрије: дуж, права и по-луправа; тачка и права; отворена и затворена изломљена линија; графичко надо-везивање дужи; дужина изломљене линије; обим геометријских фигура без упо-требѡ формула; цртање правоугаоника, квадрата и троугла на квадратној мрежи, на тачкастој мрежи; симетричне фигуре; подударност фигура (интуитивно); ме-рење дужине стандардним мерним јединицама (m, dm, cm) (*Правилник о ѡлану и ѡројраму настјаве и учења за друѡи разред основној образовања и васѡиѡања*, 2018). За крај другог разреда програм наставѡ и учења настоји да, ослањајући се на по-стојећа искуства и знања из претходног разреда, кроз следеће исходе процени да ли је ученик у стању да: разликује дуж, полуправу и праву; одреди дужину изло-мљене линије (графички и рачунски); одреди обим геометријске фигуре; нацрта правоугаоник, квадрат и троугао на квадратној мрежи и тачкастој мрежи; уочи подударне фигуре на датом цртежу; уочи симетричне фигуре; допуни дати цртеж тако да добијена фигура буде симетрична у односу на дату праву; изрази дужину у различитим јединицама за мерење дужине; измери дужину дужи и нацрта дуж дате дужине. У оквиру годишњег фонда часова Математике, програм даје ори-јентациони предлог од 29 часова (око 16%) предвиђених за изучавање геометриј-ских садржаја. Ученици се упознају за појмом дужине изломљене линије и кроз адекватне активности врше израчунавање обима геометријске фигуре (троугла, квадрата и правоугаоника) без коришћења обрасца. Цртају геометријске фигуре

(квадрат, правоугаоник и троугао) на квадратној, односно тачкастој мрежи. Упознају се са појмом подударности на нивоу интуиције. Овладавају коришћењем стандардних мерних јединица за дужину (метром, дециметром и центиметром) у практичним активностима и врше претварање мерних јединица.

*Програма наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* предвиђа да током школске године ученици савладају следеће садржаје геометрије: узајамни положаји правих (паралелне праве и праве које се секу); угао, врсте углова; троугао, врсте троуглова; кружница и круг; правоугаоник и квадрат; обим троугла, квадрата и правоугаоника; цртање паралелних и нормалних правих помоћу лењира; конструкције троугла и кружнице; пресликавање геометријских фигура на квадратној мрежи; мерење дужине (mm, km); мерење површине геометријских фигура задатом мером (*Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019). Ради ефикаснијег остваривања програма наставе формулисани су исходи који указују на то да ће ученик по завршетку трећег разреда бити у стању да са успехом: црта паралелне и нормалне праве, правоугаоник и квадрат; конструише троугао и круг; именује елементе угла, правоугаоника, квадрата, троугла и круга; разликује врсте углова и троуглова; одреди обим правоугаоника, квадрата и троугла применом обрасца; опише особине правоугаоника и квадрата; преслика геометријску фигуру у квадратној или тачкастој мрежи на основу задатог упутства; користи геометријски прибор и софтверске алате за цртање; чита, упоређи и претвара јединице за мерење дужине, масе, запремине течности и времена; упоређи величине (дужину); измери површину геометријске фигуре задатом јединицом мере (правоугаоником, квадратом и троуглом); примењује концепт мерења у једноставним реалним ситуацијама. Програмом је предвиђено да се у оквиру истог броја часова математике на годишњем нивоу као и у претходним разредима, 35 часова (око 19%) определи за изучавање садржаја геометрије. Планирано је да се ученици, ослањајући се на већ уведене појмове, упознају са међусобним односима правих у равни, да на темељу већ упознатих геометријских фигура уочавају различите углове, а нормалност две праве уводи се преко појма правог угла. Ученици се упознају са појмом круга и кружнице, као и њиховим елементима (центром, полупречником, пречником), затим врше класификацију врста троуглова у односу на дужине страница и конструисање када су познате дужине свих страница. Обим фигура (квадрата, правоугаоника, троугла) израчунава се са или без употребе обрасца, а уводи се и трансформација једноставних геометријских фигура. Претходно научене стандардне мерне јединице за дужину (центиметар, дециметар и метар) проширују се појмовима милиметра и километра и врши претварање вишеимених бројева у једноимене и обрнуто. Са појмом површине и њеног мерења ученици се упознају кроз решавање једноставних проблема поплочавања површи датом површи (квадратом, правоугаоником или троуглом), без увођења стандардних јединица мере.

Програм препоручује коришћење информационо–комуникационих технологија (ИКТ) и различитих облика образовног софтвера који развијају логичко–комбинаторно мишљење. За садржаје геометрије, упућује на употребу Геогембре за развијање основних геометријских појмова (за цртање троугла, праве кроз две тачке, кружнице).

*Програм наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* прописује да се ученици упознају са следећим садржајима који се односе на геометрију и мерење геометријских величина: квадар и коцка; мерење површине ( $m^2$ ,  $dm^2$ ,  $cm^2$ ,  $mm^2$ ,  $km^2$ , ha, a); површина квадрата и правоугаоника; површина квадра и коцке; мерење запремине ( $m^3$ ,  $dm^3$ ,  $cm^3$ ,  $mm^3$ ); запремина квадра и коцке (*Правилник о плану и програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања*, 2019). Поред садржаја, у програму су формулисани и исходи према којима ученик на крају четвртог разреда треба да: именује елементе и опише особине квадра и коцке; црта мреже и прави моделе квадра и коцке; препозна сликовну представу изгледа тела посматраног са различитих страна; прочита, упореди и претвори јединице за мерење површине и запремине; израчуна површину квадрата и правоугаоника; израчуна површину и запремину квадра и коцке; реши проблемске задатке у контексту мерења. Од укупно 180 часова наставе математике у четвртом разреду, за садржаје геометрије мерења геометријских величина предвиђено је 40 часова (око 22%). У четвртом разреду инсистира се на геометрији облика и геометрији мерења (мерења површине површи). Анализом геометријских тела заокружује се прва етапа учења геометрије. Централно место заузимају коцка и квадар, а врши се и повезивање важних геометријских појмова из претходних разреда (фигура, линија, тачка, страна, ивица, теме, паралелност, нормалност, подударност). Својства геометријских тела коцке и квадра повезују се са квадратом и правоугаоником, са акцентом на одговарајућим везама и формирању мрежа површи коцке и квадра. Након обнављања одговарајућих стандардних мерних јединица са којима су се ученици упознали у претходним разредима, уводе се јединице мере за површину и запремину. Врши се претварање мерних јединица, вишеимених бројева у једноимене и обрнуто, као и упоређивање величина датих у истим или различитим мерним јединицама. Уводи се формула за израчунавање површине фигуре и повезује са поплочавањем површи датом површи, са којим су се ученици раније срили. На овај садржај надовезује се изградња појма површине геометријских тела (квадра и коцке) и увођење одговарајућих формула, док се аналогно са развијањем појма површине уводи и појам запремине коцке и квадра.

На основу садржаја геометрије који су обухваћени програмима наставе и учења у прва четири разреда основне школе и њиховог распореда и са циљем бољег разумевања геометријских али и других математичких појмова са којима се ученици сусрећу у даљем школовању, одређени су и дефинисани стандарди образовања. На основама *Образовних стандарда за крај обавезног образовања*

2011. године донети су *Ойшійи сїандарди йосїїїнућа – образовни сїандарди за крај йрвої циклуса обавезної образовања* за три наставна предмета: Српски језик, Математику и Природу и друштво.

У оквиру почетне наставе математике садржани су стандарди за области: Природни бројеви и операције са њима, Геометрија, Разломци и Мерење и мере, и у оквиру сваке области описани су захтеви на три нивоа (*Ойшійи сїандарди йосїїїнућа – образовни сїандарди за крај йрвої циклуса обавезної образовања – Маї҃емаї҃ика*, 2011). Садржаји који се према општим стандардима постигнућа налазе у оквиру области Геометрија по нивоима јесу следећи:

- на основном нивоу ученик уме да именује геометријске објекте у равни (квадрат, круг, троугао, правоугаоник, тачка, дуж, права, полуправа и угао) и уочава међусобне односе два геометријска објекта у равни (паралелност, нормалност, припадност); зна јединице за мерење дужине и њихове односе; користи поступак мерења дужине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица; користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица;
- на средњем нивоу ученик уочава међусобне односе геометријских објеката у равни; претвара јединице за мерење дужине; зна јединице за мерење површине и њихове односе; уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама; уме да израчуна површину квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама; препознаје мрежу коцке и квадра и уме да израчуна њихову површину када су подаци дати у истим мерним јединицама;
- на напредном нивоу ученик претвара јединице за мерење површине из већих у мање; уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника; уме да израчуна површину квадрата и правоугаоника; уме да израчуна обим и површину сложених фигура у равни када су подаци дати у истим мерним јединицама; уме да израчуна запремину коцке и квадра када су подаци дати у истим мерним јединицама.

Исходи наставе геометрије конкретније су одређени у смислу садржаја, у односу на образовне стандарде постигнућа. Образовни стандарди дефинисани су пре доношења новог програма наставе математике, па из тог разлога постоје извесна ограничења која образовни стандарди са собом носе. Са друге стране, исходи дефинисани за сваки разред понаособ указују на то која су специфична знања и вештине који су ученику неопходни за даље учење геометрије и других математичких појмова у даљем образовању.

У млађим разредима основне школе ученици формирају основне појмове геометрије и праве добру основу за учење и надоградњу ових садржаја у каснијем школовању. Та чињеница пред учитеља поставља важан задатак да направи

што стабилнију основу за учење ових појмова, што није лак посао. Значајан део садржаја геометрије карактерише велика апстрактност, а неке геометријске појмове тешко је представити на очигледан начин (појам тачке, праве, полуправе, угла и др.). Оно што још карактерише садржаје геометрије јесте да су међусобно условљени, јер формирање једног појма зависи од тога да ли је појам на који се тај појам ослања формиран. То је један од разлога зашто ученици постижу слабије резултате у учењу садржаја геометрије. Стога је оправдано свако разматрање питања који методички приступ води ка формирању стабилних основа геометрије у млађим разредима основне школе, односно остваривању исхода. То питање је и централно питање овог рада и покушај да се креира приступ учењу садржаја геометрије, о чему ће у наредним поглављима бити речи.

## 2.2. Постигнућа ученика из геометрије на крају првог циклуса обавезног образовања

Једна од полазних основа за утврђивање тренутне ситуације и будуће промене приступа у реализацији садржаја геометрије јесте сагледати нивое постигнућа ученика кроз резултате које остварују на националним и међународним тестирањима у којима су у претходном периоду учествовали ученици из Републике Србије.

У оквиру пројекта *Развој школства у Републици Србији* Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања реализовао је 2006. године Национално тестирање ученика четвртог разреда основне школе на репрезентативном узорку ученика. Циљ истраживања био је да се утврде постигнућа ученика у оквиру предмета Српски језик и Математика и идентификује утицај који поједини фактори остварују на њихова постигнућа. Узорак је чинило 5120 ученика, а испитивање је обављено у мају 2006. године. У оквиру предмета Математика ученици су били тестирани из следећих области: *Природни бројеви, Операције са природним бројевима, Геометрија, Разломци, Решавање проблема из свакодневне животице*. Како би резултате добијене истраживањем било могуће поредити са другим образовним системима, у примењеним тестовима се налазио и одређени број задатака из TIMSS истраживања (*Trends in International Mathematics and Science Study*).

За област *Геометрија* дефинисано је неколико дескриптора, и то: ученик препознаје и именује геометријске фигуре и уочава њихове једноставне међусобне односе; уочава међусобне односе геометријских фигура; уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника и да израчуна површину квадрата и правоугаоника када су сви потребни подаци експлицитно дати и у истим мерним јединицама; уме да израчуна обим и површину сложених фигура (троугла и квадрата, квадрата и правоугаоника итд.); уме да израчуна површину коцке и

квадра; препознаје и црта мрежу коцке и квадра; разуме поступак мерења дужине и површине и користи одговарајуће јединице; уме да рачуна дужине, обиме и површине фигура када су подаци задати у различитим мерним јединицама; користи одговарајуће јединице и познаје њихове односе (Чапрић, 2007).

Ученици су остварили просечно постигнуће од 59,5% тачно решених задатака од укупног броја задатака задатих тестом, са медијаном од 62,1%. Са друге стране, укупна постигнућа ученика у области *Геометрија* износила су 47,57%, односно, посматрано према претходно формулисаним дескрипторима: 62,9% ученика који су учествовали у истраживању уме да препозна и именује геометријске фигуре и уочи једноставније међусобне односе датих фигура; 27,2% испитаника у стању је да уочи међусобне односе геометријских фигура; 46,3% уме да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника и да израчуна површину поменутих четвороуглова када су сви потребни подаци дати у истим мерним јединицама; 23,3% оспособљено је да израчуна обим и површину сложене фигуре; 51,0% уме да израчуна површину геометријских тела коцке и квадра и може да препозна и нацрта њихову мрежу; 72,1% тестираних ученика разуме поступак мерења дужине и површине и оспособљено је за коришћење одговарајућих мерних јединица; 41,5% у стању је да израчуна дужине и површине фигура чије су димензије дате у различитим јединицама мере, при чему користе одговарајуће јединице и познају међусобне односе тих јединица.

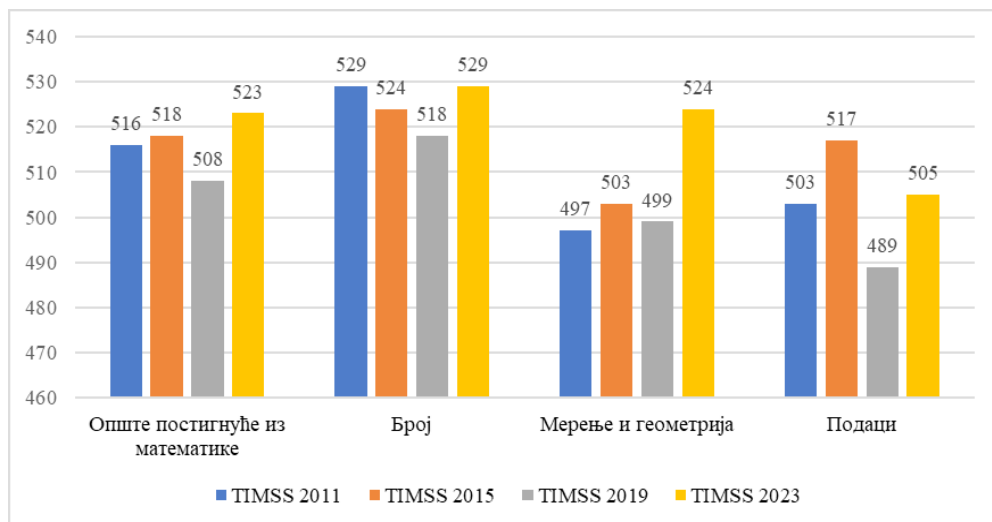
Ако постигнућа ученика који су учествовали у тестирању из области *Геометрија* упоредимо са постигнућима из других области, приметимо да су најнижа. Постигнућа ученика из области *Природни бројеви* и *Операције са природним бројевима* (68,34% и 66,29%) и области *Разломци* и *Решавање проблема из свакодневне животне* (57,28% и 61,20%) прилично су уједначена, а из геометрије су знатно нижа. Овај закључак потврђују и међународна истраживања. Наиме, уочено је да су постигнућа ученика из Србије у садржинском домену геометрије слабија у поређењу са укупним постигнућима оствареним из математике (Гашић–Павишић и Станковић, 2012; Марушић Јаблановић, Гутвајн и Јакшић, 2017).

TIMSS је један од два међународна пројекта евалуације знања у којем учествују и ученици из Србије. Носилац TIMSS истраживања јесте Међународна асоцијација за евалуацију образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA). Истраживања се реализују почев од 1995. године у циклусима од четири године и за предмет имају тестирање постигнућа ученика из математике и природних наука. Постигнућа ученика тестирају се у четвртој и осмој разреду основне школе. Србија је први пут узела учешће у циклусу TIMSS 2003, а у циклусима TIMSS 2011, TIMSS 2015, TIMSS 2019 и TIMSS 2023 учествовала је у испитивању постигнућа ученика четвртог разреда. Тестирање је конципирано у односу на две димензије – садржајну и когнитивну. Димензија садржаја односи се на математичке садржаје организоване у

три области: *Број*, *Геометрија* и *Приказ њогаџака*, док се когнитивна димензија односи на сазнајне захтеве који се срећу у задацима, у оквиру сваке области садржаја. Издвојена су три засебна когнитивна подручја: знање (познавање чињеница, појмова и процедура), примена знања и закључивање/резонovanje (укључује решавање сложенијих проблема).

У истраживачким циклусима TIMSS 2011 и TIMSS 2015 област *Број* чинила је 50% укупног броја задатака у тесту, док су области *Геометрија* и *Приказ њогаџака* заступљене у 35%, односно 15% задатака. У циклусима TIMSS 2019 и TIMSS 2023 дошло је до одређених промена у вези са темама *Геометрија* и *Приказ њогаџака* како би садржаји тестова у што већој мери одражавали националне планове и програме. Тако, задаци из области *Мерење и Геометрија* чинили су 30%, а задаци из области *Погаџи* 20% укупног броја задатака. Посматрано у односу на број часова који се у нашем образовном систему посвећује појединим областима почетне наставе математике, закључујемо да највећи део обухвата област *Број* (оквирно 79%), док преостали део наставног програма обухвата садржаје геометрије и мерења и мера (приближно 21%). Треба нагласити и да у нашем наставном програму приказ података није дефинисан као засебна област.

Међународни просек скале математичких постигнућа ученика на TIMSS 2011 испитивању износио је 500 бодова. Ученици из Србије остварили су средњу вредност од 516 бодова, што је статистички значајно изнад просека скале. У оквиру области *Број* просек постигнућа ученика износио је 529 бодова, *Приказ њогаџака* 503, а у оквиру области *Геометрија* 497 бодова, што је испод међународног просека скале (Графикон 1). Четири године касније, у истраживању TIMSS 2015 ученици из Србије остварили су просечно 518 бодова, што је такође статистички значајно изнад просека TIMSS скале. Са Графикона 1 може се уочити да је постигнуће ученика у области *Геометрија* најслабије. За разлику од TIMSS 2011 када су постигнућа ученика била испод просека TIMSS скале, 2015. године резултати су изнад међународног TIMSS просека, али 15 бодова испод просечних резултата ученика из Србије.



Графикон 1. Приказ постигнућа ученика из Србије на TIMSS тестирањима

Милинковић и сарадници запажају да постоји неуједначеност у познавању три области математичких садржаја које су обухваћене тестирањем TIMSS 2015, при чему је највећа разлика у доменима *Број* и *Геометрија* (Милинковић, Марушић Јаблановић и Дабић Борић, 2017). Они су у оквиру области *Геометрија* издвојили подобласт *Дводимензионални и тродимензионални облици*, у којој идентификују следеће теме: коришћење основних својстава како би се описали и упоредили геометријски облици у равни и простору; симетрија и ротација; повезивање тродимензионалних облика са њиховим дводимензионалним приказом; рачунање обима многоугла; рачунање површине квадрата и правоугаоника; процена површине и запремине геометријских фигура помоћу датих облика или помоћу коцки.

Резултати које су ученици остварили у коришћењу основних својстава геометријских облика у равни и простору, повезивању тродимензионалних облика са њиховим дводимензионалним приказом и рачунању обима многоугла, који су на нивоу изнад 50% оцењени су као очекивани, док су постигнућа ученика у задацима у вези са симетријом и ротацијом и израчунавањем површине квадрата и правоугаоника испод 50%. Један од разлога оваквих резултата може се пронаћи и у неподударању наставног програма у Србији и области дефинисаних у TIMSS студији, ако се узме у обзир да се коришћење елементарних својстава геометријских фигура, укључујући осну симетрију и ротацију, према програму не обрађују на овом нивоу обавезног образовања. Нижа постигнућа у вези са израчунавањем површине и запремине геометријских фигура могу се објаснити чињеницом да израчунавање запремине геометријских фигура у периоду тестирања није чинило саставни део програма наставе.

Издвојили су и подобласт *Тачке, линије и ујлови* и у њој идентификовали следеће теме: мерење и процена дужине; препознавање и цртање паралелних и нормалних правих; препознавање, поређење и цртање различитих врста углова (прави, оштри и тупи); употреба неформалног координатног система за лоцирање тачке у равни (Милинковић, Марушић Јаблановић и Дабић Боричић, 2017). У оквиру ове подобласти ученици су остварили просечно 48,8% тачних одговора. Притом, изузев мерења и процене дужине, у остале три теме ученици су имали исподпросечна постигнућа, иако само коришћење неформалног координатног система није саставни део важећих програма почетне наставе математике.

У оба циклуса TIMSS испитивања, 2011. и 2015. године, резултати ученика четвртог разреда из области *Геометрија* били су лошији од укупног просека ученика у Србији. Један од разлога могао би се пронаћи у времену које програми предвиђају за обраду одређених математичких садржаја. Већи број часова не утиче нужно и на постизање бољих резултата ученика, што потврђују садржаји који се односе на израчунавање површине квадрата и правоугаоника и препознавање, поређење и цртање различитих врста углова, који су обухваћени наставним програмом, па ипак резултати мерења постигнућа указују да ученици нису у довољној мери овладали овим садржајима.

На TIMSS 2019 тестирању просечна постигнућа ученика четвртог разреда из Србије када је математика у питању износе 508 поена и статистички су значајно виша од просека међународне скале који износи 500 поена. Иако изнад међународног просека, у поређењу са претходна два циклуса, 2011. и 2015. године, математичка постигнућа ученика 2019. године су значајно нижа – у односу на TIMSS 2015 чак 10 поена. У све три области обухваћене истраживањем (*Број, Мерење и геометрија* и *Подаци*) дошло је до пада постигнућа. За разлику од TIMSS 2015, када су у односу на остале области постигнућа ученика из области *Геометрија* била на најнижем нивоу, у циклусу TIMSS 2019 у домену геометрије може се запазити најмањи пад у броју поена у односу на претходни циклус. Просечна постигнућа ученика из геометрије у TIMSS 2019 лошија су у односу на претходно, TIMSS 2015 тестирање, али су исто тако и незнатно виша од постигнућа остварених осам година раније.

Оно што делује охрабрујуће јесу резултати TIMSS студије спроведене 2023. године, на којој су ученици из Србије остварили просечан резултат од 523 поена, што је знатно више од међународног TIMSS просека од 503 поена (Ранђеловић, Ђукић, Трдојевић и Марковић, 2024). У домену *Број* ученици су постигли 529 поена, што представља значајно виши резултат од TIMSS средишње тачке и указује на позитиван тренд у односу на резултате ученика из Србије остварене 2011, 2015. и 2019. године. У области *Мерење и геометрија* такође је забележен позитиван тренд и са оствареним резултатом од 524 поена представља статистички значајно виши ниво постигнућа у поређењу са просечним резултатима. Са друге

стране, у домену *Подаци* забележен је резултат од 505 поена, што посматрано према доменима садржаја представља најнижи резултат који су ученици из Србије остварили на TIMSS 2023. Овакве, најслабије резултате, можемо довести у везу са мањком заступљености садржаја из области *Подаци* у курикулуму, тј. у важећим програмима наставе и учења у млађим разредима основне школе.

Поређења ради, просечна постигнућа из математике ученика четвртог разреда из Хрватске на TIMSS 2019 тестирању (2023. године Хрватска није учествовала) готово су на истом нивоу као постигнућа ученика из Србије, али када се упореде постигнућа из домена геометрије њихови резултати су знатно виши (518 бодова наспрам ученика из Србије који су имали просечно 499 бодова). Глобално посматрано, овакви резултати само потврђују становиште да већи број часова намењених настави одређеног предмета није у директној повезаности са остваривањем бољих резултата (Naahr, Nielsen, Hansen & Jakobsen, 2005). Наиме, према плану и програму наставе математике у прва четири разреда основне школе у Хрватској предвиђено је по 140 часова годишње, док је у Србији тај број далеко већи – 180 часова. Оно што се може идентификовати као значајно за добра постигнућа ученика јесте процентуална заступљеност садржаја геометрије у оквиру броја часова предвиђених планом и програмом наставе. У хрватским школама у четвртом разреду основне школе 40% (око 55 часова) часова је предвиђено за изучавање геометрије, док је у образовном систему Републике Србије на нивоу од 20% (око 35 часова). Још један од фактора који остварује утицај на ниво ученичких постигнућа јесте и припремљеност учитеља за наставу. Добра организација, адекватна припрема и употреба различитих манипулативних средстава током часа могу поспешити развој математичког мишљења ученика и допринети постизању бољих резултата у међународним студијама.

### 2.3. Теоријска заснованост учења у почетној настави геометрије

Геометрија се може разматрати на два потпуно различита, а опет међусобно повезана начина. Први се односи на просторно резонување, обухвата начин на који ученици размишљају о облицима и простору и може се дефинисати као интуиција о облицима и међусобним односима које ти облици граде. Са друге стране, геометрија је неодвојива од визуелизације. Усискин издваја четири различите димензије геометрије: 1) визуелизација, која се односи на цртање и конструкцију фигура; 2) проучавање просторних аспеката физичког света; 3) геометрија као средство за репрезентацију математичких појмова и односа који нису визуелног карактера; 4) репрезентација као формално математички систем (Usiskin, 1987). Прве три наведене димензије неизоставно захтевају употребу просторног резонувања, док његовом развоју доприноси визуелизација у настави математике

и геометрије, остварена кроз графичко приказивање и коришћење различитих модела.

Други начин размишљања о геометрији разматрао је Џонс. Он наводи да је са порастом интересовања за геометријске идеје постало важно стећи јасну представу о природи и развоју геометријског мишљења (Jones, 1998). Повећање интересовања за геометрију везује за развој рачунарски потпомогнуте геометрије и софтверских пакета са акцентом на визуелизацији. Под визуелизацијом подразумева могућност стварања менталних слика облика у глави, и како нека трансформација утиче на промену тих облика. Од ученика очекује визуелизацију облика датих у две и три димензије, док свака додатна активност која захтева трансформацију облика у мислима доприноси даљем развоју способности визуелизације. Истичући улогу визуализације, Херкович развој геометријских појмова доводи у везу са нивоима Ван Хила, који је дао предлог пет хијерархиски постављених нивоа геометријског знања кроз које је неопходно да ученици прођу, почев од препознавања геометријских облика до извођења дедуктивних доказа (Van Hiele, 1986).

1. *Ниво визуелизације* – на основу перцепције, ученик препознаје геометријске фигуре (облика троугла, четвороугла, круга итд.), али му њихове особине нису познате; не врши класификације и изводи закључке на основу једног примера;
2. *Ниво описи и анализе* – ученик непотпуном индукцијом изводи закључке на основу неколико примера, види фигуру као скуп својстава усредсређивањем на облик унутар класе; када описује неку фигуру набраја све карактеристике, не успевајући да открије које су потребне а које довољне за њено описивање; још увек није у стању да користи дедуктивне начине закључивања;
3. *Ниво неформалне дедуције или ајсџиракџи или релациони ниво* – развијају се способности уопштавања које укључују навођење потребног и довољног услова, као и неки вид логичке аргументације; на пример, ученик зна да је квадрат четвороугао који има странице једнаких дужина и један прав угао; постоји могућност да ученик класификује геометријске фигуре на основу уочавања особина; почиње размишљати дедуктивно, али још увек не разуме правило формалног дедуктивног закључивања;
4. *Ниво формалне дедуције* – ученик може да препозна особине геометријских фигура, изводи средњошколске доказе помоћу исказа, разуме дефиниције и аксиоме, користи апстрактне појмове уз извођење закључака не интуитивним путем, већ заснованих на логици;
5. *Ријидноматематички ниво или ниво сџројосџи* – ученик резонује ослањајући се искључиво на дефиниције, аксиоме и теореме; јављају се разумевање геометријског система који није еуклидски и способност да се разуме индиректно доказивање путем коришћења контрапозиције.

Прелазак са једног нивоа геометријског знања на следећи условљен је структурама које су формиране на актуелном нивоу. Једном речју, прелазак са нивоа на ниво је инваријантан, односно пут до највишег нивоа води преко свих претходних, без могућности њиховог прескакања. За успешан прелазак са нивоа на ниво неопходна је поступност у стављању захтева пред ученике, али и у преласку са конкретног, очигледног, на појмове вишег нивоа апстракције. Сваки од поменутих пет нивоа карактеришу посебан језик, симболи и структура, при чему се у оквиру почетне наставе математике достижу нивои визуелизације и описа и анализе. Оно што карактерише ова два нивоа јесте именовање облика без одговарајућег објашњења, идентификација геометријских фигура и њихових односа уз изостанак логичког уређења јер ученици нису у стању да уоче суштинске везе међу објектима.

Клементс и Батиста предлажу увођење нултог нивоа – *пре-препознавање* (Clements & Battista, 1992). Ученици који се налазе на овом нивоу, због ограничене способности просторне визуелизације, нису у стању да разликују облике. Они опажају геометријске облике и формирају класе фигура на основу њихових визуелних карактеристика, у стању су да разликују квадрат и круг, али не и квадрат и троугао.

Гутиерез даје јаснији поглед на Ван Хиллове нивое геометријског мишљења. За сваки ниво идентификовао је одговарајући математички процес (Табела 1) (Gutiérrez, 2014). Дати табеларни приказ математичких процеса који карактеришу сваки ниво геометријског мишљења ученика пружа и јаснију оријентацију за поучавање и учење у настави геометрије и прецизније операционализовање исхода учења, што је посебно важно јер ће учење бити успешно само ако је у потпуности прилагођено когнитивним могућностима ученика.

Табела 1. Гутиерезова карактеризација математичког процеса према Ван Хиловим нивоима

| Карактеристике математичког процеса | Ниво описа и анализе             | Ниво неформалне дедукције              | Ниво формалне дедукције             | Ниво строгости                                          |
|-------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Препознавање и опис                 | Физичка својства                 | Математичка својства                   | /                                   | /                                                       |
| Употреба дефиниција                 | /                                | Само дефиниције једноставних структура | Било која дефиниција                | Прихватање неколико различитих еквивалентних дефиниција |
| Формулисање дефиниција              | Листа физичких својстава         | Листа математичких својстава           | Скуп потребних и довољних својстава | Доказивање еквивалентних дефиниција                     |
| Класификација                       | Заснована на физичким својствима | Заснована на математичким својствима   | Дефиниције се мењају                | /                                                       |
| Доказивање                          | /                                | Емпиријска провера путем примера       | Неформални дедуктивни докази        | Формални дедуктивни докази                              |

Како би ученици напредовали са једног на други ниво геометријског мишљења, Ван Хил предлаже и пет фаза учења сачињених од одговарајућих поступака. Ови поступци треба да пруже подршку ученицима у савладавању одређеног нивоа геометријског мишљења и прелазак на следећи. Фазе учења су следеће:

- *Фаза информисања*: ученици истражују и упознају се са предметом;
- *Фаза усмереној вођења*: ученици обављају одређене задатке како би кроз њих открили различите односе;
- *Фаза објашњавања*: ученици откривају односе и покушавају да објасне резултате претходног рада;
- *Фаза слободної усмеравања*: ученици примењују дотадашња знања за решавање сложенијих задатака добијених од учитеља;
- *Фаза интјерисања*: ученици резимирају претходна знања и размишљају о учењу са циљем запамћивања обрађене информације.

Да би достигли сваки од пет нивоа геометријског мишљења, ученици морају проћи кроз свих пет поменутих фаза учења. При преласку са актуелног на наредни ниво од ученика се захтева да претходне фазе учења понове на наредном нивоу мишљења. Такође, неким ученицима ће бити потребно и да кроз неке фазе прођу више пута како би стекли знања о одређеном појму, односно биће им потребно више времена како би прешли са тренутног на наредни ниво мишљења. То се поклапа са ставом Ван Хила да се прелазак са једног нивоа на следећи не одвија у кратком временском периоду.

Ван Хил истиче да фронтални облик рада и рецептивна настава заснована на пасивности и меморисању информација од стране ученика не доприносе напретку ученика. То су препоруке и Националног савета наставника математике (NCTM) – наставници математике морају се одрећи класичног модела наставе у корист реформски оријентисане наставе у којој су ученици активни учесници процеса учења (NCTM, 2000). У складу са тим, савремени токови наставе захтевају да активност ученика не буде манифестована само кроз разумевање излагања наставника, већ као сопствено учење и обрада садржаја, материјала, уз коришћење средстава очигледности и репрезентација објеката учења. У процесу учења ученици треба да износе претпоставке, истражују и доносе закључке као последицу сопствених активности. Да би у томе успели, мора се створити амбијент који подстиче и доприноси развоју когнитивног мишљења ученика.

Удемон и Кузниак сматрају да Ван Хилов приступ геометрији не омогућава разумевање препрека на које се наилази развијањем геометријског мишљења. Ослањајући се на научне револуције Куна које замењују старе парадигме новима и Гонсетове облике знања о простору (интуиција, експеримент и дедукција),

Удемон и Кузниак износе три парадигме у којима се огледају три приступа разумевању геометрије (Houdement, Kuzniak, 2003).

- *Геометрија I (природна геометрија)* представља реалност у којој су перцепције извори провере. Објекти *геометрије I* јесу материјални објекти, линије нацртане на листу папира или линије приказане на екрану рачунара. Оваква геометрија доминира наставом математике у основним школама, односно то је геометрија која је заступљена у почетној настави математике;
- *Геометрија II (природно–аксиоматска геометрија)* заснована је на хипотетичко–дедуктивним законима аксиоматског система. Аксиоме ове геометрије су у великој мери блиске реалности и интуицији. Објекти ове парадигме постоје само у дефиницијама, па и у случају ослањања на неке карактеристике реалности и објеката реалистичног света. На нивоу *геометрије II* требало би да се налазе учитељи и наставници математике у основној школи;
- *Геометрија III (формално–аксиоматска геометрија)* заснива се на аксиомама које нису базиране на осећају и у оквиру које долази до губљења везе са реалношћу. Одликује је формално и логичко закључивање као у *геометрији II*, уз потпун систем аксиома изузет од примене у реалности. Обавезно школовање у малој мери обухвата ову геометрију, а на овом нивоу налазе се наставници и студенти – будући наставници математике у средњој школи.

Три претходно изнете парадигме су хомогене, односно могуће је расуђивати унутар једне од њих без познавања карактеристика других. Оно што представља извор неразумевања непосредних учесника образовног процеса, ученика и учитеља, јесте што једни и други нису нужно смештени у истим парадигмама. Зарад лакшег превазилажења поменутих неразумевања Удемон и Кузниак дају табеларни преглед различитих аспеката геометријских парадигми (Табела 2) (Houdement, Kuzniak, 2003).

Ради објашњења промене парадигми и прелажења са једног на други ниво Ван Хила, Удемон и Кузниак креирају табелу која јасније приказује међусобни однос и интеракцију међу парадигмама (Табела 3) (Houdement, Kuzniak, 2003).

Табела 2. Аспекти геометријских парадигми

| Аспект            | <i>Геометрија I (ури-родна геометрија)</i>                            | <i>Геометрија II (ури-родно-аксиоматска геометрија)</i>   | <i>Геометрија III (формално-аксиоматска геометрија)</i> |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Интуиција         | Заснована на осећају, повезана са перцепцијом, подржана експериментом | Повезана са фигурама                                      | Интерна, у математици                                   |
| Искуство          | Повезана са мерљивим простором                                        | Повезана са схемама реалности                             | Ослања се на логику                                     |
| Дедукција         | Блиска реалности и повезана са експериментом                          | Базирана на аксиомама                                     | Базирана на потпуном систему аксиома                    |
| Врста простора    | Интуитивни и физички простор                                          | Физички и геометријски простор                            | Апстрактан Еуклидов простор                             |
| Статус слике      | Објект проучавања и провере                                           | Подршка резонувању и „фигуралном појму“ (Fischbein, 1993) | Схема теоријског објекта, хеуристички алат              |
| Повлашћени аспект | Очигледност и конструкција                                            | Својства и демонстрација                                  | Демонстрација и везе међу објектима; структура          |

Табела 3. Однос геометријских парадигми и Ван Хилових нивоа

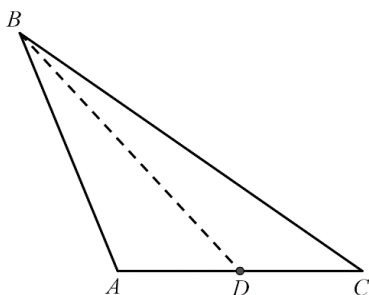
| Ниво геометријског мишљења<br>Ван Хила | Геометрија I | Геометрија II | Геометрија III | Објекти                                                |
|----------------------------------------|--------------|---------------|----------------|--------------------------------------------------------|
| Ниво 1<br>Визуелизација                |              |               |                | Емпиријско<br>поље (интуи-<br>ција и експе-<br>римент) |
| Ниво 2<br>Анализа                      |              |               |                |                                                        |
| Ниво 3<br>Неформална<br>дедукција      | Прелаз       |               |                | Теоретско<br>поље (дедук-<br>ција)                     |
| Ниво 4<br>Формална де-<br>дукција      |              | Прелаз        |                |                                                        |
| Ниво 5<br>Ниво строго-<br>сти          |              |               |                |                                                        |

Као што се из Табеле 3 може закључити, Ван Хиллов ниво 5 није део *геометрије II*. Када се јави у *геометрији I*, јавља се у виду префињене геометрије у којој алати развијени у *геометрији II* потврђују емпиријско искуство *геометрије I*. Осим тога, и хоризонти различитих парадигми су различити. Док *геометрију I* одликује технолошки хоризонт, *геометрију III* карактерише формални и структурни хоризонт. *Геометрија I* обухвата Ван Хиллове нивое 2 и 3 и припада емпиријском пољу, садржи интуицију, експеримент и дедукцију материјалних објеката, односно фокусира се искључиво на физичке аспекте разматраних објеката. *Геометрија II* садржи ниво 4 и обухвата дедукцију и аксиоматски систем. *Геометрија II* представља ниво прелаза у којој веза са реалношћу остаје важна. Ниво 5 садржан је у *геометрији III* у којој долази до губљења везе са реалношћу. Дакле, разлика у схватањима Ван Хила и Удемона и Кузника огледа се у томе што нивои геометријског мишљења представљају својеврсну хијерархију размишљања наспрам геометријских парадигми које настоје да одрже унутрашњу кохерентност и засноване су на хомогеним теоријама.

Оно што је од значаја за наставу геометрије јесу потешкоће које се могу јавити при прелазу између две геометријске парадигме. Ученици и учитељи најчешће се не налазе у истој парадигми, па та чињеница може представљати један од узрока потешкоћа. Наиме, ученици и садржаји наставе геометрије у основној школи налазе се на нивоу *геометрије I*, док би на нивоу *геометрије II* требало да се налазе њихови учитељи и наставници математике у основној школи.

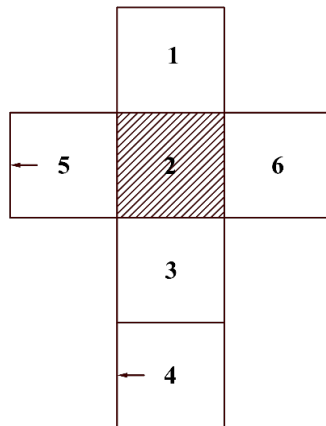
Фишбајн истиче двојну природу геометријских објеката, односно њихов *фигурални* и *појмовни* карактер (Fischbein, 1993). Обе компоненте објеката су уско повезане и чине да се разликују фигуре и цртежи. Под појмом цртежа подразумева се графички, материјализован приказ геометријског објекта. Цртежи одговарају фигуралном аспект геометријског објекта и понекад садрже и информације које нису од значаја (нпр. боја, дебелина линије). Како нисмо у могућности да геометријским објектима приступимо директно, најчешће их представљамо цртежима, односно додељујемо им значења и односе које граде са другим објектима. У *Теорији фигуралних појмова* (*The Theory of Figural Concepts*) Фишбајн наводи да се геометрија бави менталним сликама, такозваним геометријским фигурама, које у исто време одликују и појмовни и фигурални карактер. Као пример, Фишбајн наводи геометријску сферу која као и сваки прави појам има свој идеални модел, а поседује и фигурална својства (одређени облик). Управо због поменутих двоструке природе геометријских фигура Фишбајн их именује фигуралним појмовима, јер се идеални апсолутно савршени модели геометријских фигура не могу наћи у стварности. Троугао, круг, квадрат, тачка, линија, раван, и уопште све геометријске фигуре представљају менталне слике које поседују и појмовни и фигурални карактер. Модели или цртежи геометријских фигура само су материјализовани приказ менталних слика које не могу постојати у стварности.

Када је реч о дидактичким импликацијама теорије фигуралних појмова, Фишбајн сматра да се однос објекта и дефиниције разликује у математици и емпиријским наукама. Наводи да проблем са манипулисањем фигуралним аспектима, односно склоност ученика ка занемаривању дефиниције, представља велику препреку геометријском резонувању. Једна таква конфликтна ситуација илустрована је примером у којем ученици нису у стању да исправно нацртају висину из темена  $B$  троугла  $ABC$  – иако знају дефиницију висине троугла, ученици најчешће цртају дуж  $BD$  (Слика 35). Уместо тога, ученици треба да знају дефиницију висине троугла и да дати проблем реше у складу са дефиницијом и условом задатка, а не онако како им делује са слике.



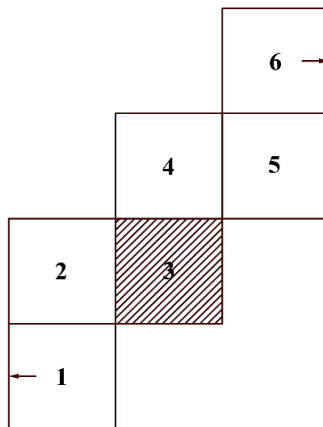
Слика 35. Проблем цртања висине

У почетној настави геометрије треба да постоји могућност вежбања менталних активности ученика у којима се захтева посебан вид сарадње између фигуре и појма. Такве активности изискују од ученика да манипулише објектом уз извршавање операција како над фигуром тако и над логичким односима и операцијама. При реализацији таквих задатака од ученика се захтева да: нацртају слику добијену развијањем мреже површи геометријског тела (заиста доживљено или ментално представљено); препознају геометријско тело које је могуће добити замишљајући склапање дате дводимензионе слике; кажу које ивице се могу спојити како би геометријско тело поново било конструисано. Поједини од ових захтева прилично су једноставни, док су други веома комплексни. На пример, лако је увидети да је на Сlici 36 илустрована мрежа коцке. Дакле, можемо закључити да су у овом случају фигурални и појмовни аспект добро интегрисани. На основу дате слике лако је уочити суседне ивице које се поклапају приликом састављања модела коцке, док је нешто теже уочити да се и ивице на слици обележене стрелицама такође поклапају.



Слика 36. Мрежа коцке

Сложенији задатак био би препознати да је на Слици 37 такође представљена мрежа површи коцке, као и да се ивице означене стрелицама поклапају при формирању модела коцке. Оваква ментална конструкција не захтева од ученика само да „види” фигуру, већ да врши трансформације, да замисли положаје након трансформације и да замисли ефекат који трансформације имају на фигуру.



Слика 37. Мрежа коцке

Ослањајући се на Пијажеову теорију когнитивног развоја, приступом геометрији са когнитивног и перцептуалног аспекта бавио се француски психолог Дувал. У средишту ове теорије налази се развој когнитивних процеса код деце, попут опажања, памћења, мишљења, менталне репрезентације и других. Пијаже је, заједно са својим сарадницима, истицао биолошке факторе као фундаменталне за когнитивни развој и сматрао учење активним процесом самооткривања путем којег појединац сам конструише своје знање. Током тог процеса појединац

ступа у интеракцију са окружењем и остварује напредак у развоју. До формирања геометријских појмова долази током развојних фаза у којима ученици у почетку идентификују објекте у складу са њиховим тополошким карактеристикама, а затим и на основу аксиома Еуклида (Piaget, Inhelder, 1967).

Дувал у Пијажеовим истраживањима когнитивног развоја проналази методолошке и теоријске оквире за објашњење свог модела геометријског мишљења. Анализира семиотику геометријских слика разликујући четири типа когнитивних схватања повезаних са начином на који особа посматра цртеж геометријске фигуре (Duval, 1995), и то:

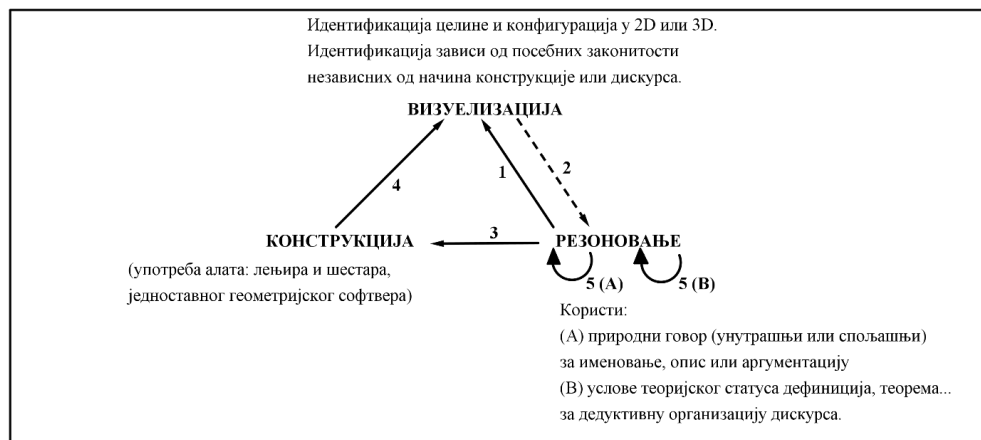
- *перцептуално схватање*: односи се на оно што особа уочава на први поглед, на пример неки облик који је небитан за формирање геометријске фигуре;
- *секвенцијално схватање*: потребно при конструкцији или њеном опису; у том случају, фигуралне јединице нису зависне од перцептуалног схватања, већ од ограничења у математичком и техничком смислу (било да су у питању лењир и шестар, или једноставни образовни софтвер);
- *дискурзивно схватање*: перцептуално схватање је зависно од дискурзивних тврдњи јер математичке особине представљене цртежом није могуће одредити искључиво перцептивним поимањем, нешто мора бити саопштено путем говора или изведено из датих својстава;
- *оперативно схватање*: зависи од различитих модификација дате слике, дакле укључује рад на фигури, ментално или физички, чиме доприноси увиду у решење проблема.

Перцептуално и дискурзивно схватање често утичу на појаву мисконцепције оперативног схватања, односно оперативно схватање не функционише независно од других, а решавање геометријских проблема у највећем броју случајева захтева интеракцију различитих схватања. Када је о геометрији реч, Дувал наводи да је неопходно комбиновати употребу најмање два система репрезентације, једног за својства, и другог за визуелизацију. На пример, појам „геометријске фигуре” врши повезивање дискурзивних и визуелних репрезентација, чак и онда када је у зависности од потреба конкретне математичке активности истакнута само једна од њих (Duval, 2006).

Према мишљењу Дувала, модел учења у којем су различити начини резонувања хијерархијски постављени је неприкладан. Уместо да се разликују по нивоима, различити когнитивни процеси имају своје специфичности и независно се развијају. Три врсте ових процеса формирају геометријско резонување, и то: визуелизација, конструкција и резонување. Визуелизација се односи на визуелну репрезентацију геометријског тврђења или хеуристичко истраживање сложених геометријских ситуација, при конструкцији се врши употреба геометријских инструмената, док се процес резонувања односи на дискурзивни процес ширења

знања, за објашњавање и доказивање. Ова три процеса могу функционисати и одвојено. На пример, визуелизација не мора зависити од конструкције. Слично, иако конструкција води визуелизацији, она зависи од интеракција математичких особина и ограничена је коришћеним алатима. Такође, чак и када је визуелизација помоћ при резонувању, рецимо при проналажењу доказа, у неким случајевима она може водити погрешним путем. Поред свега тога, Дувал истиче да синергија сва три поменута процеса представља неопходност у циљу доброг познавања геометрије.

Џонс на сликовит начин схематски приказује везе и односе који постоје између визуелизације, конструкције и резонувања (Слика 38) (Jones, 1998). Стрелице представљају начине на које когнитивни процеси подржавају једни друге у оквиру било које геометријске активности. Стрелица која води од визуелизације до резонувања је испрекидана јер визуелизација некада може водити погрешним путем. Стрелице које почињу и завршавају у резонувању представљају независност овог процеса од осталих, односно да се може развијати независно од конструкције или визуелизације.



Слика 38. Основне когнитивне интеракције укључене у геометријске активности

Дувал посебну пажњу посвећује улози коју динамички софтвери могу остварити у процесу учења геометрије. Сматра да приликом рада уз примену ових софтвера ученици користе повлачење и друге интерактивне технике како би модификовали своје конструкције. Разликује три врсте операција у складу са начином модификације дате фигуре (Duval, 1999).

- *Мереолошки* начин: дата фигура може се поделити на делове различитих облика (траке, правоугаонике) који се могу комбиновати при састављању нове фигуре. На тај начин долази до мењања облика почетне фигуре, те се један многоугао може трансформисати у други;

- *Ойшички* начин: може се направити већи или мањи облик, као приликом коришћења сочива. Тако се без икаквих промена објекти могу приказати другачије. Фигуре дате у равни могу се видети као да су смештене у тродимензионални простор;
- *Локацијски* начин: могуће је променити оријентацију у равни слике, што представља најмању промену. Ово углавном утиче на препознавање правих углова визуелно сачињених од вертикалних и хоризонталних линија.

Разматрање теоријских концепција развоја геометријског мишљења ученика даје основ за даља разматрања и креирање методичког оквира учења ових садржаја. Заједничка нит која повезује претходно изнете теорије огледа се у потреби за изразитом очигледношћу и способностима визуелизације. Темељ на којем се геометријско резонување заснива чини перцепција, поимање природе ствари на бази графичких приказа геометријских објеката. Због немогућности директног приступа геометријским појмовима прибегавамо њиховом представљању путем цртежа и из тог разлога неопходно је да представе реалистично приказују односе које граде са другим објектима. Сам дводимензионални приказ тродимензионалног простора доводи до немогућности да се ти односи адекватно материјализују и стога захтева од ученика додатни интелектуални напор. Како би се тај напор учинио оптималним и минимализовале негативне последице визуелних репрезентација геометријских појмова треба искористити предности које пружа образовни софтвер. Осим тога, основни циљ образовног софтвера намењеног раду са садржајима геометрије огледа се у прилици да ученици знања стичу помоћу одговарајућих опажаја које ће уз помоћ мишљења даље уопштавати у геометријске појмове. Дакле, очигледност никако не би требало да сама себи постане циљ, већ средство којим се формирају појмови и развија геометријско мишљење.

## 2.4. Очигледност, визуелизација и репрезентација објеката у почетној настави геометрије

Очигледност се као потреба јавила још у античко доба. Сократ је истицао да су чула најубедљивији рецептори за примање, разумевање и схватање нових сазнања. Аристотел је говорио да они који обучавају треба да показују предмете, да речи повезују са представама о предметима и цртају предмете ради бољег истицања њихових особина. Залагао се за увођење цртања у садржаје образовања, првенствено јер је увидео колику примену и значај има у односу на чулно искуство у сазнајном процесу.

Процес стицања знања започиње перцепцијом (опажањем, чулним сазнањем), на чијим основама се стиче представа (ментална слика) о појму. Имајући на уму ово сазнање и потребу за наставом која је очигледна, доступна чулима

ученика, филозоф и педагог Јан Амос Коменски у делу *Велика дидактика* разматра очигледност као један од десет основних принципа који треба да послуже као темељ за ефикасније поучавање и учење. Коменски истиче да ће учење лако напредовати (Коменски, 1954):

1. ако се рад отпочне пре него што се духови искваре;
2. ако настаје после потребне припреме духова;
3. ако се иде од општег ка појединачном;
4. ако се иде од лакшег ка тежем;
5. ако се нико не оптерећује сувишношћу онога што ваља учити;
6. ако се полако иде напред;
7. ако се духови не присиљавају ни на шта чему сами не теже својевољно према своме добу и методу;
8. ако се све предаје уз учешће чула;
9. ако је за очигледну употребу;
10. ако се све врши по једном истом трајном методу.

Као неопходност наставе засноване на чулном опажању, Коменски разматра очигледност као један од основних принципа дидактике и методике наставе. Искуства стечена чулним опажањем мисаоно се обрађују чинећи основу за учење. Осмим принципом наглашена је улога чула, да треба да буду ангажована што више како би се садржај лакше памтио јер:

„слух ваља стално повезивати са видом, говор са руком, не само на тај начин што ћемо причати оно што ученици треба да знају, већ ћемо и сликати да би им ствари могле кроз очи бити утиснуте у памет. Треба наизменично учити и исказивати ствари језиком и извршавати руком, и не удаљавати се од ствари све док им се није јасно утиснула у уши, очи, дух, памћење. Ако се тако поступи, невероватно је колико то помаже памћењу.” (Tomčić, 2020: 47).

У истом делу, Коменски је формулисао и златно правило очигледности *Дела пре речи*<sup>4</sup>, истичући да се пред чула износи што год се може и то на следећи начин:

„Што је видљиво – чулу вида, што се чује – чулу слуха, што мирише – чулу мириса, што има укуса – чулу укуса, што је опипљиво – чулу додира, а ако више чула могу нешто у исти мах да осете, треба то изнети пред више њих одједном”

---

<sup>4</sup> *Res sed verba*

Иако је очигледност сматрао златним правилом наставе, Коменски је није сматрао циљем, већ средством добре наставе. За њега је очигледност претпоставка мисаоне активације ученика. Сличан став може се пронаћи и код Првановића, који сматра да треба почети уз очигледност, али је неопходно што пре прећи на мисаону операцију (Првановић, 1974). Он наглашава да принцип очигледности нарочито долази до изражаја приликом формирања појмова, али не у свакој ситуацији и по сваку цену. Не очигледност ради очигледности, не очигледност по сваку цену или било каква очигледност, већ искључиво очигледност која омогућује формирање одговарајућег појма.

У *Педагошкој енциклопедији* полази се од чулног доживљаја и мишљења који се не сматрају супротностима, већ које повезује дијалектичко својство (Potkonjak & Šimleša, 1989). Када је о почетној настави математике реч, принцип очигледности може се разматрати са различитих аспеката. Према традиционалном схватању, очигледност се своди на природну очигледност у оквиру непосредног посматрања и упознавања ствари или пак њихових модела који треба да омогуће што приближнију слику стварности. За разлику од традиционалног, савремено схватање принцип очигледности гледа шире него што је сазнање путем перцепција. Оно обухвата и представе маште и сећања, као и дедуктивно закључивање на основу уопштених искустава и претходно стечених знања (Дејић, Егерић и Михајловић, 2015; Шпијуновић и Маричић, 2016). На тај начин очигледност прожима све етапе наставног процеса, она је у функцији мисаоне активизације ученика, односно полазне етапе у процесу сазнања и завршне фазе у смислу практичне провере сазнатог, присутна је током посматрања, у апстрактном мишљењу и примењује се у пракси.

Због првенствено визуелног карактера знања и искустава ученика о почетним геометријским појмовима, у настави математике у млађим разредима основне школе изузетно је важно инсистирати на принципу очигледности. Процес учења и формирања геометријских појмова има полазиште у конкретним објектима материјалног света, који су представљени путем модела. Они чине прву етапу у стварању представа о геометријским појмовима јер уколико ученик кроз сопствено искуство не сагледа све елементе појма и мисаоно не преради то искуство, нема ни учења. У геометрији се појмови не могу формирати ако су ученици пасивни у процесу учења и само меморишу без сагледавања садржаја учења. Треба поћи од једноставних реалних ситуација и кретати се према сложеним ситуацијама блиским учениковом поимању света, односно ситуацијама искуствено могућим у окружењу ученика (Ђокић, 2013). Будући да се ученици млађег основношколског узраста налазе у фази конкретних операција, сазнање о појму ваља започети посматрањем конкретних примера везаних за тај појам, а затим се мисаоним операцијама над чулно–искуственим сазнањима долази до самог појма. Наставу геометрије на овом ступњу образовања карактерише, поред принципа очигледности, и доминантна примена индуктивног облика закључивања.

Посматрање конкретних ствари а затим уопштавање њихових заједничких особина води ка формирању јасних геометријских појмова и других генерализација вишег степена сложености.

Улога принципа очигледности мора се посматрати из угла природе наставног садржаја који се у процесу сазнања открива и коришћених средстава. Зато се пред нас поставља питање: *Да ли очигледност у настави омогућава откривање унутрашњих својстава предмета или упознавање само спољашњих својстава доспелих чулима?* Општи одговор на ово питање био би да почетна настава математике може бити очигледна и без коришћења било каквих очигледних предмета, а исто тако не мора бити очигледна уколико коришћена средства нису адекватно примењена. Како се место и улога коју очигледна средства имају у почетној настави математике разликују, то имамо две групе средстава: 1) средства која су сама предмет проучавања, када су ученици у прилици да посматрају модел неког геометријског тела или фигуре са циљем стицања представе о конкретном посматраном појму; 2) средства која сама по себи нису предмет проучавања, већ служе како би се ученицима приближио неки процес или одређена законитост и у таквим случајевима ученици се не усмеравају на посматрање карактеристика самог средства, већ се предмет проучавања налази иза посматраног средства (Шпијуновић, Маричић, 2016). У оба случаја примењена очигледност представља процес сазнајног откривања предмета проучавања, дубљег продирања и упознавања његове суштине, и зато наставу треба да одликује очигледност, треба да буде прожета активним учешћем ученика у изградњи математичких, односно геометријских појмова. Будући да геометријске појмове карактерише апстрактна природа, веома важну улогу у обезбеђивању очигледности имају начини репрезентације ових појмова. Стога је Џером Брунер, један од најзначајнијих теоретичара у области развојне психологије, у својој теорији когнитивног развоја посебну пажњу посветио управо начинима репрезентације математичких појмова. Он је предложио теоријски модел у оквиру којег разликује три нивоа репрезентације (Bruner, 1966): *енативни* (акциони, конкретни) – заснива се на формирању појмова путем извршавања конкретних акција уз употребу манипулативних наставних средстава; *иконички* (графички, сликовни) – подразумева ослобађање од потребе за непосредним манипулисањем наставним средствима и прелазак на визуелни приказ математичких појмова (слике геометријских фигура, тела, скице, шеме); *симболички* – физичко поступање и графички приказ појмова преводи на формални језик математике. На нивоу енактивне репрезентације очигледност се обезбеђује кроз физичко поступање са наставним средствима (моделима геометријских фигура и тела), док је ниво иконицке репрезентације неодвојив од визуелизације и очигледност се на том нивоу достиже искључиво уз одговарајући графички приказ. За ученике је иконицки ниво посебно значајан, јер представља основу за прелаз ка симболичком. Циљ учења на млађем школском узрасту јесте да се ученик добро служи иконицким начином представљања, јер ће касније

те иконичке репрезентације представљати основ за размишљања на симболичком нивоу репрезентације.

Карактеристике мишљења ученика млађег школског узраста чине да у процесу учења улога визуелизације посебно долази до изражаја. Гузман истиче значај визуелизације која у математици може послужити за уочавање апстрактних односа називајући је још и математичком визуелизацијом (Guzman, 2002). Слично, Пресмег наводи да је визуелизација од великог значаја за представљање математике и да се почев од предшколског узраста може користити на свим образовним нивоима са циљем бољег разумевања апстрактних појмова и симболичке репрезентације. Разликује пет компонената визуелизације: конкретне слике, слике шаблона, слике формула, кинестетичке слике и динамичке слике (Presmeg, 2006). Приликом визуелних приказа није свака компонента у истој мери присутна код ученика, преовлађују конкретне слике и слике формула, док су кинестетичка и динамичка компонента најмање заступљене. И Гутierrez дефинише четири структурна елемента визуелизације (менталне слике, спољашње репрезентације, процесе визуелизације и способности визуелизације), а процес визуелизације везује за менталне и физичке акције које укључују менталне слике (Gutierrez, 1996). Разликује визуелну интерпретацију информације која води формирању менталних слика од интерпретације менталних слика која генерише информацију.

Мекги способности просторне визуелизације и просторне оријентације издваја као две посебне класе. Наводи које су четири врсте визуелних способности потребне за формирање менталне слике (McGee, 1979): способност ученика да замисли ротацију посматраног објекта, формирање мреже површи геометријског тела и промену положаја у простору; способност визуелизације целине при промени положаја њених делова; способност замишљања покрета у тродимензионалном простору и манипулације објектима у свести; способност трансформације или манипулације просторним шаблонима у другом систему. Барнеа пак идентификује три типа способности тродимензионалне визуелизације са којима се ученици могу сусрести у раду, и то: *ипроспјорну визуелизацију*, односно способност адекватног разумевања тродимензионалних објеката представљених дводимензионалним репрезентацијама; *ипроспјорну оријентацију* која се огледа у способности замишљања приказаног објекта из другачије перспективе и *ипроспјорне односе*, односно способност визуелизације ефеката насталих применом изометријских трансформација или манипулисања посматраним објектом у свести. Оно што је карактеристично за поменуте вештине јесте да су хијерархијски постављене, при чему се просторни односи доживљавају као способности од највеће важности.

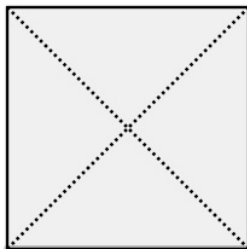
Једну од најцеловитијих дефиниција визуелизације даје Аркави сматрајући да визуелизација представља способност, процес и производ стварања,

интерпретације и употребе слика, илустрација, дијаграма у нашој свести, на папиру или технолошким средствима, а у сврху приказивања и комуникације информацијама, размишљања и развијања претходно непознатих идеја и унапређивања разумевања (Arcavi, 2003). Дакле, илустрације, дијаграми и различити геометријски облици и модели представљају својеврсне алате за визуелизацију мисли, идеја и апстрактних математичких појмова. Будући да визуелизација није сама себи циљ, од квалитета репрезентације појмова зависи у којој мери ће допринети разумевању као крајњем циљу.

Појава образовног софтвера и његова примена учинили су да се обим и моћ визуелизације прошири. Геометрија више није повезана искључиво са неколико статичних и превасходно дводимензионалних приказа. Употреба софтвера омогућава визуелизацију не само ограниченог броја примера и извођење закључака на основу њих, већ постоје хиљаде варијација једног истог проблема (Tiwari et al., 2021). Развој софтвера и графичке могућности дају прилику за тестирање и потврду геометријских претпоставки, чиме визуелизација све више добија на значају и актуелности. Голденберг и Куоко сматрају да се геометрија у оквиру софтвера намењених динамичкој геометрији разликује од геометрије на папиру (Goldenberg & Suoco, 1998). Према њиховом мишљењу, осим мисаоних процеса који се одвијају у умовима ученика, геометрија на папиру укључује само акције над статичним објектима, не инсистирајући на опису поменутих акција. Са друге стране, софтвер пружа опцију „виртуелне манипулације” (Sinclair & Bruce, 2015), даје могућност активног манипулисања објектима уз визуелизацију промена насталих мењањем сваког од параметара. Употреба динамичког софтвера подстиче ученике да постану свесни акција које врше над објектима, на пример свесном променом одговарајућих параметара трансформишу паралелограм у правоугаоник не нарушавајући притом кључна својства паралелограма.

Статични типски прикази геометријских појмова могу ометати ученике да исправно закључују. Најчешће графичке репрезентације ромба и паралелограма са искошеним бочним страницама чине да ученици понекад не укључују квадрате и правоугаонике као њихове посебне случајеве, чак и када су у стању да наведу одговарајућу дефиницију појма (Fujita, 2012; Haj-Yahya & Hershkowitz, 2013). Такође, и формирање појма праве представља велику апстракцију за ученике, првенствено због њене неограничености. Зато је неопходно пронаћи адекватан методски приступ и наставна средства како би се у том процесу обезбедила потребна очигледност и ученици имали прилику да визуелизују појам праве. Манипулативним наставним средствима или цртањем праве на табли или папиру није могуће на најбољи начин представити неограниченост праве, будући да их није могуће неограничено продужавати. Ово је у контрадикцији са чињеницом да се дужина праве не може измерити. Са друге стране, представљањем у софтверу намењеном динамичкој геометрији ученици имају прилику да се увере да дужина праве није коначна.

И Гутиерез се бавио истраживањем утицаја динамичког софтвера на визуелизацију геометријских појмова. Сматрао је визуелизацију основном компонентом у учењу и поучавању геометрије простора, а једини начин на који уџбеници и други штампани извори могу да представе ову област геометрије јесте дводимензионални приказ (Gutierrez, 1996). До појаве софтвера учитељи су недостатке вишеструких репрезентација ублажавали коришћењем манипулативних наставних средстава, а са његовом појавом ученици су у прилици да геометријска тела виде на екрану рачунара из више углова и по потреби их трансформишу. Као последицу таквог начина рада ученици могу да стекну богато искуство и формирају адекватнију менталну слику него када о геометријским телима сазнају искључиво из штампаних извора. Као пример, Гутиерез наводи да ученици који су појмове пирамиде или октаедра формирали само на основу њиховог типског дводимензионалног приказа не би били у стању да на Слици 39 препознају ове појмове.



Слика 39. Дводимензионални приказ пирамиде и октаедра

Уколико би ова тела била приказана у неком софтверу намењеном динамичкој геометрији ученици би могли да их заротирају, сагледају из различитих углова, у специјалним положајима, градећи тако целовиту менталну слику о посматраном појму. Овакав проблем могао би се јавити и са другим геометријским телима (лоптом, призмом, ваљком).



### 3. ГЕОГЕБРА И УЧЕЊЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Разматрања специфичности учења геометрије и теоријске концепције развоја геометријског мишљења наведени у претходном поглављу представљају основ за обликовање методског приступа учењу и одабир средстава која ће потпомогнути учење. Заједнички став јесте да приступ учењу геометрије у почетној настави треба да буде заснован на очигледности и визуелним репрезентацијама самог појма. За већину геометријских појмова очигледност се може обезбедити моделима, али постоји велики број појмова када се очигледност и визуелизација не могу обезбедити на тај начин, већ је потребно применити другачији приступ. Наше полазиште јесте да се употребом софтвера Геогедра могу пружити адекватне репрезентације.

У сазнајном процесу вишеструке репрезентације користе како би помогле ученицима у разумевању и повезивању садржаја, омогућавају ученицима дубље разумевање појмова, њихових особина и међусобних веза. Вишеструки прикази доступни у Геогедра софтверу доприносе бољој репрезентацији геометријских појмова и њихових особина, нарочито када је реч о геометријским телима. У поређењу са моделима геометријских фигура, чији су број и могућности приказа ограничени, број модела доступних коришћењем поменутог софтвера је неограничен.

Абу Бакар и сарадници истичу предности примене Геогедра од основношколског до универзитетског нивоа наставе математике (Abu Bakar, Mohd Ayub & Tarmizi, 2010):

- једноставна је за употребу, нуди једноставно руковање интерфејсом, поседује вишејезични мени, команде и помоћ;
- подстиче ученичке пројекте из математике, вишеструке репрезентације и учење путем открића;
- могуће је прилагодити радно окружење подешавањем интерфејса (величине фонта, избора језика, квалитета графике, боје, врсте координата, стила и дебљине линије);
- осмишљена је тако да помогне ученицима у разумевању математике манипулисањем променљивим било превлачењем слободних објеката или увођењем клизача; ученици могу пратити утицај трансформације слободних објеката на промене зависних објеката;

- класичну наставу замењује проблемски оријентисаном наставом у којој примарна улога није рецептивно учење, већ преношење знања стварањем ситуације која ће неговати формирање неопходних когнитивних структура ученика; пружа добру прилику за кооперативно учење, било у малим групама било у интерактивној настави или путем ученичких презентација;
- стимулише учитеље да примењују ИКТ у визуелизацији математике, истраживању, интерактивним часовима математике, било у учионици или на даљину.

Основе принципа рада Геогедра софтвера заснивају се на учењу путем открића (Kay & Kwak, 2018; Rambe, Syahputra, Octariani & Matondang, 2020), чиме његова примена на часу чини да настава буде усредсређена на ученике. Учитељ престаје да буде централна фигура наставе, већ се његова улога огледа у избору адекватног окружења које подстиче и усмерава ученике да снагом сопственог ума откривају нове појмове и начела (Klemer & Raporort, 2020). Ослањајући се на динамичност којој доприноси, Геогедра пружа могућност за проналажење решења бројних математичких проблема, као и за отварање нових. Тиме омогућава стварање окружења које замењује класичан начин рада проблемски оријентисаном наставом подстичући ученике да истражују. Активно учење путем открића потпомогнуто софтвером за резултат има чврсту структуру знања, што утиче да такво знање буде дуготрајније и већег квалитета. Активности изведене уз употребу софтвера подстичу интеграцију нових знања у базу већ постојећих знања ученика, при чему Геогедра помаже у свакој фази учења путем открића (стимулација, формулисање проблема, прикупљање података, обрада података, верификација и генерализација) (Juandi & Priatna, 2018). Ученици се стављају у позицију да уче путем експеримената и открића разматрајући више потенцијалних начина решавања проблема пре него што изведу коначан закључак.

Геогедра је алат који повезује теорију математике, школску математику и пројектни модел наставе (Bu, Spector & Naciomeroglu, 2011). Помаже ученицима да боље разумеју математичке појмове и представља мотивацију за достизање виших нивоа когнитивног развоја. Представља софтвер који омогућава ученицима да конструишу интерактивне репрезентације тачака, линија и кругова, док уопштено гледано може допринети повезивању садржаја из геометрије, мерења и алгебре. Рад у оваквом окружењу пружа и учитељима могућност да развију нове начине да повежу, прошире и обогате садржаје како би код ученика подстакли боље разумевање апстрактних математичких појмова (Tamam & Dasari, 2021; Xistouri & Pitta-Pantazi, 2013).

Маинали наводи да ученици препознају предности које пружа рад у динамичном окружењу, јер правовремене повратне информације које омогућава рад у софтверу нису доступне приликом класичног начина рада уз употребу папира и оловке (Mainali, 2014). Ученици развијају математичко резонување и вештине

решавања проблема добијањем упутстава подржаних садржајима израђеним у Геогедри. Повећању интересовања ученика за сопствено учење доприноси и могућност креирања клизача и анимација, чиме се на динамичан начин манипулише нацртаним објектима и прате промене које том приликом настају. Са друге стране, велика база са преко милион готових садржаја (модела, активности, симулација, вежби, анимација) доступних на званичном сајту софтвера чини његов саставни део, што доприноси смањењу времена и ресурса потребних учитељима за креирање материјала неопходних за извођење наставе.

Испитујући утицај софтвера на побољшање геометријског мишљења, Аделабу је са сарадницима утврдио да промене геометријских облика у динамичком окружењу какво обезбеђује Геогедра подстичу ученике да визуелно, аналитички и дедуктивно размишљају о решавању проблема (Adelabu, Makgato & Ramaligela, 2019). Ученици су у могућности да више пута изведу исту активност, док са друге стране, у раду са папиром и оловком, изводе закључке у статичном окружењу. У класичној настави број примера на основу којих ученици промишљају о неком појму је ограничен, јер су за цртање геометријских облика на табли потребни време и други ресурси, притом нису сви учитељи вешти у цртању облика на табли, што може узроковати лоше разумевање геометријских појмова, односно обесхрабрити ученике и тиме довести до ниских постигнућа.

Будући да је визуелизација једна од најчешће истицаних компоненти Геогедре, а ниво визуелизације и први ниво Ван Хилове теорије геометријског резоновања, овај софтвер има изразити допринос при преласку са нижег на виши ниво геометријског резоновања ученика (Ansah, Asiedu-Addo & Kabutey, 2022). Позитиван ефекат на Ван Хилове нивое геометријског резоновања Геогедра остварује и приликом увођења појма круга. Кутлуца је спровео експеримент у оквиру којег су ученици захваљујући компјутерски потпомогнутим активностима развијеним уз помоћ софтвера били у прилици да откривају и конструишу сопствену структуру знања (Kutluca, 2013). Радни листови које су користили пружали су им упутства о активностима, а у интерактивном окружењу ученици су могли да померају задате облике, креирају сопствене геометријске облике, тестирају своја знања и истовремено откривају константне и релативне односе у математичким структурама. Као резултат, употреба Геогедре утицала је на повећање Ван Хилових нивоа геометријског мишљења. Такође, Рамлан и сарадници покушали су да уз помоћ Ван Хилове теорије и примену Геогедре открију потешкоће са којима се суочавају ученици приликом решавања проблема геометријског резоновања тродимензионалних фигура, да идентификују узроке тих потешкоћа и дају предлог корака које би требало предузети како би се потешкоће савладале. Као главне проблеме у разумевању тродимензионалних фигура истичу њихову апстрактну природу, недовољно развијене способности ученика за цртање и коришћење дигиталних алата за цртање тродимензионалних фигура, као и смањену способност ученика да разумеју математичке

концепте (Ramlan, Cahyono, Fahinu & Hali, 2020). Примену Ван Хилових нивоа геометријског резоновања допуњених применом софтвера препознају као алтернативу у предвиђању потешкоћа и њиховој елиминацији приликом учења садржаја геометрије.

Вишеструким репрезентацијама Геогедра доприноси визуелизацији, демонстрацији, конструкцији, односно може послужити за откривање математике и стварање подстицајне атмосфере за учење (Mthethwa, Bayaga, Bossé & Williams, 2020; Nzaramyimana, Mukandayambaje, Iyamuremye, Hakizumuremyi & Ukobizaba, 2021; Ratnasari, Mariani & Mulyono, 2020). Геогедра представља користан алат који позитивно утиче на ангажовање ученика, повећава њихову интеракцију, повећава постигнућа и помаже ученицима који се боре са визуелизацијом (Ying Zhang et al., 2023). Својим визуелним карактеристикама помаже учењу геометријских садржаја, пре свега полихроматски приказ буди интересовање ученика и чини да лакше усвајају садржаје. Бу и Еу као узроке ниских постигнућа ученика у области геометрије идентификују лошу способност визуелизације (Boo & Eu, 2016). Са друге стране, наводе да својства Геогедре омогућавају ученицима да креирају интерактивне приказе тачака, линија и кругова, да трансформишу њихове карактеристике и мењају им положај. Управо конструисање таквих, интерактивних објеката, пружа прилику ученицима да науче да користе разноврсне алате за цртање геометријских облика; измере углове и растојање; примењују клизаче како би задали опсег вредности за које ће вршити испитивање природе одређеног математичког проблема; идентификују обим као карактеристику геометријских фигура и разликују мерне јединице за дужину и површину (Furner & Marinas, 2012).

Вагова и Кметова испитивале су колико успешно ученици са ниским нивоом просторних способности успевају да реше проблем просторне визуелизације тродимензионалних тела (Vágová & Kmetová, 2019). Ученици су проблеме решавали у два правца, коришћењем искључиво папира и оловке и комбиновањем папир–оловка окружења и рада у Геогедри. Откриле су да је комбинована употреба папир–оловка окружења и динамичког софтвера помогла ученицима да потврде и исправе решења до којих су дошли решавајући проблем на први начин, те закључују да рад у динамичном окружењу помаже ученицима да створе исправне визуелне слике и развију просторне способности. Олсон наводи да софтвер пружа ученицима могућност да истражују различите варијације геометријских облика, на пример да за унапред задат обим и/или површину правоугаоника одреде које све могу бити дужине његових страница (Olsson, 2019). Док истражују, Геогедра поступно, корак по корак, нуди ученицима прилику да уче уместо да буду концентрисани искључиво на проналажење решења. При томе, превлачење објеката или делова објеката при извођењу конструкција пружа визуелну верификацију валидности изведене конструкције.

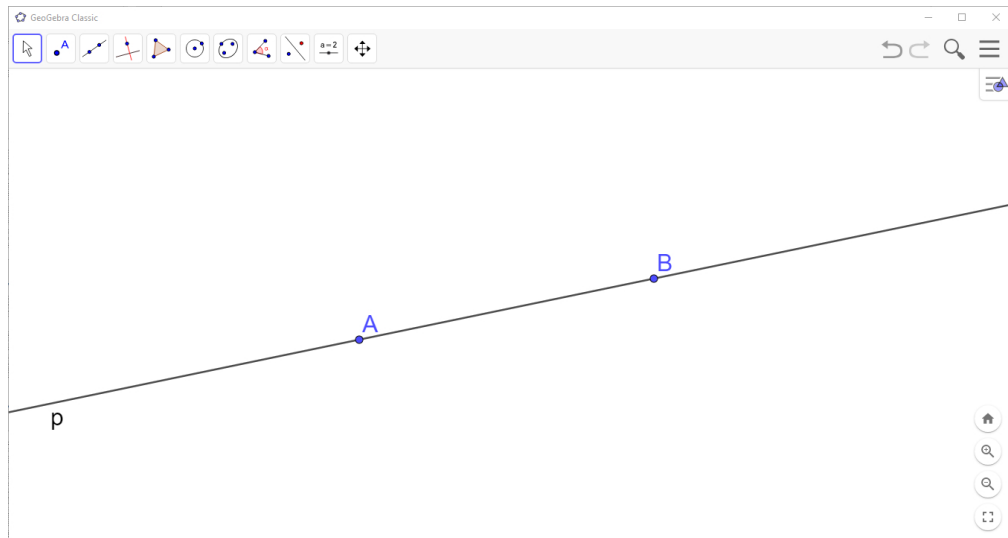
Поред наведених, бенефити коришћења Геогебре посебно долазе до изражаја приликом графичке репрезентације тродимензионалних објеката. Будући да ученици често закључују на основу приказа на екрану рачунара, могућност истовременог вишеструког графичког приказа геометријског објекта који обезбеђује Геогебра помаже ученицима да критички промишљају, исправно визуелизују и правилно тумаче односе између делова објекта. Од изузетног је значаја да су ученици у стању да замисле, конструишу и разумеју конструкције објеката са циљем њиховог бољег повезивања са другим геометријским појмовима. У том смислу, рецептивна настава не доприноси напретку ученика и развоју њиховог геометријског мишљења. Услед наставе засноване на пасивном памћењу чињеница велики број ученика није у стању да развије адекватно геометријско резоновање, разумевање геометријских појмова и вештине решавања геометријских проблема. Из тог разлога, примена интерактивних рачунарских софтвера омогућава ученицима да активно учествују, самостално истражују и тако конструишу сопствено разумевање геометрије.

### 3.1. Модели примене Геогебре у почетној настави геометрије

Програми наставе и учења математике у млађим разредима основне школе предвиђају да се ученици упознају и овладају карактеристикама геометријских фигура у равни и простору. У класично организованој настави ученици се са поменутиим појмовима упознају посматрајући њихове моделе, слике и цртеже. Најчешће су у питању модели израђени од различитих материјала или статични прикази у уџбенику, на табли или у свесци. Овако представљени модели пружају ученицима ограничене могућности истраживања. На пример, у уџбенику ученици не могу да прате процес креирања графичког приказа већ посматрају само његов крајњи облик. Са друге стране, употреба вишеструких репрезентација у Геогебра окружењу чини да ученици у сваком тренутку могу пратити настанак и промене до којих долази мењањем неких својстава и тако доприноси дубљем разумевању ових појмова.

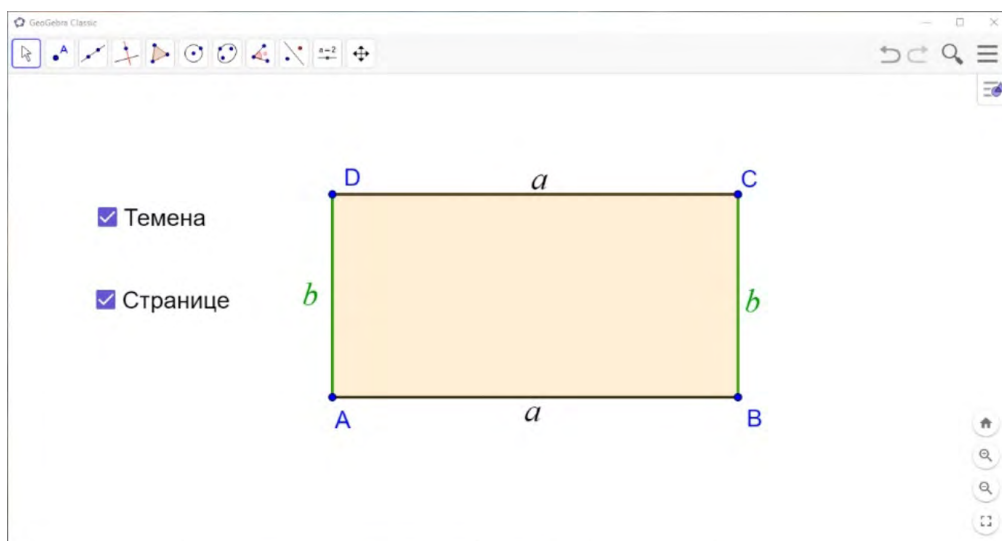
Формирање појма праве, услед њене неограничености, у млађим разредима основне школе представља велику апстракцију, па Геогебра може допринети да ученици лакше визуелизују ову њену особину. Ученици треба да схвате појам праве као мисаоно продужење дужи преко њених крајњих тачака. Због ограниченост простора, у уџбеницима или на табли је тешко на тај начин графички представити праву, али за софтвер оваква ограничења не постоје. Ученици могу посматрати праву добијену уз помоћ алата *Prava kroz dve tačke* на којој могу уочити дуж  $AB$  и праву линију која се протеже преко њених крајњих тачака (Слика 40). Како би се ученицима приближила неограниченост праве, праву  $p$  је могуће померати у графичком делу и показати да заиста нема краја. Такође, алатом

*Станјенје* може се умањити приказ како би се видео већи део праве и како би се ученици уверили да заиста нема ни почетак ни крај. Додатно, ученици могу добити прилику да самостално нацртају неколико правих у софтверу и да на основу више примера закључе да две тачке једнозначно одређују тачно једну праву.



Слика 40. Приказ праве у Геогедри

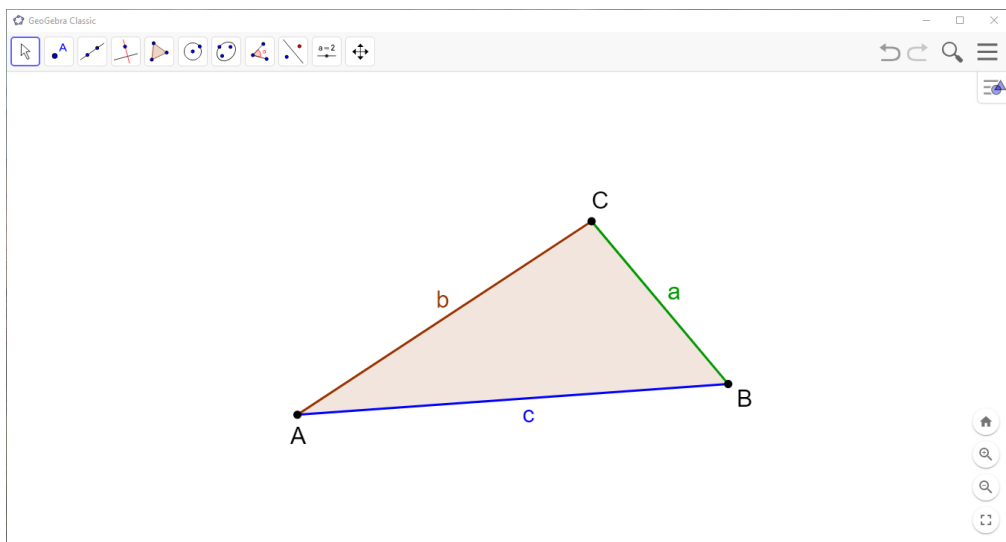
За увођење појма правоугаоника може се употребити алат *Kruti mnogougao*. Модел правоугаоника креиран уз помоћ овог алата задржава облик без обзира на примењене изометријске трансформације (Слика 41). Могу се посебно истаћи темена и странице правоугаоника, могу се представити у различитој боји, док се у сваком тренутку приказ неког од елемената може уклонити како би ученици пажњу усмерили на посматрање жељених својстава. На основу приказаног модела могу уочити темена и странице правоугаоника, као и које су странице суседне, а које наспрамне. Уз помоћ троугаоног лењира могу одредити да ли су углови правоугаоника прави, а мерењем дужина страница закључити да су наспрамне једнаких дужина. Додатно, у циљу провере да ли су наспрамне странице правоугаоника заиста једнаких дужина могуће је употребити и алат *Rastojanje* који аутоматски одређује дужину дужи.



Слика 41. Приказ правоугаоника у Геогебри

Појам квадрата може се увести аналогно са појмом правоугаоника. За увођење овог појма може послужити алат *Pravilan mnogougao*. Визуелизацијом појма квадрата уз помоћ софтвера ученици могу посматрати како се променом положаја тачака које представљају темена квадрата мења величина површи, али задржава облик квадрата. Мерењем могу утврдити да квадрат поседује све особине правоугаоника, али и једну додатну, да су све четири стране једнаке дужине. Како би изградили менталну слику о појму квадрата, пожељно је ученицима приказати квадрат у различитим положајима, што се може постићи превлачењем једног од његових темена.

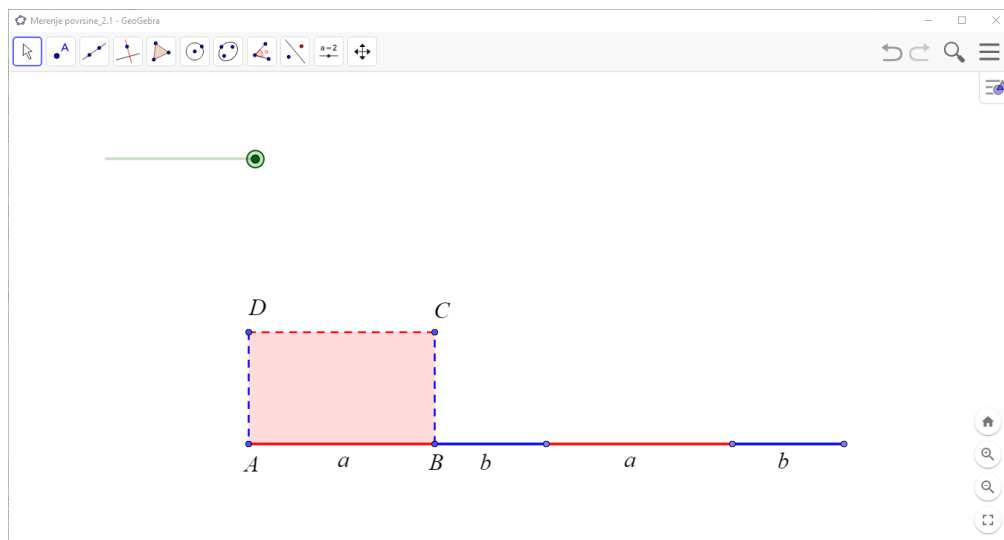
На сличан начин може се представити и троугао. Уз помоћ алата *Mnogougao* треба одредити тачке које представљају темена троугла, након чега софтвер креира задати многоугао. Додатно, захваљујући могућности употребе поља за потврду могу се независно приказати темена, стране и углови троугла, како би ученици у датом тренутку пажњу усмерили на посматрање жељених елемената. Мерењем ученици могу утврдити да су стране троугла различитих дужина, што се може истаћи и коришћењем различитих боја при приказу страница (Слика 42). Имајући у виду да су креирани садржаји интерактивни, ученици могу добити прилику да врше промену положаја темена троугла и прате трансформацију облика његове површи до које долази променом положаја темена.



Слика 42. Приказ троугла у Геогебри

Употребом алата *Pravilan mnogougao* може се добити модел једнакостраничног троугла који се превлачењем једног од темена може модификовати, али тако да све време задржава својство једнакостраничности. Ученици могу мењати положај темена троугла, а затим мерењем проверавати да ли је троугао све време једнакостраничан.

Програм наставе и учења прописује да ученици млађих разреда основне школе треба да овладају појмом обима правоугаоника, квадрата и троугла и његовим израчунавањем. У том циљу, уз примену софтвера Геогебра могуће је креирати моделе уз помоћ којих ученици могу на динамичан начин пратити увођење појма обима. На [Слици 43](#) дат је правоугаоник  $ABCD$  са страницама  $a$  и  $b$ . Померањем клизача ученици могу пратити процес трансформације изломљене линије која ограничава површ правоугаоника у дуж која се састоји из дужи једнаких страница правоугаоника. Захваљујући клизачу могуће је више пута извести исту трансформацију како би ученици боље разумели појам обима правоугаоника. Са друге стране, враћањем клизача на почетну вредност изводи се инверзна операција, што је значајно јер омогућава ученицима реверзибилност у мишљењу.

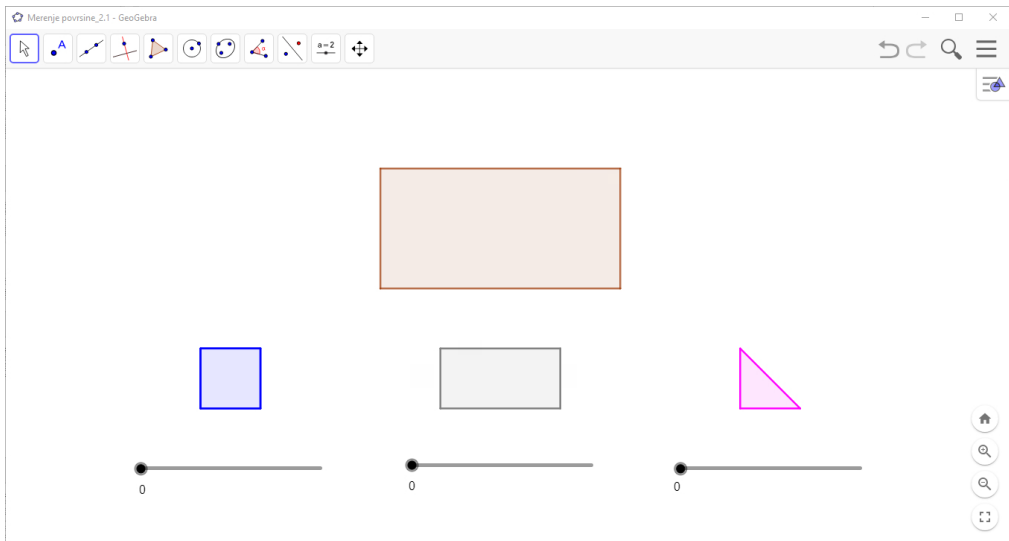


Слика 43. Увођење појма обима правоугаоника уз помоћ Геогембре

Увођење појма обима уз помоћ Геогембре има за циљ да ученици схвате да израчунавањем обима фигуре одређују дужину која је једнака збиру дужина страна те фигуре (Шпијуновић, Маричић, 2016). Ученици су у прилици да прате процес, активно учествују у формирању појма обима графичким надовезивањем дужи и могу да створе јаснију представу о појму, спречавајући тако настанак проблема узрокованих раним формалним увођењем обрасца за обим (Миликић, Маричић и Вуловић, 2022; Vighi & Marchini, 2011).

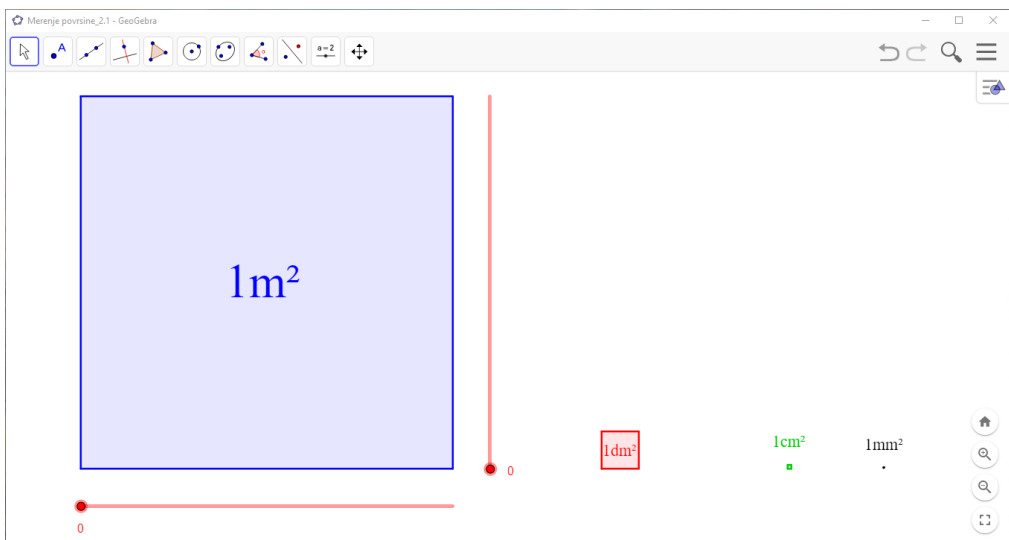
Поред обима, и појам површине и њеног мерења представљају важне садржаје које ученици млађих разреда основне школе треба да савладају. Један од узрока недовољно доброг разумевања појма површине често се налази у почетном искуству ученика које је везано за образац „дужина  $\times$  ширина = површина” (Martin & Strutchens, 2000; Zacharos, 2006), уместо на активностима бројања мерних јединица којима је површ дате фигуре поплована (Kamii & Kysh, 2006). Да би ученици успешно усвојили појам мерења површине и јасно га диференцирали од појма обима, потребно је да овладају поступцима попловачања површи фигуре без празнина или преклапања мерних јединица (Stephan & Clements, 2003), бројањем мерних јединица и разумевањем структуре редова и колона (Sarama & Clements, 2009; Зељић и Иванчевић, 2019).

У динамичном окружењу Геогембре померањем креираних клизача ученици на очигледан начин могу пратити процес попловачања површи фигуре датим јединицама мере (Слика 44). Могу уочити да се као резултат попловачања различитим јединицама мере добијају различити мерни бројеви, односно да се при мерењу површине исте површи већом јединицом добија мањи мерни број и обратно.



Слика 44. Увођење појма мерења површине уз помоћ Геогедбре

По аналогји са решавањем проблема мерења дужине, ученици закључују да је и при мерењу површине потребно увести једну сталну, непромењиву јединицу мере како би се при сваком мерењу површине исте површи добио исти мерни број. С тим у вези, у Геогедбри је могуће приказати моделе квадрата који имају површину од једног квадратног метра, једног квадратног дециметра, једног квадратног центиметра и једног квадратног милиметра као стандардних јединица мере за мерење површине површи (Слика 45).

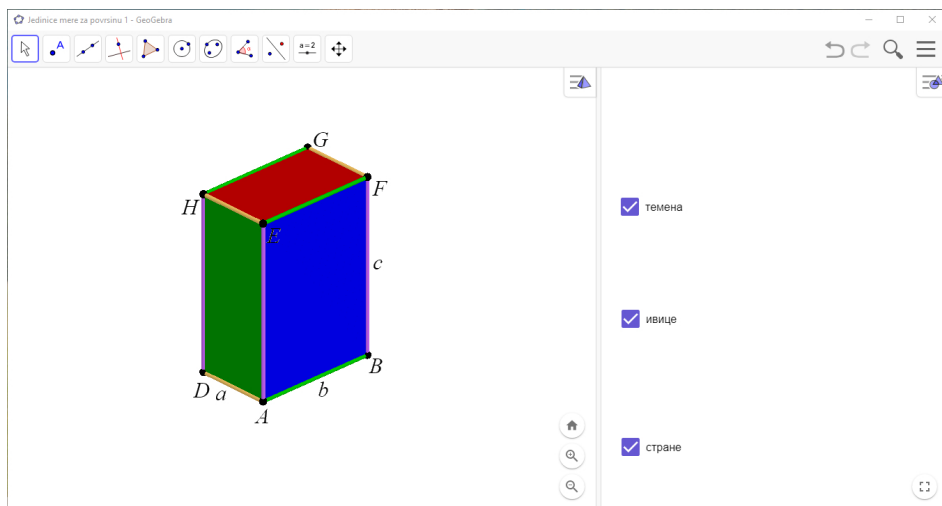


Слика 45. Увођење јединица мере за површину уз помоћ Геогедбре

Динамични приказ модела стандардних јединица мере за површину омогућава ученицима да уоче реалне односе који владају међу њима. Захваљујући могућности увеличавања и пројекције садржаја на таблу или зид, ученици могу да стекну представу о томе колику површину представљају квадратни метар, квадратни дециметар, квадратни центиметар и квадратни милиметар у реалном окружењу. Такође, употребом клизача на очигледан начин могу пратити процес поплочавања површи квадратног метра моделом квадратног дециметра и закључити колико пута је квадратни метар већи од квадратног дециметра. Померањем хоризонталног клизача ученици уочавају да у једном реду има укупно десет квадратних дециметара, док померањем вертикалног клизача пребројавањем утврђују да у квадратном метру има десет редова са по десет квадратних дециметара. Коначно, закључују да се у једном квадратном метру садржи сто квадратних дециметара, односно да је квадратни дециметар мерна јединица за површину сто пута мања од квадратног метра.

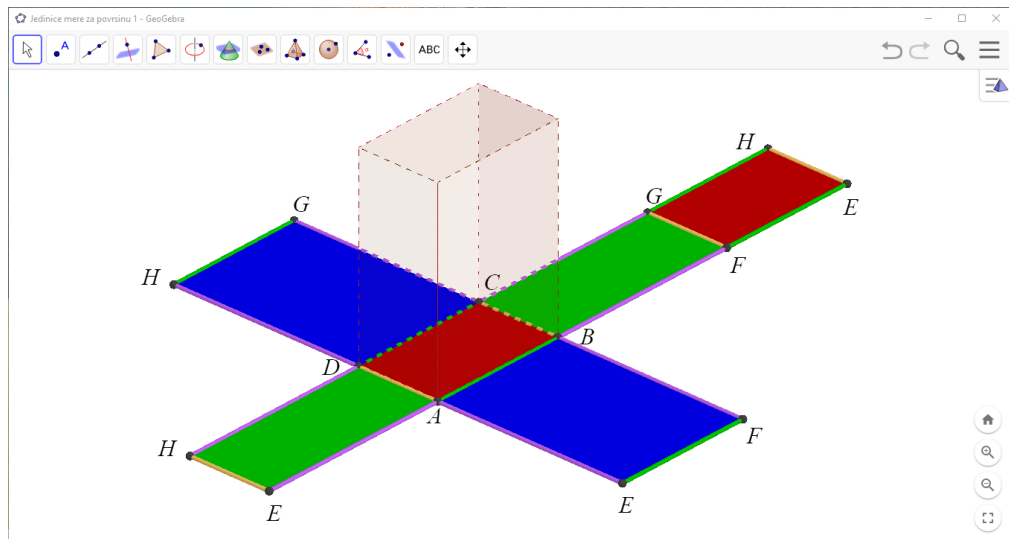
На начин идентичан разумевању односа јединица за мерење површине, разумевањем структуре редова и колона ученици би на основу више конкретних примера требало да усвоје поступке мерења површине правоугаоника и квадрата и, коначно, да усвоје обрасце за израчунавање површине.

Програм наставе и учења такође предвиђа да се у млађим разредима основне школе формирају појмови геометријских тела квадрата и коцке. У Геогебри је уз помоћ алата *Prizma* могуће креирати квадар и истаћи елементе које ученици треба да уоче (Слика 46). Захваљујући могућностима ротације квадрата и вишеструког приказа, ученици пребројавањем могу утврдити да се површ квадрата састоји од шест страна облика правоугаоника, да има осам темена и дванаест ивица. Ради лакшег формирања представе о појму квадрата, да су наспрамне стране квадрата подударне, да постоје три групе ивица једнаких дужина, одговарајуће групе елемената представљене су истом бојом.



Слика 46. Приказ квадрата у Геогебри

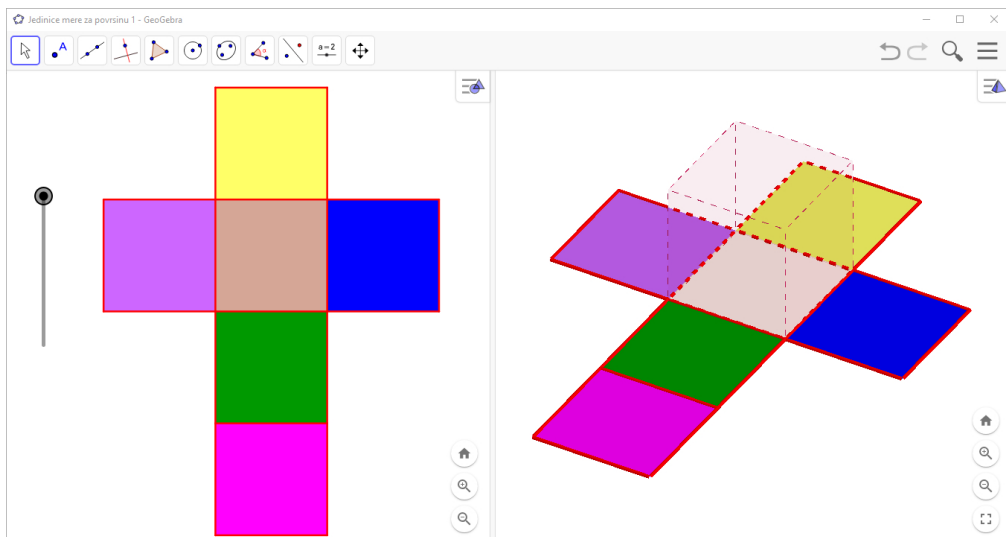
Практичним активностима мерења ученици могу на моделима направљеним у Геогедри утврдити које су стране квадрата подударне и наспрамне, док је избором алата *Mreža* могуће представити мрежу површи квадрата у равни (Слика 47). Представљањем мреже у равни ученици лакше уочавају да свако теме квадрата истовремено припада трима странама, а свака ивица ограничава две стране квадрата.



Слика 47. Приказ мреже квадрата у Геогедри

Динамичан приказ формирања мреже површи у равни доприноси увођењу појма мерења површине геометријских тела. Када на очигледном примеру уоче из колико многоуглова се састоји површ геометријског тела, уз претходно усвојен поступак мерења површине, ученицима је једноставније да индуктивним путем закључе на који начин се израчунава површина површи која ограничава геометријско тело. Мулиган и сарадници наводе да се за овладавање појмом површине геометријског тела најпре треба фокусирати на препознавање мреже површи конкретног тродимензионалног тела (Mulligan, Prescott, Mitchelmore & Outhred, 2005). Међутим, будући да разумевање тродимензионалних тела путем њихових дводимензионалних приказа може бити изазовно за већину ученика, Вагова истиче да ученици често имају потешкоће приликом уочавања односа који владају међу њиховим елементима (нормалност, паралелност, подударност) (Vágová, 2021). Због свега тога предност Геогедре је што на једном месту обједињује тродимензионалну репрезентацију геометријског тела и приказ његове мреже у равни. Могућности које софтвер нуди у формирању појма површине геометријског тела огледају се управо у вишеструким репрезентацијама, чињеници да ученици могу на динамичан начин пратити трансформацију површи у

тродимензионалном делу радног окружења и посматрати формирање мреже у дводимензионалном делу (Слика 48).



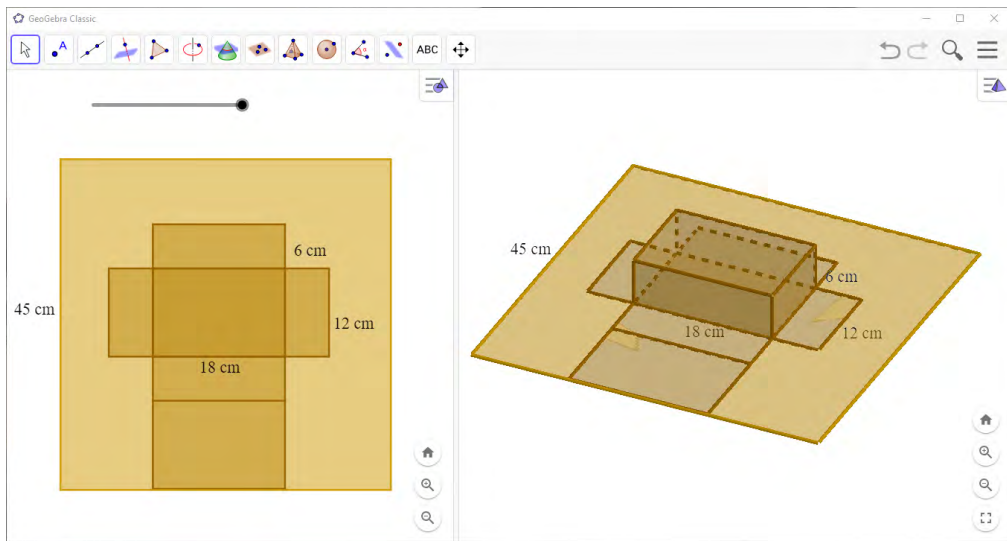
Слика 48. Приказ мреже коцке у Геогебри

Полазећи од коцке са десне стране, дате у тродимензионалном делу радног окружења, ученици уз помоћ клизача прате процес трансформације мреже коцке у дводимензионалну фигуру у равни. По завршетку овог процеса у дводимензионалном делу могу видети развијену мрежу коцке у равни. Посматрањем мреже на овај начин, ученици су у прилици да лакше визуелизују њене стране, њихов облик и број. Ученици доводе у везу ивице коцке приказане у тродимензионалном делу софтвера са страницама квадрата који чине мрежу коцке приказану у дводимензионалном делу и, коначно, закључују да површину фигуре која одговара мрежи коцке могу одредити сабирањем мерних бројева површине шест одговарајућих квадрата.

На конкретним примерима смештеним у реални контекст могуће је показати у којој мери вишеструке репрезентације Геогебра софтвера помажу ученицима при решавању проблема:

*Колика површина картона преостане када се од картона облика квадрата странице 45 cm најравни кутурија облика квадра ивица 18 cm, 12 cm и 6 cm?*

Графичка репрезентација проблема олакшава ученицима његово разумевање и помаже им да закључе шта је потребно да израчунају у задатку. На динамичном моделу направљеном у софтверу ученици могу да виде квадрат који одговара картону датих димензија и квадар који је потребно изрезати са истакнутим димензијама (Слика 49).



Слика 49. Приказ проблема мерења површине квадрата у Геогедри

Померањем постављеног клизача долази до трансформације квадрата и развијања мреже квадрата који треба направити. На основу дводимензионалног приказа, ученици закључују да површину преосталог картона могу израчунати одузимањем површине квадрата од површине картона. За израчунавање површине квадрата врше сабирање површина шест правоугаоника који формирају мрежу квадрата а чије странице одговарају дужинама ивица квадрата. Са друге стране, како је картон облика квадрата, за израчунавање његове површине користе образац за површину квадрата који су претходно упознали. Одузимањем добијених мерних бројева одређују површину картона који преостане приликом прављења кутије облика квадрата датих димензија.

Могућности примене софтвера Геогедра нису ограничене на дате примере. Велика база готових модела из геометрије, али и других области математике доступна је на званичном сајту софтвера. Динамични модели обезбеђују више-струке репрезентације на темељу којих ученици могу усвајати основне појмове математике и изводити даље генерализације.

### 3.2. Потенцијална ограничења примене Геогедре у почетној настави геометрије

Рачунарско окружење изузетно је подстицајно (Vágová & Kmetová, 2019), али треба имати на уму и да свако окружење и свака репрезентација имају и позитиван и негативан утицај на развој просторних способности ученика. С обзиром на то да приликом учења геометрије уз примену софтвера ученици закључују

на основу приказа геометријских објеката на екрану рачунара, потребно је да ученици овладају правилним тумачењем дводимензионалних приказа геометријских тела, да науче да користе предности које образовни софтвер нуди, али и да критички промишљају. На пример, ученици могу погрешно тумачити дводимензионални приказ геометријског тела и за прав угао помислити да је оштар, или да су две ивице геометријског тела нормалне само зато што тако делује на екрану рачунара. Из тог разлога од изузетне је важности да ученици док раде са дводимензионалним приказима тродимензионалних облика користе различите вештине. Питалис и Кристоу идентификовали су две врсте потребних вештина – вештине кодирања и декодирања. Под вештинама кодирања информација подразумевају „конструисање мреже површи геометријских тела, конструисање дводимензионалног приказа геометријског тела и превођење из једног начина репрезентације у други, док вештине декодирања истовремено обухватају интерпретацију структурних елемената тродимензионалног објекта (темена, ивица и страна) и његових геометријских својстава” (Pittalis & Christou, 2013: 677).

Поредећи Геогебру са другим *DGS* софтверима, Макрел наводи низ проблема који се јављају, а тичу се репрезентације објеката (Mackrell, 2011). Аутор указује на недоследно представљање еуклидске равни до којег долази услед промене односа координатних оса. Том приликом дешава се промена изгледа објекта у графичком делу радног окружења, што може бити збуњујуће за ученике. Такође, активиран алгебарски део прозора у којем се налази алгебарска репрезентација креираних објеката може одвући пажњу ученика са онога што је важно. Резултати истраживања указују да коришћењем Геогебре у учењу геометрије долази до пораста постигнућа, али ученици су става и да учење у оваквом окружењу није адекватно за сваког ученика (Chua et al., 2017). Као један од разлога ученици истичу да није сасвим једноставно за кратко време прилагодити се концепту наставе који садржи примену софтвера јер се тако мења начин рада који су усвојили и на који су навикли.

У једном од својих радова, Литл (Little, 2009) анализира баријере имплементацији динамичке геометрије у настави. Сматра да је првенствено потребно уверити учитеље да би уз коришћење ових софтвера могли ефикасније поучавати ученике садржајима геометрије. Као још један од проблема јавља се доступност рачунара и интернета, како учитељима тако и ученицима (Bhagat & Chang, 2015; Budinski, 2013; Dimitrijević, Popović & Stanić, 2012; Миликић, Вуловић и Михајловић, 2020; Radovanović & Karić, 2011). Такође, учитељи често као један од разлога некоришћења Геогебре у настави истичу недостатак одговарајућих обука (Belgheis & Kamalludeen, 2018) и готових аплета (Žilinskienė & Demirbilek, 2015). До сличног закључка дошли су Миликић, Вуловић и Михајловић (Миликић, Вуловић, Михајловић, 2020), наводећи то као последицу недовољне обавештености учитеља о великој бази креираних модела којима се може приступити на званичном сајту софтвера. Овакви и слични налази указују на потребу за већом

информисаношћу учитеља о бенефитима које пружа примена софтвера и његовим могућностима.

Преинер идентификује читав низ вештина које би учитељи требало да поседују како би са успехом креирали наставне материјале и изводили наставу користећи Геогедру:

- основне вештине у вези са руковањем и организацијом датотека (да креирају и именују датотеку, сачувају датотеку у различитим програмима, препознају екстензију .ggb);
- основне вештине у вези са употребом слика које могу користити при креирању материјала (да разликују сликовне датотеке у зависности од екстензије, промене димензије слике уз помоћ одговарајућег софтвера, преузму слике са интернета, да буду упознати о потребној резолуцији за штампање или презентовање материјала);
- вештине везане за коришћење софтвера намењеног раду са текстом (како да направе табелу и форматирају текст, уметну слику у текст документ, одштапају текст документ);
- вештине неопходне за дељење креираних материјала (да дистрибуирају материјале коришћењем CD или USB уређаја, копирају датотеке из меморије у рачунар, поставе датотеке на интернет мрежу и учине их доступним ученицима) (Preiner, 2008: 42–43).

Поред одређених ограничења, велики број аутора сагласан је да укључивање софтвера у наставу неизоставно доводи до побољшања у постигнутим резултатима (Martín-Caraballo & Tenorio-Villalón, 2015; Moyer-Packenham, Ulmer & Anderson, 2012). Мартин-Карабаљо и Тенорио-Виљалон додају да је његова употреба знатно важнија за ученике са ниским постигнућима у настави геометрије јер учење уз помоћ Геогедре даје боље ефекте у поређењу са наставом организованом на класичан начин (Martín-Caraballo & Tenorio-Villalón, 2015). Булут и сарадници (Bulut et al., 2016) сматрају да ученици са ниским постигнућима обично имају мање развијену способност визуелизације и зато је визуелно репрезентовање математичких појмова од пресудног значаја за ову групу ученика. Додатно, иста група аутора предност софтвера види у томе што учитељима пружа могућност да смање разлике у постигнућима међу ученицима.

Треба имати на уму и да је при избору активности и софтвера којим се врши визуелна репрезентација пожељно узети у обзир претпоставке које ће осигурати формирање адекватне менталне слике појма код ученика. Гутиерез разматра следеће параметре: врсту приказа геометријског тела, начин на који софтвер омогућава трансформацију приказа (односно, колико је софтвер једноставан за коришћење) и обим способности које захтевају софтвер и активност (Gutierrez, 1996). Избор софтвера зависи и од техничких услова, обучености учитеља за рад

са софтвером и времена које је неопходно за упознавање ученика са радом у динамичком окружењу. Поједини софтвери имају ограничену способност манипулације објектима, неки пак немају могућност репрезентације тродимензионалних објеката, док је код неких ограничена интерактивност у реалном времену.

Поред објективних тешкоћа са којима се и учитељи и ученици могу сусрести приликом коришћења Геогедре у учењу геометрије, треба имати на уму допринос који овај софтвер може да пружи формирању геометријских појмова и решавању проблема из геометрије. Почев од визуелизације, преко конструкције до резоновања, Геогедра олакшава сваки од поменутих процеса и чини да резултати буду ефикаснији.



## 4. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА

Бројна истраживања показују да препреке на које наилазе ученици приликом савладавања математичких садржаја често почивају на недовољном разумевању садржаја геометрије и неразвијеном геометријском резонувању. Као што смо већ навели, геометрија је област математике у којој је визуелизација један од кључних аспеката. С тим у вези, постоји велико интересовање истраживача за визуелизацију математичких појмова. Истражујући ефекте употребе софтвера Геогедра у побољшању квалитета знања, повећању нивоа постигнућа и трајности знања ученика, резултати великог броја истраживања потврђује чињеницу да могућност примене софтвера није ограничена на један одређени ниво математичког образовања, и не исцрпљује се само у домену визуелизације садржаја геометрије, већ и бројних других математичких појмова. У том циљу, наводимо резултате истраживања која могу послужити целовитијем сагледавању примене Геогедра у настави математике и ефеката те примене првенствено на садржаје геометрије, као и потенцијална ограничења која из те примене произлазе.

Страни и домаћи аутори бавили су се првенствено ефектима употребе Геогедра у настави математике на средњошколском и универзитетском нивоу (Agyei & Benning, 2015; Akanmu, 2016; Baltaci & Yildiz, 2015; Diković, 2009; Ljajko, Pavličić & Radulović, 2010; Horzum & Ünlü, 2017; Љајко, 2014; Миленковић, 2021; Milenković, Такачи & Вожић, 2024; Milenković & Vučićević, 2024). На основу анализе резултата видљиво је да се као последица примене софтвера знатно побољшавају постигнућа и мотивација испитаника за бављење математиком. Са друге стране, уочен је мали број емпиријских истраживања која су се бавила ефектима употребе Геогедра софтвера у почетној настави математике на нашим просторима, иако овај дидактичко-методички проблем завређује значајно место у литератури.

Гокче и Гунер истраживали су фреквенцију научних радова објављених на WoS (*Web of Science*) сервису у периоду између 2009. и 2021. године који су као предмет свог истраживања имали неки аспект примене софтвера Геогедра у настави. Том приликом открили су да се међу радовима објављеним на енглеском језику њих укупно 286 односи на поменути софтвер или неку његову карактеристику (динамичност, визуелизацију, интерактивност, итд.) (Gökçe & Güner, 2022). Уочили су тренд раста заинтересованости истраживача широм света за овај софтвер, на шта указује број радова којих је из године у годину све више. Неки од закључака истраживања јесу да су студије већином посвећене испитивању

особености употребе софтвера у процесу наставе и учења, док је са друге стране недовољан број студија које за предмет истраживања имају могућности превлачења и ротације које Геогедра такође пружа. Слично истраживање, које је обухватило дужи временски период, обавили су Аваџи и сарадници. Њихов циљ је био да утврде фреквенцију научних радова у вези са употребом Геогедре у настави математике објављених у периоду од 2007. до 2023. године (Awaji et al., 2025). За истраживање су користили *Скојус* (*Scopus*) базу, првенствено због њене интердисциплинарности. Том приликом идентификовали су 340 радова објављених на тему примене софтвера Геогедра у настави математике, при чему су утврдили да је највећи број радова (чак 53) публикован 2022. године. Установљено је такође да су аутори највећег броја радова из Турске, Шпаније и Индонезије, док су истраживачи из Републике Србије у посматраном периоду објавили 16 чланака на тему Геогедре у часописима реферисаним у *Скојус* бази.

Аканму (Akanmu, 2016) је 2015. године спровео експериментално истраживање на узорку од 105 ученика средњих школа у Нигерији, подељених у експерименталну и контролну групу. Сврха студије огледала се у испитивању учинка софтвера на исходе учења ученика, а налазима истраживања утврђено је да, иако на иницијалном тестирању није уочена статистички значајна разлика у постигнутим ученика обе групе, након спроведеног експерименталног програма и поновљеног тестирања ученици експерименталне групе постигли су више резултате.

Током израде докторске дисертације Љајко је обавио истраживање током шест школских година (од 2008/09. до 2013/14) са ученицима трећег разреда гимназије у Лепосавићу. Укупни узорак чинило је 125 ученика експерименталне групе и 91 ученик у контролној групи. Као проблем истраживања постављено је сагледавање могућег утицаја рачунарски потпомогнуте наставе на процес учења аналитичке геометрије у равни, док је циљ истраживања био утврђивање прихваћености излагања материје уз помоћ Геогедре и заинтересованости ученика за аналитичку геометрију у равни (Љајко, 2014). Као закључке истраживања аутор истиче да софтвер не треба посматрати само и искључиво као помоћно средство, већ као потенцијални извор информација и идеја. Наглашава да од софтвера не треба очекивати крајње решење проблема, већ помоћ у извршавању одређених делова задатка, проверавању хипотеза и стварању нових идеја за решавање задатог проблема. Истовремено упозорава и да не треба изоставити симболички приступ математици и пропустити формализовање идеја о изучаваним појмовима у рачунарском окружењу. Слично истраживање спровео је Прентовић школске 2012/13. године. На узорку од укупно 94 ученика трећег разреда гимназије обавио је експерименталну проверу и анализу утицаја примене рачунара и Геогедре на образовни учинак у настави аналитичке геометрије (Прентовић, 2014). У складу са циљем, постављена су три истраживачка задатка: утврдити разлике у квалитету и количини знања ученика, утврдити разлике у оспособљености за решавање проблемских задатака и утврдити разлике у трајности знања.

Примењени тестови показали су постојање статистички значајне разлике међу ученицима експерименталне и контролне групе и тиме потврдили постављене хипотезе да настава уз помоћ софтвера доводи до повећања образовног учинка у односу на класичан начин извођења наставе. Аутор наводи да настава уз помоћ софтвера представља посебан наставни систем којим се ученици оспособљавају за самостално учење и примену стечених знања, док истовремено умногоме доприноси и трајности знања.

У претходној студији Љајко је са сарадницима испитивао могућности које Геогедбра пружа у осавремењавању наставе аналитичке геометрије у средњошколској математици и тешкоће са којима се ученици могу сусрести у раду са софтвером (Љајко, Павлић & Радловић, 2010). Сprovedени експеримент је показао да Геогедбра може бити изузетно корисна ако се примењује на одговарајући начин. Оно што се појавило као потешкоћа током самог истраживања је неприпремљеност наставника за коришћење овог пакета. Наставници не поседују компетенције потребне за овакав начин рада и неопходно је боље их обучити за овакав процес, како би се избегле ситуације да ученици боље рукују софтвером од наставника. У дискусији резултата аутори истичу могућу појаву техноцентризма, ситуације у којој ученици разумевање појма повезују са употребом софтвера. Због тога, као најједноставнији начин да се избегне овакав став ученика, саветују комбиновање рада са софтвером и рада на табли и папиру. И Мукири је на узорку који је обухватао 270 ученика из шест средњих школа у Кенији испитивала употребу Геогедбре и начине на које се може иновирати средњошколска настава геометрије (Mukiri, 2016). Она је поредила ефекте учења обухваћених геометријских садржаја уз употребу поменутог софтвера и учење истих садржаја класичним моделом наставе, при чему је поређење добијених резултата вршила и у односу на пол. Након спроведене обуке за примену Геогедбре у настави, на узорку од 33 наставника извршила је испитивање њихових ставова о могућностима коришћења пакета за поучавање садржаја геометрије. Резултати до којих је дошла имплицирају да је, уз добру обученост наставника, настава организована уз примену софтвера ефикасна у повећању постигнућа ученика. Уочено је да до повећања постигнућа у области геометрије долази код ученика оба пола, чиме се превазилазе разлике у односу на пол.

Са циљем испитивања нивоа разумевања појма круга Шадан и Еу су спровели истраживање које је обухватало 53 деветогодишња ученика (Shadaan & Eu, 2013). Као полазну тачку наводе став да иако учитељи преносе ученицима знања потребна за разумевање појма круга, чини се да ученици ипак имају препреку да научено примене у задацима. Резултати истраживања требало је да дају одговор на питање како различите интеракције са технологијом, вршњацима и учитељима утичу на процес учења, односно да пруже информацију на који начин ученици различитих способности комуницирају са циљем извршења заједничког задатка. Ослањајући се на социјалну интеракцију у процесу учења Лава Виготског, аутори

су сматрали да би успешнији ученици информацијама и објашњењима поступака могли да помогну својим мање успешним вршњацима да достигну зону наредног развоја. Ради испитивања може ли Геогедбра да побољша резултате, аутори су реализовали експеримент у којем је једна група ученика користила софтвер приликом учења, док је друга група испитаника учила на класичан начин. Добијени резултати показали су да постоје статистички значајне разлике у обе групе, при чему су знатно виша постигнућа оне групе ученика која је приликом учења користила софтвер.

Тривахунинтас и сарадници бавили су се истраживањем у којој мери коришћење Геогедбра софтвера утиче на исходе учења геометрије у петом разреду основне школе. У истраживању је учествовало 50 ученика једне основне школе у Индонезији који су били подељени у контролну и експерименталну групу (Triwahyuningtyas, Rahayu & Agustin, 2019). У експерименталној групи ученика настава је реализована уз употребу софтвера, док је у раду са ученицима контролне групе коришћен *Microsoft Power Point*. Након иницијалног и финалног тестирања ученика и статистичке обраде добијених података истраживачи су анализирали какав утицај Геогедбра има на исходе учења геометрије. Ученици нису учили како да нацртају коцку и тространу призму у Геогедбри, већ да на основу приказане анимације склапања мреже површи препознају из којих делова се састоји геометријско тело (темена, ивице, дијагонале). На основу примењених статистичких тестова на резултатима добијеним истраживањем утврђено је да примена софтвера остварује позитиван ефекат на савладавање садржаја геометрије у петом разреду. Закључак је да коришћење софтвера ученицима олакшава разумевање настанка физичког простора и низа процеса који за резултат имају формирање геометријског простора.

На темељима претходне студије, Будински је са сарадницима испитивала могућности употребе оригами технике и Геогедбре у поучавању ученика петог разреда основне школе формалним геометријским дефиницијама. Циљ студије која је обухватала узорак од 35 ученика петог разреда био је да се уоче проблеми организације часа уз имплементацију оригами технике и технологије ради поучавања формалним геометријским дефиницијама, као и прикупљање доказа који сведоче о утицају поменутог приступа на процес конструисања геометријског знања (Budinski, Lavicza, Fenyvesi & Milinković, 2020). Сам садржај учења обухватао је препознавање геометријских објеката, правилно именовање, дефинисање формалним математичким језиком, препознавање математичких својстава објекта и вршење израчунавања уз помоћ тих својстава, док је употреба Геогедбре требало да подстакне ученике да истражују и математички размишљају. Добијени резултати студије показали су да оригами техника и Геогедбра могу бити од помоћи ученицима да стекну формално математичко знање и побољшају своје моторичке и дигиталне компетенције.

Мартиновски и Мартиновски (Martinovski & Martinovski, 2013) бавили су се анализом примењивости и прихватања Геогедре у основној школи у Републици Северној Македонији. На узорку од 124 ученика седмог разреда основне школе подељених у две групе (експерименталну и контролну) испитивали су да ли Геогедра утиче на повећање способности ученика да разумеју садржаје геометрије и алгебре. Конкретно, ученици из експерименталне групе учили су Питагорину теорему и квадрат бинома користећи се Геогедром, док су ученици контролне групе савладавали исте садржаје користећи уџбеник. Аутори наводе да су током трајања експерименталног програма истовремено били приказани и графички и алгебарски приказ Геогедре и тако, за разлику од класичног начина извођења наставе, допринели бољој визуелизацији математичких појмова. Бољем разумевању појма Питагорине теореме и квадрата бинома сведоче резултати финалног тестирања који указују на знатно боље резултате ученика експерименталне групе. Иако су обе групе ученика решавале исте проблеме који су се односили на поменуте садржаје, ученици који су учествовали у експерименталном програму били су знатно успешнији. Закључак аутора јесте да Геогедра побољшава начин размишљања ученика током решавања проблема и савладавања садржаја геометрије и алгебре.

Багат и Чанг испитивали су утицај коришћења образовног софтвера Геогедра на постигнућа ученика деветог разреда у учењу геометрије. Са тим циљем креирали су истраживање квазиексперименталног дизајна у којем је учествовало укупно 50 ученика деветог разреда средње школе у Индији (Bhagat & Chang, 2015). Истраживање је спроведено у три фазе. У првој су ученици експерименталне групе били обучени за коришћење софтвера, у другој фази ученици експерименталне групе су савладавали садржај уз помоћ Геогедре а ученици контролне класичним приступом. У трећој фази тестирана су постигнућа испитаника из обе групе (експерименталне и контролне) претходно припремљеним инструментом. За испитивање статистичке значајности разлика аутори су користили ANCOVA и добијена сигнификантност указује да постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика у корист групе која је користила софтвер. Ови налази у складу су са претходним истраживањима која су показала позитиван ефекат примене Геогедре на мотивацију ученика за учење геометријских садржаја (Doğan & İçel, 2011; Shadaan & Eu, 2013; Zengin, Furkan & Kutluca, 2012).

Сврха истраживања које су спровели Каја, Акчакин и Булут била је да се утврде ефекти употребе интерактивних табли и DGS софтвера (првенствено Геогедре) у поучавању и учењу геометријских трансформација (Кауа, Акчакин & Bulut, 2013). Тестом развијеним за потребе истраживања процењивана су постигнућа ученика у геометријским трансформацијама (транслацији, ротацији и симетрији). Статистички тестови примењени на добијеним резултатима иницијалног и финалног тестирања показали су да разлике у постигнућима у корист ученика експерименталне групе имају карактер статистичке значајности, док су

результати финалног теста ученика експерименталне групе знатно већи од ученика контролне групе. Желећи да утврде да ли избор одговарајућег софтвера или периферног уређаја (интерактивне табле, пројектора) доприноси постизању бољих резултата, аутори су дали предлог да се будуће студије спроведу са две паралелне групе, од којих би једна користила пројектор, док би друга радила уз коришћење интерактивне табле.

Са циљем испитивања нивоа геометријског резоновања ученика током учења равanske и просторне геометрије, Исмаил и Рахман (Ismail & Rahman, 2017) реализовали су истраживање на узорку од 30 ученика другог разреда основне школе у Малезији. Ученици су најпре класичним приступом без коришћења технологије учили о дводимензионалним и тродимензионалним фигурама, након чега је реализован тест заснован на прва три нивоа Ван Хиловог модела развоја геометријског резоновања (визуелизацији, анализи и неформалној дедукцији). Затим су ученици били у прилици да користећи интерактивне материјале преузете са сајта [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) развијају геометријско резоновање посматрајући промену димензија и положај 2D и 3D објеката. Упоредујући резултате добијене на финалном тестирању са иницијалним тестом уочено је да у домену визуелизације и неформалне дедукције објеката у равни разлика у постигнућима има карактер статистичке значајности, док је у раду са објектима у простору уочено да долази до повећања скорова ученика на свим нивоима геометријског резоновања. Са друге стране, аутори су желели да утврде да ли учење уз употребу Геогевре више доприноси развоју геометријског мишљења о дводимензионалном или тродимензионалном простору. Резултати истраживања показали су да су ученици били успешнији у анализи и неформалној дедукцији у односу на визуелизацију, што имплицира да за боље ефекте учења 3D објеката ученицима недостаје више рада у Геогевра окружењу и додатна зрелост у резоновању. Слично истраживање, са ученицима петог разреда основне школе, обавили су Удин и сарадници (Udin, Ismail & Alhassora, 2024). У експерименту са паралелним групама, испитивали су на који начин приликом овладавања основним појмовима геометрије мерења (обимом, површином и запремином) употреба Геогевре утиче на иста три нивоа Ван Хиловог модела геометријског мишљења као у студији Исмаила и Рахмана. Анализа резултата показала је да је дошло до приметног пораста нивоа мишљења у групи ученика који су у раду користили софтвер и са успехом овладали основним појмовима геометрије мерења.

Туткун и Озтурк (Tutkun & Ozturk, 2013) су основу за истраживање пронашли у ТИМСС и ПИСА пројектима евалуације знања у којима су турски ученици учествовали, а у којима су се на основу постигнутих резултата нашли испод ОЕСД просека. Реформом наставног програма математике за основне и средње школе спроведеном 2005. године наставни програм престаје да буде усредсређен на учитеље и наставнике и ученици почињу да заузимају централно место у настави. С обзиром на то да већину садржаја новог програма чине апстрактни

појмови који захтевају когнитивне активности и више нивое геометријског мишљења ученика, аутори су одлучили да испитају ефекте примене Геогебре на академски успех ученика и нивое геометријског мишљења у области тригонометрије и угла. Иако су резултати добијени прелиминарним тестирањем указали да не постоји статистички значајна разлика у постигнућима обе групе ученика, постоји статистички значајна разлика у постигнућима на финалном тесту у корист ученика из експерименталне групе. Вредности примењених статистичких тестова показале су да не постоји статистички значајна разлика у нивоима геометријског мишљења између ученика који су користили динамички софтвер и оних који су примењивали класични приступ. Такође, аутори су испитивали да ли постоји корелација између академског успеха и нивоа геометријског мишљења ученика обе групе и закључили да постигнућа нису у вези са нивоом геометријског мишљења на којем се ученици налазе. На основу резултата обављеног истраживања које је обухватало експериментални програм у трајању од четири седмице, аутори су дали препоруку да треба обавити дугорочна истраживања којима би се испитало да ли образовање ученика утиче на промену нивоа геометријског мишљења.

И Аделабу, Макгато и Рамалигела (Adelabu, Makgato & Ramaligela, 2019) спровели су на узорку ученика деветог разреда истраживање са циљем да утврде ниво геометријског мишљења ученика према Ван Хиловом моделу и како DGS софтвер унапређује геометријско мишљење ученика. Међу многобројним софтверима, на основу могућности које пружа, аутори су одлучили да испитају примену Геогебре и у складу са тим дефинисали одговарајуће истраживачке задатке. Пре почетка осмонедељног експерименталног програма спроведено је иницијално тестирање ученика у коме је утврђен ниво геометријског мишљења ученика експерименталне и контролне групе инструментом преузетим из Ван Хиловог теста геометријског мишљења. Резултати су показали да се ниво геометријског мишљења ученика експерименталне групе на финалном тесту статистички значајно разликује од ученика контролне групе у корист експерименталне групе, а то даље имплицира да Геогебра има утицај на повећање Ван Хилових нивоа геометријског мишљења. Аутори су објаснили да су овакви резултати очекивани имајући у виду да су током активности ученици били у прилици да виде објекте у динамичном окружењу софтвера, за разлику од њиховог статичног приказа у уџбеницима.

Тран је са својим сарадницима (Tran et al., 2014) испитивао ставове ученика и наставника о могућностима имплементације софтвера Геогебра у учење путем открића. Циљ им је био да испитају ставове учесника истраживања о подршци коју софтвер пружа у поучавању са једне и учењу са друге стране, затим у којој мери употреба Геогебре утиче на сарадњу ученика и наставника и колико буди интересовање наставника да примењују образовни софтвер при поучавању. Узорак истраживања чинило је 282 ученика и 37 наставника, а закључци добијени

на основу резултата указују на позитивне ефекте које даје учење путем открића у које је инкорпорирана употреба софтвера Геогедра. Налази истраживања показали су да софтвер води ефикасном учењу геометријских појмова, дефиниција и теорема, буди интересовање ученика за учење математике, док интеракцију ученика и наставника одржава на високом нивоу.

Томић (Томић, 2013) је истраживала корисност и могуће проблеме са којима се наставници сусрећу примењујући математички софтвер у учионици. Након анализе различитих типова математичких софтвера ауторка се, ослањајући се на резултате хрватских и страних истраживача, концентрисала на софтвер Геогедра истичући његове предности и ограничења. Позивајући се на Шуљића (Šuljić, 2005), као предности Геогедре истиче да је то професионално направљен пакет, добро примењив у основној и средњој школи, добро повезује алгебру и геометрију, једноставан је за употребу, поседује графику високог квалитета погодну за пројекцију у учионици, цртеже који су погодни за пренос у друге програме. Даље, ауторка наводи да софтвер даје могућност премештања објеката, али не свих, што може обесхрабрити ученике да манипулишу фигурама, ограничавајући њихове истраживачке способности. Истичући важност анимације у образовне сврхе Томић наводи ограничене могућности анимације у Геогедри сведене на употребу клизача.

Ибили (İbili, 2019) је спровео истраживање које је с једне стране имало сврху да истражи доступну литературу о образовном софтверу, његовим потенцијалима и ограничењима у настави геометрије са педагошког аспекта, док је с друге стране требало испитати ефекте примене истих софтвера када их учитељи користе као наставно средство. Предмет интересовања студије представљали су софтвери *GeoGebra*, *Cabri 2D/3D*, *Geometer's Sketchpad*, *Google SketchUp* и *Logo*, а узорак истраживања чинила су 183 наставника математике у основној школи. Добијени резултати показали су да је, међу испитиваним софтверима, стопа употребе Геогедре највиша (70%), док су вредности  $\chi^2$  теста показале да не постоји статистички значајна разлика када је реч о примени *DGS* софтвера у односу на пол испитаника. Такође, Ибили истиче да, иако се употреба *DGS* софтвера у настави геометрије промовише у оквиру актуелног курикулума, у великом броју студија закључак је да наставници често имају потешкоће у операционализацији софтвера у школским условима. Узрок томе лежи у недостатку искуства наставника у комбинацији употребе технологија и педагогије. Истраживање слично претходном обавили су Миликић, Вуловић и Михајловић. Наиме, аутори су испитивали заступљеност примене образовног софтвера у почетној настави математике у Републици Србији и ставове учитеља према софтверу (Миликић, Вуловић и Михајловић, 2020). Узорак истраживања чинило је 108 учитеља, а у складу са циљем истраживања формулисано је пет истраживачких задатака како би се утврдили: степен примене образовног софтвера у почетној настави математике; ставови учитеља о употреби образовног софтвера; потешкоће које се јављају при

обради садржаја у вези са разломцима; ставови учитеља о доприносу образовног софтвера превазилажењу уочених критичних тачака; степен примене софтвера Геогедра у почетној настави математике. Након спроведеног истраживања аутори су закључили да су испитаници првенствено имали проблем са терминолошким одређењем појма „образовни софтвер”. Као главне разлоге некоришћења софтвера у настави навели су недостатак времена, недовољну информисаност о софтверима за одређене области школске математике и друго. Када је о Геогедри реч, свега 17,59% учитеља одговорило је да су барем једном у свом раду користили овај софтвер, и то првенствено за садржаје геометрије везане за обраду појма обима и површине фигура. Учитељи који су га користили сматрају да доприноси разумевању садржаја, визуелизацији и испитивању особина геометријских фигура, док је велики број испитаника става да једну од препрека интензивнијем коришћењу Геогедра у почетној настави математике представља недостатак готових модела, што су налази и неких претходних студија (Žilinskienė & Demirbilek, 2015).

Прегледом стране и домаће литературе уочили смо евидентан допринос Геогедра постизању бољих исхода учења, виших нивоа геометријског резоновања, већег самопоуздања ученика, изградње позитивних ставова како ученика тако и наставника према примени овог софтвера у настави математике. Такође, запажена је недовољна заступљеност примене софтвера у настави математике, а нарочито у почетној настави геометрије. Мали број емпиријских истраживања о овој теми на нашим просторима и у оквиру првог циклуса обавезног образовања чине проблем примене софтвера Геогедра у почетној настави геометрије актуелним. Поменути разлози формирали су полазну основу у покушају да дамо одговор на питање да ли се применом Геогедра може поспешити учење у почетној настави геометрије.



## II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР

### 1. Проблем и предмет истраживања

Програми наставе и учења у прва четири разреда основне школе предвиђају знатан број часова за садржаје геометрије. Због нивоа когнитивног развоја на којем се ученици старосне доби од 7. до 11. године налазе и ограничења која из тог разлога произлазе, ученици не разумеју аксиоматски систем геометрије, већ геометријске појмове најпре упознају пропедевтички. Зато је неопходно створити услове у којима ће ученици знање стицати на бази изразите очигледности, како би могли лакше да визуелизују појам и најпре створе представу а затим и формирају његову менталну слику. Процес формирања менталне слике почиње посматрањем конкретних предмета, које постепено замењују модели геометријских објеката. Због ограничених могућности репрезентације, статични прикази могу онемогућити ученике да применом индуктивног облика закључивања на бази уочених односа међу објектима изводе одговарајуће закључке. Управо зато, узимајући у обзир ниво геометријског мишљења ученика млађих разреда основне школе, неопходно је да почетном наставом геометрије доминира очигледност, али не очигледност ради очигледности, већ са циљем формирања одговарајућег појма.

Образовни софтвер представља окосницу савремене наставе на свим нивоима образовања, те стога испитивање ефеката његове примене представља актуелан проблем педагошке теорије и праксе. Додатно, посматрано из угла методике почетне наставе математике, испитивање ефеката примене образовног софтвера у почетној настави геометрије чини проблем нашег истраживања значајнијим, те поседује изражен научни, педагошки и друштвени значај. Сам проблем истраживања огледа се у примени софтвера Геогедра на садржајима геометрије у почетној настави математике. У оквиру овако дефинисаног проблема истраживања намера нам је била да креирамо посебне динамичне моделе коришћењем софтвера и испитамо ефекте утицаја њихове примене на постигнућа ученика. Разлоге за овако дефинисан проблем истраживања идентификовали смо у званичним документима Републике Србије који се односе на образовање. У њима је наглашена потреба за трансформацијом поучавања и учења у правцу развоја образовања усклађеног са достигнућима науке, технике и технологије (*Стратегија развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године*). Развијање дигиталног образовања, које подразумева да учитељи буду дигитално оспособљени

да примене иновативне педагошке приступе којима интегришу ИКТ у образовни процес један је од приоритета савремене наставе. Да би ученици у првом циклусу обавезног образовања успешно формирали математичке појмове, осим иновација у области наставних система, метода и облика, неопходно је у процес наставе имплементирати и образовни софтвер.

Проблем истраживања чини значајним и чињеница да постоји мали број експерименталних истраживања која се баве сагледавањем почетне наставе геометрије са аспекта примене образовног софтвера, како у нашем образовном систему тако и шире. Добра овладаност садржајима геометрије и развијено геометријско мишљење чине једноставним превазилажење препрека на које ученици наилазе приликом савладавања садржаја математике који нису геометријски. Зато би суштинско повезивање садржаја математике (геометрије, аритметике, алгебре) допринело бољим образовним постигнућима ученика, повећало математичку писменост и обезбедило дуготрајност знања (Павловић Бабић и Бауцал, 2009).

У истраживању смо посебну пажњу посветили теоријским основама на којима почива Геогедра, анализи њеног настанка и развоја, одређивању суштинских обележја и структуралних елемената софтвера, као и емпиријској провери успешности његове практичне примене на садржајима геометрије. Предмет истраживања усмерен је на испитивање ефеката примене софтвера Геогедра у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе, побољшање постигнућа и трајност знања ученика. Сам предмет детерминисан је савременим схватањима о могућностима организације и реализације почетне наставе геометрије уз акценат на визуелизацији процеса учења/поучавања.

### Значај истраживања

Научни и педагошки значај истраживања примене софтвера Геогедра у учењу садржаја геометрије огледа се у чињеници да на територији Републике Србије до сада није обављено слично истраживање на узорку ученика у неком од прва четири разреда основне школе. Софтвер је најчешће коришћен у вишим разредима основне школе, па је ово први пут да је експериментално испитан утицај софтвера у учењу геометрије у четвртом разреду основне школе. Специјално за потребе истраживања креиран је програм учења који је усклађен са програмом наставе и учења у четвртом разреду основне школе. Велики број динамичних модела направљених уз употребу софтвера може послужити учитељима у извођењу наставе и у том смислу спроведено истраживање доприноси унапређивању наставе математике у основној школи. Коришћење креираних интерактивних динамичних модела омогућава визуелни приказ апстрактних геометријских појмова и тиме помаже ученицима да самостално, снагом сопствене мисли изводе закључке и врше генерализације. Овакви модели нису саставни део уџбеничких комплеката за математику у првом циклусу обавезног образовања, чиме је акценат

стављен на израду посебних активности за учитеље и динамичних модела апстрактних геометријских појмова.

Закључци истраживања могу пружити научној и стручној јавности бољи увид у могућности, ефекте и добробити примене софтвера Геогедра у почетној настави геометрије. Имајући у виду да бројна истраживања показују да употреба софтвера подстиче учење путем открића, намера овог истраживања није да се укаже на потребу за заменом очигледних наставних средстава образовним софтвером, већ на нужност њихове коегзистенције.

Друштвени значај истраживања произлази из чињенице да двадесет први век представља век дигитализације. Национални савет наставника математике сматра да је ИКТ пресудан за учење и поучавање математике (NCTM, 2000), а појава софтвера Геогедра само потврђује ову чињеницу. У ери ИКТ-а ученици одрастају у дигиталном окружењу, те би требало радити на стручном усавршавању учитеља, подизању њихових компетенција, како би били у стању да прате развој технологија и користе их у сврху образовања. Додатно, прегледом каталога програма сталног стручног усавршавања уочен је тренд опадања броја програма у вези са повећањем дигиталних компетенција учитеља и наставника за извођење наставе математике уз коришћење софтвера. То није у складу са препорукама *Стратегије развоја образовања у Републици Србији до 2030. године* која као фундаменталну наводи потребу за прилагођавањем наставника новим тенденцијама у образовању и усавршавању у складу са новинама које ће бити неопходне за будућност.

## 2. Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања јесте да се експериментално утврде ефекти примене софтвера Геогедра на побољшање постигнућа у учењу садржаја геометрије у четвртом разреду основне школе, као и трајност знања ученика у односу на реализацију истих садржаја класичним моделом извођења наставе.

Да би се овако постављени циљ истраживања реализовао, утврђени су следећи истраживачки задаци:

1. Испитати утицај примене Геогедра на образовна постигнућа ученика у области геометрије у четвртом разреду основне школе;
2. Утврдити утицај примене Геогедра на образовна постигнућа у односу на пол ученика;
3. Утврдити утицај примене Геогедра на образовна постигнућа ученика у односу на оцену из математике на крају трећег разреда основне школе;
4. Утврдити утицај примене Геогедра на образовна постигнућа у односу на општи успех ученика на крају трећег разреда основне школе;

5. Утврдити утицај примене Геогедбре на трајност знања из геометрије у почетној настави математике.

### 3. Хипотезе истраживања

На основу предмета, циља и задатака истраживања поставили смо општу и посебне хипотезе истраживања.

#### Општа хипотеза

Применом софтвера Геогедбра могуће је побољшати ниво постигнућа ученика у области геометрије у односу на класичан модел извођења наставе математике у четвртом разреду основне школе.

#### Посебне хипотезе

1. Примена Геогедбре у учењу садржаја геометрије доприноси повећању образовних постигнућа ученика четвртог разреда у области геометрије;
2. Примена Геогедбре у учењу садржаја геометрије доприноси повећању постигнућа у области геометрије без обзира на пол ученика;
3. Оцена из математике на крају трећег разреда основне школе не утиче на усвајање геометријских садржаја уз употребу Геогедбре;
4. Општи успех ученика на крају трећег разреда основне школе не утиче на усвајање геометријских садржаја уз употребу Геогедбре;
5. Примена Геогедбре доприноси повећању трајности усвојених геометријских знања ученика у почетној настави математике.

### 4. Варијабле истраживања

Независну варијаблу у истраживању представља модел учења уз употребу софтвера Геогедбра, што јесте фактор који се намерно уводи и чије ефекте утврђујемо. Модел учења који се примењује јесте експериментални програм који обухвата примену Геогедбре на садржајима геометрије у четвртом разреду основне школе.

Зависну варијаблу чине ефекти који настају под утицајем експерименталног програма, изражени кроз резултате ученика на финалном и поновљеном тесту знања.

Поред поменутих, издвојили смо и независне варијабле које се односе на карактеристике ученика: пол ученика; оцена из математике коју су постигли на крају трећег разреда основне школе (недовољан (1), довољан (2), добар (3),

врлодобар (4), одличан (5)); општи успех на крају трећег разреда основне школе (недовољан, довољан, добар, врлодобар, одличан).

## 5. Узорак истраживања

За потребе истраживања, из популације ученика основне школе одабран је узорак ученика који су током школске 2018/2019. године похађали четврти разред основне школе. Случајним избором у истраживању су учествовали ученици основних школа „Бошко Ђуричић” и „Рада Миљковић” из Јагодине. Пошто је истраживање засновано на експерименту са паралелним групама, ученици ОШ „Бошко Ђуричић” представљали су експерименталну групу (Е-група), док су ученици ОШ „Рада Миљковић” били у контролној групи (К-група). У реализацији истраживања учествовало је укупно девет одељења, и то четири одељења ОШ „Бошко Ђуричић” ( $n = 106$ ), три одељења у матичном објекту ОШ „Рада Миљковић” ( $n = 59$ ) и два одељења у истуреном одељењу на Стрелишту ( $n = 54$ ). За одређени број ученика изостали су резултати са иницијалног, финалног или поновљеног тестирања, односно након изузимања ученика који су радили према индивидуалном оперативном плану, разматрани су резултати укупно 207 ученика (103 ученика у Е-групи и 104 ученика у К-групи).

С обзиром на варијабле које смо у истраживању разматрали (пол ученика, оцена из математике, општи успех) узорак је стратификован. Имајући у виду да нисмо вршили формирање група, већ да смо одабрали унапред формиране групе ученика у одељењима, узорак истраживања је групни. Када је у питању узраст, изабрани су ученици четвртог разреда јер *Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа садржаје геометрије који су обухваћени истраживањем.

Сви ученици који су учествовали у истраживању долазе из градске средине, припадају средњем социјалном сталежу, па можемо рећи да су уједначени. Уједначавање ученика Е-групе и К-групе урађено је према оцени из математике и општем успеху, док су разлике које постоје између група контролисане статистичким поступцима.

Полна структура ученика установљена је увидом у педагошку евиденцију школа у којима је истраживање извршено (Табела 4).

Табела 4. Структура узорка у односу на пол ученика

|        | Е-група | К-група | Укупно |
|--------|---------|---------|--------|
| Мушки  | 50      | 43      | 93     |
| Женски | 53      | 61      | 114    |
| Укупно | 103     | 104     | 207    |

Структура ученика у односу на општи успех постигнут на крају трећег разреда основне школе дата је у Табели 5. На основу представљених података може се уочити да је у обе групе највећи број ученика завршио трећи разред са одличним успехом – у Е-групи 86 ученика (83,5%), у К-групи 81 ученик (77,9%). Врлодобар општи успех на крају трећег разреда постигло је 14 ученика (13,6%) експерименталне и 21 ученик (20,2%) контролне групе. Број ученика обе групе који су постигли добар или довољан општи успех на крају трећег разреда основне школе је у великој мери уједначен. Два ученика (1,9%) експерименталне и један ученик (1,0%) контролне групе постигли су добар општи успех, док је претходни разред са довољним општим успехом завршио по један ученик у обе групе.

Табела 5. Структура узорка у односу на општи успех ученика

|           | Е-група | К-група | Укупно |
|-----------|---------|---------|--------|
| Одличан   | 86      | 81      | 167    |
| Врлодобар | 14      | 21      | 35     |
| Добар     | 2       | 1       | 3      |
| Довољан   | 1       | 1       | 2      |
| Укупно    | 103     | 104     | 207    |

У Табели 6 дата је структура ученика у односу на оцену из математике постигнуту на крају трећег разреда основне школе. Највећи проценат испитаника из математике је на крају трећег разреда имао оцену *одличан* – у Е-групи 67 ученика (65,0%), а у К-групи 60 ученика (57,7%). Затим следе ученици који су имали оцену *врлодобар*, у Е-групи 22 (21,4%) а у К-групи 27 (26,0%). Прилично је уједначен број ученика обе групе који су из математике имали оцену *добар* и *довољан*. Девет ученика (8,7%) из Е-групе и десет из К-групе (9,6%) имало је оцену *добар* (3). Пет ученика Е-групе (4,9%) имало је оцену *довољан*, док је исту оцену имало седам ученика К-групе (6,7%).

Табела 6. Структура узорка у односу на оцену из математике

|               | Е-група | К-група | Укупно |
|---------------|---------|---------|--------|
| Одличан (5)   | 67      | 60      | 127    |
| Врлодобар (4) | 22      | 27      | 49     |
| Добар (3)     | 9       | 10      | 19     |
| Довољан (2)   | 5       | 7       | 12     |
| Укупно        | 103     | 104     | 207    |

## 6. Методе истраживања

На основу формулисаног циља истраживања и задатака извршен је одабир одговарајућих метода, техника и инструмената. Коришћене су метода теоријске анализе, дескриптивна и експериментална метода. Истраживање је започето методом теоријске анализе, која је коришћена током израде теоријског оквира. Истом методом извршена је и анализа различитих схватања примене образовног софтвера, што је омогућило да се створи теоријска основа истраживања. Анализирани су научни радови теоријског и емпиријског карактера који су се односили на различите теорије развоја геометријског мишљења, анализу настанка образовног софтвера, развој и карактеристике софтвера Геогедра и његову примену у настави. Метода теоријске анализе коришћена је и за конципирање оквира методичке трансформације садржаја геометрије уз употребу Геогедра у четвртном разреду основне школе. Дескриптивна метода примењена је приликом сакупљања података о учесницима истраживања (пол, оцена из математике, општи успех, резултати тестова), при обради добијених резултата, њиховој интерпретацији и извођењу закључака. Експериментална метода (педагошки експеримент са паралелним групама) коришћена је у циљу утврђивања постојања узрочно-последичних веза између употребе Геогедра софтвера и повећања образовних постигнућа ученика у области геометрије у четвртном разреду основне школе. Непосредно пре почетка експеримента формиране су две групе испитаника (Е-група и К-група) и уједначене према карактеристичним обележјима ученика (према полу, општем успеху ученика на крају трећег разреда основне школе, оцени из математике на крају трећег разреда). Након тога је обављено иницијално тестирање ученика обе групе са циљем да се утврди иницијални ниво знања геометријских садржаја пре почетка експеримента. После иницијалног тестирања у Е-групу је уведен експериментални програм, док је К-група радила на уобичајен начин. Извођење наставе математике у Е-групи је подразумевало употребу посебно припремљених модела часова који су укључивали методичку трансформацију садржаја уз употребу Геогедра. У трајању од 21 часа ученицима Е-групе су презентовани садржаји геометрије предвиђени програмом наставе и учења за четврти разред основне школе уз константну примену софтвера. У истом периоду у К-групи исте наставне јединице су обрађиване без коришћења образовног софтвера. Након обављеног експеримента уследило је финално тестирање обе групе испитаника са циљем утврђивања нивоа образовних постигнућа. Након четири месеца од реализације експеримента и финалног тестирања, спроведено је поновљено тестирање знања ученика како би се утврдио ниво трајности знања ученика о садржајима геометрије који су обухваћени истраживањем.

## 7. Технике и инструменти истраживања

Од научно-истраживачких техника током истраживања применили смо тестирање. Спровели смо тестирање знања ученика који су учествовали у истраживању са циљем утврђивања утицаја експерименталног програма на њихова образовна постигнућа. Тестирање је обављено у три наврата. Иницијално тестирање знања спроведено је непосредно пред почетак реализације експеримента, финално је обављено по завршетку експеримента, док је поновљено тестирање спроведено четири месеца након окончања експеримента и извршеног финалног тестирања. Сва тестирања обухватала су обе групе испитаника (експерименталну и контролну) како бисмо утврдили ниво постигнућа и трајност знања ученика под утицајем експерименталног програма, односно класичног приступа настави.

Када је реч о инструментима, током истраживања коришћени су тестови знања. За потребе истраживања коришћена су три теста знања. Састојали су се од претходно формираног сета задатака издвајањем и модификовањем задатака према категоријама и општим стандардима постигнућа ученика. Приликом избора задатака, фокус је био на садржајима који према општим стандардима постигнућа припадају области Геометрија. Сваки од тестова (иницијални, финални, ретест) садржао је по осам задатака који су у складу са *Општим стандардима постигнућа – образовним стандардима за крај првог циклуса обавезног образовања – Мајематика* били распоређени у три групе. У првој групи ученици су решавали задатке применом знања на основном нивоу образовних постигнућа, док су задаци из друге групе подразумевали примену знања средњег нивоа постигнућа, а најтежи задаци захтевали од ученика да примењују знања на напредном нивоу. Сваки задатак вреднован је са највише десет бодова, односно максималан број бодова на сваком од три теста износио је 80.

Иницијални тест знања (Прилог 1) састојао се од осам задатака распоређених по нивоима сложености и обухватао садржаје геометрије који се изучавају у прва три разреда основне школе. Задаци на иницијалном тесту били су распоређени на следећи начин: основни ниво (први и трећи задатак), средњи ниво (други, четврти и пети задатак) и напредни ниво (шести, седми и осми задатак). У домену основног нивоа постигнућа, од ученика је захтевано да именује геометријске објекте у равни и користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица. На средњем нивоу, да уочи међусобне односе геометријских објеката у простору, претвори јединице за мерење дужине и препозна образац за израчунавање обима правоугаоника. На напредном нивоу знања требало је да израчуна обим троугла, квадрата и правоугаоника када су подаци дати у истим мерним јединицама, израчуна обим троугла и квадрата и израчуна обим сложене фигуре у равни када су подаци дати у истим мерним јединицама.

Финални тест знања (Прилог 2) такође је садржао осам задатака. Задаци на финалном тесту били су у вези са садржајима геометрије обухваћеним експерименталним програмом. Примењен је приликом финалног тестирања, по реализацији експерименталног програма, како би се утврдио ниво знања ученика у области геометрије и ефекти које примена софтвера Геогебра остварује на знања ученика. Према нивоима постигнућа задаци на финалном тесту били су распоређени на следећи начин: основни ниво (први и други задатак), средњи ниво (трећи, четврти и пети задатак) и напредни ниво (шести, седми и осми задатак). На основном нивоу постигнућа, ученик је требало да именује геометријске објекте и користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица. На средњем, да ученик зна јединице за мерење површине и њихове односе, препозна мрежу коцке и израчуна површину квадрата када су подаци дати у истим мерним јединицама. На напредном нивоу, требало је да израчуна обим и површину квадрата и правоугаоника и израчуна површину сложене фигуре.

Ретест знања (Прилог 3) такође је садржао осам задатака, а спроведен је четири месеца после финалног тестирања. Ретестом је требало утврдити ефекте примене Геогебра софтвера на трајност знања ученика из експерименталне групе у односу на контролну групу. Као на иницијалном и финалном тесту, на ретесту су задаци су били распоређени према нивоима постигнућа: основни ниво (први и други задатак), средњи ниво (трећи, четврти и пети задатак) и напредни ниво (шести, седми и осми задатак). Од ученика на основном нивоу постигнућа, захтевано је да именује геометријске објекте и користи поступак мерења површине објекта, приказаног на слици, при чему је дата мерна јединица; у домену средњег нивоа ученик је требало да зна јединице за мерење површине и њихове односе, препозна мрежу коцке и уме да израчуна површину квадрата када су подаци дати у истим мерним јединицама; на напредном нивоу ученик је требало да израчуна обим и површину квадрата и правоугаоника и израчуна површину сложене фигуре.

Сва три тестирања су обављена током једног школског часа (свако тестирање је трајало по 45 минута), у истом дану у свим одељењима из узорка, чиме се умањило могући утицај паразитарних фактора. Тестирања су у обе групе спроведена под истим условима, односно приликом решавања задатака са финалног и поновљеног теста ученици нису имали могућност употребе Геогебре.

С обзиром на то да су за потребе истраживања конструисани одговарајући мерни инструменти за мерење нивоа постигнућа ученика четвртог разреда у садржајима геометрије који су обухваћени истраживањем, најпре је извршена провера метријских карактеристика тестова. Стављањем ученика током решавања задатака са тестова у приближно исте услове обезбеђена је објективност тестова. У обе групе испитаника учитељи су добили истоветна упутства на који начин

треба спровести тестирање, док су бодовање задатака обавила два независна оцењивача, након чега је провером степена слагања резултата проверена објективност тестова. За утврђивање релијабилности тестова коришћен је Кронбах алфа (Cronbach's  $\alpha$ ) коефицијент корелације којим је мерена унутрашња сагласност тестова. Вредност Кронбах алфа коефицијента за иницијални тест знања је износила 0,703, а за финални 0,868. Будући да су вредности више од 0,7, коришћени тестови се могу сматрати прихватљивим и поузданим (Максимовић и Османовић, 2020; Taber, 2018). Како је ретест био еквивалентан финалном тесту, са истим бројем задатака и начином бодовања, његова релијабилност није испитивана. Валидност, као једна од метријских карактеристика, односи се на степен до ког тест мери оно што треба да мери. Сва три коришћена теста конструисана су у сарадњи са методичарем наставе математике и учитељима одељења у којима је спроведено истраживање. У првој верзији иницијалног теста налазило се петнаест задатака чији је број након неколико верзија и обављеног пилот тестирања редукован и сведен на осам задатака који су распоређени према нивоима образовних постигнућа. Финални тест, који је садржао осам задатака, такође је креиран након неколико верзија и пилотирања. Приликом одабира задатака за тестове примењена је логичка и садржајна валидација, чиме је утврђен степен слагања задатака на тесту са садржајима геометрије предвиђеним програмима наставе и учења за први циклус обавезног образовања.

## 8. Припрема и ток истраживања

Истраживање је спроведено током другог полугодишта школске 2018/19. године. Експериментом са паралелним групама је у контролисаним условима проверавано на који начин употреба софтвера Геогедра приликом поучавања и учења садржаја геометрије утиче на образовна постигнућа ученика у четвртом разреду основне школе. Педагошким експериментом са паралелним групама обухваћено је девет одељења четвртог разреда из две градске школе са територије града Јагодине (четири одељења у Е-групи и пет у К-групи). Пре почетка експеримента, обављени су разговори са управама обе школе, педагошко-психолошким службама, учитељима у чијим одељењима је реализован експериментални део истраживања, прикупљене су сагласности родитеља ученика и упознати су са циљем и предметом, садржајем и динамиком истраживања. Пре реализације истраживања спроведена је методичка трансформација садржаја геометрије и уз употребу софтвера креирани су модели за коришћење на часовима у Е-групи. Обављено је и пилотирање инструмената, а након тога и иницијално тестирање знања ученика у свих девет одељења. По почетку експеримента, ученици Е-групе су на часовима редовне наставе садржаје обухваћене истраживањем усвајали и увежбавали уз примену посебно креираног експерименталног програма, док су исти садржаји у одељењима К-групе обрађивани на класичан начин.

Експерименталним програмом су обухваћени сви садржаји наставне теме *Геометрија* који су предвиђени програмом наставе и учења Математике у четвртом разреду основне школе. Експеримент је укупно трајао 21 школски час, након чега је извршено финално тестирање знања свих ученика. У Табели 7 дат је списак свих наставних јединица које су биле укључене у експериментални програм.

Табела 7. Вежбе у оквиру експерименталног програма

| Редни број часа | Назив наставне јединице                                    | Тип часа   |
|-----------------|------------------------------------------------------------|------------|
| 1.              | Површина фигуре. Мерење површине                           | Обрада     |
| 2.              | Површина фигуре. Мерење површине                           | Утврђивање |
| 3.              | Јединице мере за површину $m^2$ , $dm^2$ , $cm^2$ , $mm^2$ | Обрада     |
| 4.              | Јединице мере за површину $m^2$ , $dm^2$ , $cm^2$ , $mm^2$ | Утврђивање |
| 5.              | Јединице мере за површину веће од $m^2$                    | Обрада     |
| 6.              | Јединице мере за површину веће од $m^2$                    | Утврђивање |
| 7.              | Израчунавање површине правоугаоника                        | Обрада     |
| 8.              | Израчунавање површине правоугаоника                        | Утврђивање |
| 9.              | Израчунавање површине квадрата                             | Обрада     |
| 10.             | Израчунавање површине квадрата                             | Утврђивање |
| 11.             | Израчунавање површине правоугаоника и квадрата             | Утврђивање |
| 12.             | Квадар и коцка. Особине квадра                             | Обрада     |
| 13.             | Квадар и коцка. Особине коцке                              | Обрада     |
| 14.             | Квадар и коцка. Особине квадра и коцке                     | Утврђивање |
| 15.             | Мрежа квадра и коцке                                       | Обрада     |
| 16.             | Мрежа квадра и коцке                                       | Утврђивање |
| 17.             | Израчунавање површине квадра                               | Обрада     |
| 18.             | Израчунавање површине квадра                               | Утврђивање |
| 19.             | Израчунавање површине коцке                                | Обрада     |
| 20.             | Израчунавање површине коцке                                | Утврђивање |
| 21.             | Израчунавање површине квадра и коцке                       | Утврђивање |

Како би се обезбедили исти услови за рад у свим одељењима Е-групе, све часове математике током трајања експеримента изводио је аутор истраживања. По завршетку експерименталног програма обе групе испитаника решавале су финални тест знања са циљем утврђивања ефикасности примене експерименталног програма у односу на класичан модел извођења наставе (крајем априла 2019. године). Почетком септембра 2019. године извршено је поновно тестирање

знања свих испитаника како би се утврдио утицај употребе Геогедре на трајност знања ученика у области геометрије.

## 9. Обрада података

На основу података добијених истраживањем применом претходно наведених истраживачких инструмената, извршена је статистичка обрада података стандардном квантитативном и квалитативном анализом. Обрада података заснована је на употреби стандардних статистичких поступака, статистичког описивања и закључивања, и у ту сврху коришћен је софтверски пакет специјализован за статистичку обраду података *IBM SPSS Statistics 23*.

Статистички поступци који су коришћени у анализи резултата јесу следећи:

- Једнофакторска анализа варијансе (ANOVA) за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима на тестовима знања између ученика Е-групе и К-групе;
- Двофакторска анализа варијансе за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима између испитаника у односу на независне варијабле (пол, општи успех, оцена из математике);
- Анализа коваријансе (ANCOVA) за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима између ученика експерименталне и контролне групе, при чему је уклоњена варијанса у зависној променљивој узрокована коваријатом, чиме је постигнуто статистичко уједначавање група;
- Колмогоров-Смирнов тест за утврђивање нормалности расподеле скорова на тестовима знања.
- Кронбах алфа коефицијент корелације којим су утврђене метријске карактеристике конструисаних инструмената;

Поред наведених статистичких поступака, примењени су фреквенција, аритметичка средина, процентуално, графичко и табеларно приказивање података.

### III АНАЛИЗА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА И ЊИХОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА

#### 1. ГЕОГЕБРА И ОБРАЗОВНА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА У ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИЈЕ

У складу са дефинисаним истраживачким задацима требало је утврдити утицај примене софтвера на постигнућа ученика у учењу геометријских садржаја у четвртом разреду основне школе. Ефекти примене су испитани најпре кроз укупно образовно постигнуће које су ученици остварили на тестовима знања, а затим и у зависности од пола ученика, оцене из математике и општег успеха. На основу овако дефинисаног задатка постављена је и тестирана хипотеза да *примена Геогембре у учењу садржаја геометрије доприноси повећању образовних постигнућа ученика у области геометрије*.

Пре увођења експерименталног програма обављено је иницијално тестирање знања свих ученика. Резултати тестирања су показали да су постигнућа ученика Е-групе и К-групе била прилично уједначена (Табела 8). Резултати Левеновог теста ( $p = 0,066$ ) показали су да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе и да се за тестирање статистичке значајности разлика у постигнућима ученика Е-групе и К-групе на иницијалном мерењу може применити анализа варијансе. Добијени резултати анализе варијансе ( $F(1,205) = 0,541$ ;  $p = 0,463$ ) потврђују да разлике нису статистички значајне.

Табела 8. Постигнућа ученика Е-групе и К-групе на иницијалном и финалном тестирању

|                         |         | <i>n</i> | M     | SD    | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------------|---------|----------|-------|-------|----------------------------------|-------------|
|                         |         |          |       |       | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Иницијално<br>тестирање | Е-група | 103      | 45,02 | 18,32 | 41,44                            | 48,60       |
|                         | К-група | 104      | 43,28 | 15,54 | 40,26                            | 46,30       |
|                         | Укупно  | 207      | 44,14 | 16,96 | 41,82                            | 46,47       |
| Финално<br>тестирање    | Е-група | 103      | 55,10 | 25,93 | 50,03                            | 60,17       |
|                         | К-група | 104      | 41,84 | 19,14 | 38,12                            | 45,56       |
|                         | Укупно  | 207      | 48,44 | 23,67 | 45,20                            | 51,68       |

Непосредно након реализације експерименталног програма обављено је финално тестирање знања ученика. На основу Табеле 8 може се уочити да су знатно више просечне резултате остварили ученици Е-групе ( $M = 55,10$ ;  $SD = 25,93$ ), док су ученици К-групе остварили благи пад у просечном броју поена у односу на иницијално мерење ( $M = 41,84$ ;  $SD = 19,14$ ).

Сигнификантност Левеновог теста у финалном мерењу мања је од 0,05, те су посматрани резултати Велшовог и Браун–Форсајтовог теста који су отпорни на кршење претпоставке о хомогености варијансе (Pallant, 2011) и потврђено је да разлика у резултатима на финалном тестирању има карактер статистичке значајности у корист Е-групе (Табела 9). Статистичка значајност разлика у постигнућима ученика на финалном тестирању тестирана је такође анализом варијансе и утврђено је да је разлика између Е-групе и К-групе статистички значајна ( $F(1,205) = 17,539$ ;  $p < 0,0005$ ).

Табела 9. Варијанса иницијалног и финалног тестирања

|                      | Levene statistic | df1 | df2 | Sig.  |
|----------------------|------------------|-----|-----|-------|
| Иницијално тестирање | 3,420            | 1   | 205 | 0,066 |
| Финално тестирање    | 12,059           | 1   | 205 | 0,001 |

*Robust Tests of Equality of Means*

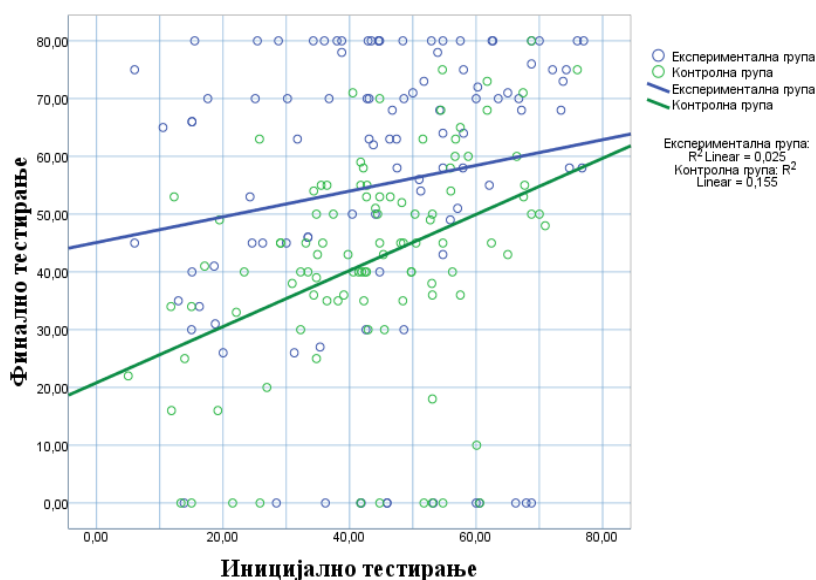
|                   |                | Statistic | df1 | df2     | Sig.  |
|-------------------|----------------|-----------|-----|---------|-------|
| Финално тестирање | Welch          | 17,489    | 1   | 187,648 | 0,000 |
|                   | Brown–Forsythe | 17,489    | 1   | 187,648 | 0,000 |

На основу резултата статистичких тестова да се закључити да је Е- група ученика остварила статистички значајан напредак у односу на ученике К-групе. Ученици из Е-групе са већим успехом су решавали математичке проблеме које су садржали задаци на финалном тесту знања и на тај начин постигли и боље резултате у односу на ученике К-групе који су исте садржаје савладавали класичним моделом наставе. Овим је потврђена полазна претпоставка о доприносу који примена Геогебра софтвера остварује на повећање нивоа образовних постигнућа ученика у почетној настави геометрије. У циљу отклањања сумње да су резултати статистичких тестова последица неуједначености Е-групе и К-групе и како би се утврдила поузданост добијених резултата, извршена је анализе коваријансе (ANCOVA). Статистички је отклоњен утицај једне додатне (непрекидне) променљиве коју је представљао резултат постигнут на иницијалном тестирању. Коваријат (резултат са иницијалног тестирања) измерен је непосредно пре увођења експерименталног фактора и његова поузданост јесте добра, што потврђује и Кронбах алфа коефицијент корелације (Табела 10).

Табела 10. Кронбах алфа коефицијент корелације иницијалног теста

| Cronbach's Alpha | Cronbach's Alpha Based on Standardized Items | N of Items |
|------------------|----------------------------------------------|------------|
| 0,703            | 0,713                                        | 8          |

За проверу линеарности зависне променљиве (резултата финалног тестирања) и коваријата коришћен је дијаграм растурања (Графикон 2). Са графикана се уочава да је и у Е-групи и у К-групи однос између зависне променљиве и коваријата линеаран, односно праволинијски. Тиме је потврђена претпоставка о линеарности зависне променљиве и коваријата.



Графикон 2. Линеарност зависне променљиве и коваријата

Вредност хомогености регресионих нагиба између коваријата и зависне променљиве у обе групе утврђен је статистички. Вредност интеракције коваријата и зависне променљиве није статистички значајна ( $F = 2,052$ ;  $p = 0,154$ ) (Табела 11) и указује да хомогеност регресионих нагиба није нарушена и да су испуњени услови за примену анализе коваријансе.

Табела 11. Хомогеност регресионих нагиба

| Source                       | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  |
|------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|
| Corrected Model              | 16658,109 <sup>a</sup>  | 3   | 5552,703    | 11,409 | 0,000 |
| Intercept                    | 28250,632               | 1   | 28250,632   | 58,045 | 0,000 |
| Група                        | 3828,926                | 1   | 3828,926    | 7,867  | 0,006 |
| Иницијално тестирање         | 7221,240                | 1   | 7221,240    | 14,837 | 0,000 |
| Група * Иницијално тестирање | 998,548                 | 1   | 998,548     | 2,052  | 0,154 |
| Error                        | 98801,002               | 203 | 486,704     |        |       |
| Total                        | 601260,000              | 207 |             |        |       |
| Corrected Total              | 115459,111              | 206 |             |        |       |

R Squared = 0,144 (Adjusted R Squared = 0,132)

Анализа коваријансе између група има карактер статистичке значајности ( $F(1,204) = 16,970$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 12) и указује на то да су разлике у постигнућима ученика Е-групе и К-групе настале под утицајем примене софтвера статистички значајне. Анализа коваријансе чини да се одбаци сумња да су услед недовољне уједначености експерименталне и контролне групе настале разлике у постигнућима ученика, већ потврђује да су разлике настале као последица експерименталног модела рада.

Табела 12. Анализа коваријансе

| Dependent Variable: Финално тестирање |                         |     |             |        |       |                     |
|---------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Source                                | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                       | 15659,561 <sup>a</sup>  | 2   | 7829,780    | 16,005 | 0,000 | 0,136               |
| Intercept                             | 30162,637               | 1   | 30162,637   | 61,655 | 0,000 | 0,232               |
| Група                                 | 8301,717                | 1   | 8301,717    | 16,970 | 0,000 | 0,077               |
| Иницијално тестирање                  | 6559,814                | 1   | 6559,814    | 13,409 | 0,000 | 0,062               |
| Error                                 | 99799,550               | 204 | 489,213     |        |       |                     |
| Total                                 | 601260,000              | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                       | 115459,111              | 206 |             |        |       |                     |

a. R Squared = 0,136 (Adjusted R Squared = 0,127)

Парцијални ета квадрат (Табела 12) показује који део варијансе у зависној променљивој (финалном тестирању) је објашњен независном променљивом (група). Вредност од 0,077 указује на умерени утицај примене софтвера у савладавању садржаја геометрије (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). Тумачењем ове вредности може се закључити да се 7,7% варијансе у финалном тестирању може објаснити независном променљивом. Када се уклони утицај независне променљиве, утицај коваријата (иницијалног тестирања) на резултате постигнуте на финалном тестирању такође има карактер статистичке значајности ( $F(1,204) = 13,409$ ;  $p < 0,0005$ ). Парцијални ета квадрат (0,062) показује да постоји умерена повезаност између резултата добијених на иницијалном и финалном тестирању, и њиме се може објаснити 6,2% варијансе на финалном тестирању.

На основну добијених резултата може се закључити да употреба Геогевре остварује позитиван утицај на повећање нивоа образовних постигнућа ученика, чиме је и потврђена полазна претпоставка да примена Геогевре у учењу садржаја геометрије доприноси повећању образовних постигнућа ученика у области геометрије у четвртом разреду основне школе. Ово је закључак бројних истраживања ефеката примене Геогевре софтвера, не само на основношколском, већ и на другим нивоима образовања (Akanmu, 2016; Bhagat & Chang, 2015; Bulut et al., 2016; Bwalya, 2019; Љајко, 2014; Kaya, Akçakin & Bulut, 2013; Martinovski & Martinovski, 2013; Mukiri, 2016; Прентовић, 2014; Shadaan & Eu, 2013; Thambi & Eu, 2013; Triwahyuningtyas, Rahayu & Agustin, 2019; Tutkun & Ozturk, 2013; Zdráhal, Dofková & Nocar, 2019). Оно што је заједнички именитељ свих поменутих истраживања јесте да Геогевра доприноси повећању постигнућа и чини да ученици боље разумеју математичке садржаје у поређењу са класичним моделом извођења наставе.

Јаснија представа о доприносу који употреба софтвера пружа приликом савладавања садржаја почетне наставе геометрије може се стећи тек уколико се анализира и утицај који Геогевра остварује у раду са ученицима на основном, средњем и напредном нивоу образовних постигнућа. Додатно, оно што такође може осветлити домете примене софтвера јесте анализа постигнућа ученика у односу на пол, општи успех и оцену из математике.

### 1.1. Геогевра и образовна постигнућа ученика по нивоима

Поред праћења ефеката примене софтвера на свеукупна постигнућа ученика у области геометрије, намера је и да се утврди у којој мери примена Геогевре остварује ефекте на три нивоа образовних постигнућа ученика (основном, средњем и напредном нивоу).

### 1.1.1. Геогедра и образовна постигнућа ученика на основном нивоу

Резултати добијени на иницијалном тестирању показују да су на основном нивоу постигнућа у области геометрије ученици који су чинили К-групу постигли мало бољи резултат ( $M = 15,67$ ;  $SD = 3,56$ ) у поређењу са ученицима одељења у којима је након иницијалног тестирања спроведен експериментални програм ( $M = 15,05$ ;  $SD = 4,76$ ) (Табела 13).

Табела 13. Постигнућа ученика на основном нивоу

|                         |         | <i>n</i> | M     | SD   | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------------|---------|----------|-------|------|----------------------------------|-------------|
|                         |         |          |       |      | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Иницијално<br>тестирање | Е-група | 103      | 15,05 | 4,76 | 14,12                            | 15,98       |
|                         | К-група | 104      | 15,67 | 3,56 | 14,98                            | 16,36       |
|                         | Укупно  | 207      | 15,36 | 4,20 | 14,79                            | 15,94       |
| Финално<br>тестирање    | Е-група | 103      | 15,24 | 7,15 | 13,84                            | 16,64       |
|                         | К-група | 104      | 14,13 | 6,44 | 12,88                            | 15,39       |
|                         | Укупно  | 207      | 14,69 | 6,81 | 13,75                            | 15,62       |

На основу резултата финалног тестирања знања може се приметити да су просечни резултати Е-групе ученика бољи ( $M = 15,24$ ;  $SD = 7,15$ ), док су ученици К-групе остварили пад у просечном броју поена у односу на иницијално тестирање ( $M = 14,13$ ;  $SD = 6,44$ ) (Табела 13).

Сигнификантност Левеновог теста приликом финалног мерења већа је од 0,05 ( $F = 0,746$ ;  $p = 0,803$ ), чиме је потврђена претпоставка о једнакости варијансе (Табела 14), па је статистичка значајност разлика у постигнућима ученика на основном нивоу добијених на финалном тесту тестирана двофакторском анализом варијансе.

Табела 14. Левенов тест једнакости варијансе на основном нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 0,746                                 | 25  | 164 | 0,803 |

По уклањању утицаја коваријата (резултата иницијалног теста), утврђено је постојање статистички значајних разлика у постигнућима ученика Е-групе и К-групе на основном нивоу ( $F = 3,058$ ;  $p = 0,028$ ) (Табела 15). Парцијални ета квадрат износи 0,018 чиме указује на мали утицај варијансе у резултатима финалног тестирања (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). На основу вредности добијеног парцијалног ета квадрата да се закључити да се 1,8% варијансе у финалном

тестирању (на основном нивоу постигнућа) може објаснити утицајем независне променљиве.

Посматрањем утицаја коваријата (постигнућа ученика на основном нивоу приликом иницијалног тестирања) на постигнућа ученика на истом нивоу на финалном тесту након уклањања утицаја независне променљиве (група), добијене разлике су статистички значајне ( $F = 5,326$ ;  $p = 0,016$ ) (Табела 15). Парцијални ета квадрат износи 0,162 и указује на велики утицај варијансе у резултатима финалног тестирања.

Табела 15. Анализа коваријансе на основном нивоу постигнућа

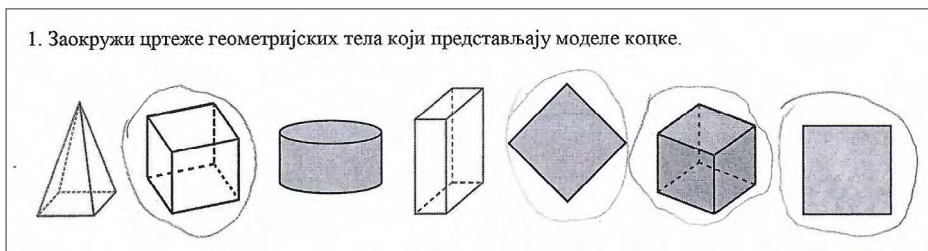
| Tests of Between-Subjects Effects     |                         |     |             |         |       |                     |
|---------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|---------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Финално тестирање |                         |     |             |         |       |                     |
| Source                                | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                       | 1917,532a               | 42  | 49,165      | 1,072   | 0,131 | 0,201               |
| Intercept                             | 14260,249               | 1   | 14260,249   | 306,228 | 0,000 | 0,651               |
| Иницијално тестирање                  | 1475,323                | 31  | 44,707      | 5,326   | 0,016 | 0,162               |
| Група                                 | 82,389                  | 1   | 82,389      | 3,058   | 0,028 | 0,018               |
| Error                                 | 7137,057                | 161 | 46,567      |         |       |                     |
| Total                                 | 54200,000               | 207 |             |         |       |                     |
| Corrected Total                       | 9554,589                | 206 |             |         |       |                     |

a. R Squared = 0,201 (Adjusted R Squared = 0,004)

Резултати добијени иницијалним и финалним тестирањем имплицирају да је код ученика К-групе дошло до пада постигнућа на основном нивоу. Са друге стране, ученици код којих је у настави примењиван софтвер постигли су боље резултате у области геометрије у односу на своје вршњаке и те разлике имају карактер статистичке значајности. Имајући у виду да се на основном нивоу образовних постигнућа налазе ученици који остварују најслабије резултате када је настава математике у питању, овакви резултати охрабрују и указују на дидактичке предности примене софтвера у раду са ученицима слабијих математичких способности.

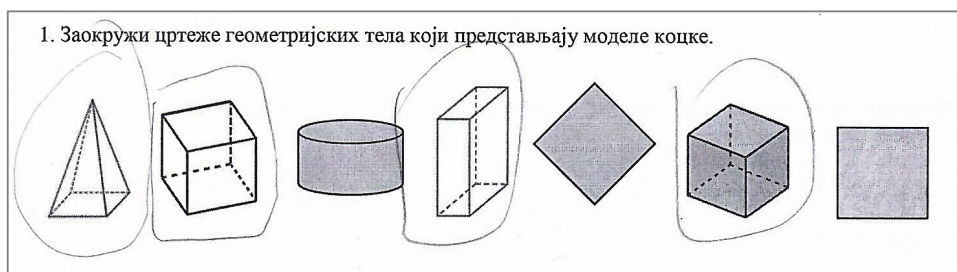
Зарад потпунијег сагледавања начина на који су ученици размишљали и разумели основне геометријске појмове, истичемо неке од најфреквентнијих грешака које су чинили приликом решавања задатака на основном нивоу постигнућа. На финалном тестирању знања након реализације експерименталног програма који је, између осталог, обухватао садржаје о геометријским телима у простору, одређени број ученика, нарочито оних из К-групе, показао је да још увек недовољно добро прави дистинкцију између квадрата и коцке (Пример 1).

## Пример 1. Задатак препознавања коцке са финалног тестирања



На основу приказаног одговора може се приметити да је знатан број ученика који још увек не разликују квадрат од коцке (Gunčaga, Tkačik & Žilková, 2017). Један од разлога томе може се наћи у начину приказа обе фигуре у уџбеницима. Статичне дводимензионалне репрезентације онемогућавају ученике да се упознају са свим особинама коцке. Користећи такве моделе ученици не могу практично да утврде једнакост ивица коцке. Са друге стране, ученици из Е-групе користили су динамичне моделе креиране уз помоћ софтвера који су им пружали могућност да промене положај коцке, да сагледају стране коцке из различитих углова упознајући њене карактеристике и међусобни однос њених елемената. Такође, одговори једног дела ученика показали су и да не разликују коцку од других рогљастих тела (Пример 2). На основу приказаног, може се закључити да је код ученика изграђена свест о геометријским телима у простору, да разликују класу рогљастих од класе облих тела, али не и да међу рогљастим телима издвоје само она која су облика коцке.

## Пример 2. Задатак препознавања коцке са финалног тестирања



Овакви одговори ученика, међу којима је већина из К-групе, показују да током периода усвајања садржаја геометрије нису имали прилику да манипулишу моделима и на тај начин стекну свест о коцки као геометријском телу у простору. Ученици схватају да је коцка ограничена многоугловима, при чему не праве разлику да ли је тело ограничено квадратима, троугловима или правоугаоницима. Додатно, прихватањем пирамиде као тачног одговора показали су и да нису усвојили колико коцка има страна, темена и ивица.

Један од захтева на основном нивоу постигнућа јесте и да ученици формирају појам површине фигуре и мерења површине фигуре нестандартним, а затим и стандардним јединицама мере. Нека од решења другог задатка са финалног тестирања која се односе на мерење површине показују да ученици нису у потпуности усвојили поступак мерења површине објекта попловавањем (Пример 3). Оба начина водила су добијању погрешног решења, што наводи на закључак да ученици у оквиру трећег разреда нису овладали поступком мерења површине геометријских фигура који се заснива на попловавању одређене површи различитим задатим геометријским фигурама (правоугаоником, квадратом и троуглом) (*Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019).

Пример 3. Задатак мерења површине попловавањем са финалног тестирања

Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А?  $P = 2 \cdot 2 = 4$   
 б) Троугао В?  $P = 2 \cdot 2 = 4$

а)

Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А?  $P = 2 \cdot 2 = 4$   
 б) Троугао В?  $P = 2 \cdot 2 = 4$

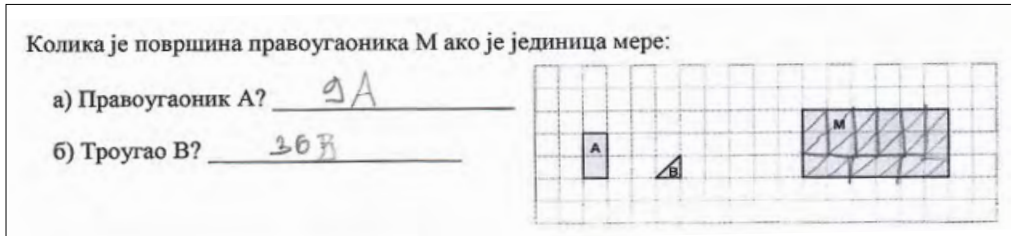
б)

За успешно усвајање поступка мерења површине потребно је да ученици најпре овладају попловавањем површи фигуре без празнина или преклапања мерних јединица (Stephan & Clements, 2003). Више од половине ученика К-групе (51,9%) није решило овај задатак, при чему су најчешће грешили у покушају да примене обрасце за израчунавање површине. Имајући у виду да су се у периоду који је претходио финалном тестирању ученици упознали са обрасцима за израчунавање површине геометријских фигура, евидентна је тежња ученика за њиховом употребом и када то није неопходно. Оваква прерана примена обрасца за израчунавање површине фигура води алгоритмизацији мерења површине без дубљег схватања самог поступка (Huang, Witz, 2013; Machaba, 2016; Зељић и Иванчевић, 2019).

Већина ученика из Е-групе није покушавала да задатак реши применом обрасца за израчунавање површине правоугаоника. Задатак су најчешће решавали попловавањем површи правоугаоника датим фигурама, па се може закључити да

је Геогедбра софтвер помогао ученицима да формирају јаснију представу о суштини мерења површине. Како су задатак решавали на папиру, ученици су поступак поплочавања приказивали дељењем површи правоугаоника на фигуре које су представљале јединице мере водећи рачуна да не дође до њиховог преклапања (Пример 4).

Пример 4. Задатак мерења површине поплочавањем са финалног тестирања



Приказани примери решења задатака са основног нивоа постигнућа показују да су ученици који су пратили наставу уз примену Геогедбре успешнији при решавању задатака од својих вршњака који су садржаје геометрије савладавали класичним путем. Ови налази су у сагласју са резултатима истраживања које су спровели Мартиновски и Мартиновски (Martinovski & Martinovski, 2013) који су утврдили да Геогедбра софтвер пружа подршку ученицима који имају потешкоће при решавању геометријских проблема. Такође, и Симболон и Сиахан (Simbolon & Siahaan, 2021) наводе да се уз примену софтвера повећава број ученика који достижу минимум неопходних знања из области геометрије, па препоручују његову употребу и у другим областима математике.

### 1.1.2. Геогедбра и образовна постигнућа ученика на средњем нивоу

У Табели 16 приказана су постигнућа ученика Е-групе ( $M = 18,94$ ;  $SD = 10,21$ ) и К-групе ( $M = 18,48$ ;  $SD = 8,70$ ) на иницијалном тестирању знања на средњем нивоу постигнућа.

Табела 16. Постигнућа ученика на средњем нивоу

|                      |         | <i>n</i> | <i>M</i> | <i>SD</i> | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|----------------------|---------|----------|----------|-----------|----------------------------------|-------------|
|                      |         |          |          |           | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Иницијално тестирање | Е-група | 103      | 18,94    | 10,21     | 16,94                            | 20,93       |
|                      | К-група | 104      | 18,48    | 8,70      | 16,79                            | 20,18       |
|                      | Укупно  | 207      | 18,71    | 9,46      | 17,41                            | 20,01       |
| Финално тестирање    | Е-група | 103      | 21,88    | 9,98      | 19,93                            | 23,83       |
|                      | К-група | 104      | 16,58    | 8,42      | 14,94                            | 18,21       |
|                      | Укупно  | 207      | 19,22    | 9,58      | 17,90                            | 20,53       |

Резултати са финалног тестирања показују да је Е-група ученика просечно остварила знатно бољи резултат ( $M = 21,88$ ;  $SD = 9,98$ ) у поређењу са К-групом код које се уочава знатан пад у постигнућима у односу на иницијално тестирање знања на средњем нивоу ( $M = 16,58$ ;  $SD = 8,42$ ) (Табела 16).

Вредност добијена Левеновим тестом једнакости варијансе потврђује да је приликом финалног тестирања задовољена претпоставка о једнакости варијансе ( $F = 0,669$ ;  $p = 0,886$ ) (Табела 17) и да се за испитивање да ли разлике на средњем нивоу постигнућа добијене финалним тестирањем знања ученика имају карактер статистичке значајности може користити двофакторска анализа варијансе.

Табела 17. Левенов тест једнакости варијансе на средњем нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 0,669                                 | 26  | 166 | 0,886 |

Након уклањања утицаја коваријата (резултата иницијалног тестирања), установљено је да постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика Е-групе и К-групе на средњем нивоу постигнућа ( $F = 11,801$ ;  $p = 0,001$ ) (Табела 18). Парцијални ета квадрат од 0,066 показује да постоји мали утицај варијансе у резултатима са финалног теста (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). На основу вредности ета квадрата може се закључити да се 6,6% варијансе у финалном тестирању (на средњем нивоу постигнућа) може објаснити независном променљивом, односно експерименталним програмом.

Утицај коваријата (постигнућа ученика на средњем нивоу са иницијалног теста) на постигнућа ученика на истом нивоу финалног теста након уклањања утицаја независне променљиве (групе) има карактер статистичке значајности ( $F = 5,558$ ;  $p = 0,014$ ) (Табела 18). Вредност парцијалног ета квадрата од 0,071 показује да је утицај варијансе на резултате финалне провере знања мали.

Добијени резултати показују да су ученици Е-групе остварили боље резултате у односу на иницијално тестирање на средњем нивоу, али и да су њихова постигнућа виша у односу на постигнућа њихових вршњака из К-групе. За разлику од ученика из Е-групе, ученици К-групе су при решавању задатака на средњем нивоу образовних постигнућа на финалном тестирању имали мање успеха него на иницијалном тестирању. Како бисмо боље разумели околности које су довеле до оваквих резултата осврнућемо се на карактеристичне грешке ученика приликом решавања задатака са средњег нивоа постигнућа. Сагледавање најчешћих грешака помоћи ће стварању јасније представе о томе шта је довело до пада у постигнућима ученика који су садржаје геометрије усвајали класичним путем у односу на њихове вршњаке код којих је на часовима обраде и утврђивања садржаја геометрије примарно коришћен Геогедра софтвер.

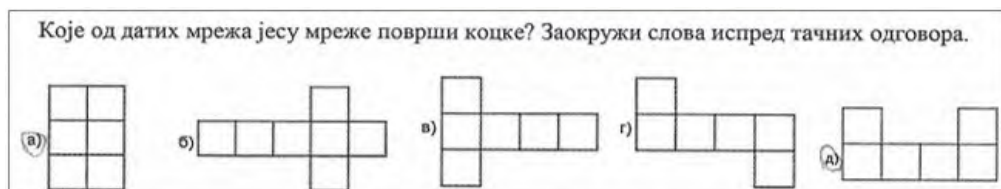
Табела 18. Анализа коваријансе на средњем нивоу постигнућа

| Tests of Between-Subjects Effects     |                         |     |             |         |       |                     |
|---------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|---------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Финално тестирање |                         |     |             |         |       |                     |
| Source                                | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                       | 5355,748 <sup>a</sup>   | 40  | 133,894     | 1,638   | 0,017 | 0,283               |
| Intercept                             | 18260,751               | 1   | 18260,751   | 223,357 | 0,000 | 0,574               |
| Иницијално тестирање                  | 1902,161                | 22  | 92,068      | 5,558   | 0,014 | 0,071               |
| Група                                 | 964,839                 | 1   | 964,839     | 11,801  | 0,001 | 0,066               |
| Error                                 | 13571,470               | 166 | 81,756      |         |       |                     |
| Total                                 | 95374,000               | 207 |             |         |       |                     |
| Corrected Total                       | 18927,217               | 206 |             |         |       |                     |

a. R Squared = 0,283 (Adjusted R Squared = 0,110)

Анализом радова ученика на финалном тестирању може се уочити да су ученици Е-групе код којих је приликом рада коришћен софтвер били успешнији од својих вршњака из К-групе приликом препознавања и уочавања међусобних односа геометријских појмова. У задатку са средњег нивоа постигнућа у којем је међу датим фигурама требало препознати ону која представља мрежу коцке 9,61% ученика К-групе сматрало је да фигуре под а) или под д) представљају мреже коцке, док овакву грешку није начинио ниједан ученик Е-групе (Пример 5).

Пример 5. Задатак препознавања мреже коцке са финалног тестирања



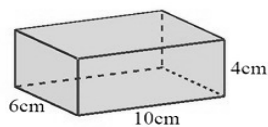
Боље резултате ученика Е-групе од ученика К-групе могуће је довести у везу са бројним могућностима визуелизације појма коцке уз помоћ софтвера Геогедра. Захваљујући њему ученици су могли да сагледају које све фигуре могу представљати мрежу коцке, па рецимо нису имали проблем да уоче да су тачни одговори под в) и г) (њих укупно 47,57%), док је само 25,96% ученика К-групе заокружило тачне одговоре. Велики број ученика из К-групе заокружио је одговор под б), при чему су занемарили основни услов – да се мрежа коцке састоји од шест подударних квадрата (Јеоп, 2009). То показује да је код ученика К-групе дошло до појаве дисконтинуитета при трансферу са тродимензионалног на дводимензионални приказ, односно да не доводе у везу број страна коцке са бројем квадрата од којих се састоји фигура која представља мрежу површи коцке.

У следећем задатку са средњег нивоа постигнућа требало је означити којим се од понуђених израза може представити површина датог квадрa (Пример 6). Велики број ученика је успешно урадио овај задатак (80,67%), при чему је међу њима највише оних из Е-групе. У односу на ученике К-групе, мали број ученика Е-групе је одабрао одговоре под а) или б), показујући тиме да су модели креирани у софтверу које су ови ученици користили током трајања експеримента допринели да лакше визуелизују појам квадрa, боље упознају карактеристике и разумеју суштину мерења површине његове површи.

Пример 6. Задатак израчунавања површине квадрa са финалног тестирања

Којим изразом можеш израчунати површину квадрa чије су ивице дужине 10cm, 6cm и 4cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

- а)  $10 \cdot 6 \cdot 4 \text{ cm}^2$   
 б)  $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \text{ cm}^2$   
 в)  $2 \cdot (10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4) \text{ cm}^2$



Ови резултати су сагласни са закључцима Мулигана и сарадника (Mulligan et al., 2005) који као налазе своје студије истичу да је за схватање суштине појма површине тродимензионалног геометријског тела потребно да ученици у довољној мери разумеју формирање мреже његове површи. Управо у томе је велику улогу имао софтвер Геогебра. Ученици Е-групе истовремено су могли да посматрају и дводимензионални и тродимензионални приказ истог геометријског тела и прате трансформацију његове мреже из простора у раван, што се одразило и на боље разумевање обрасца за израчунавање површине.

### 1.1.3. Геогебра и образовна постигнућа ученика на напредном нивоу

На напредном нивоу, на иницијалном тестирању знања у области геометрије ученици Е-групе просечно су остварили боље резултате ( $M = 10,96$ ;  $SD = 8,27$ ) у односу на К-групу ученика ( $M = 9,14$ ;  $SD = 6,54$ ) (Табела 19).

Табела 19. Постигнућа ученика на напредном нивоу

|                      |         | n   | M     | SD    | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|----------------------|---------|-----|-------|-------|----------------------------------|-------------|
|                      |         |     |       |       | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Иницијално тестирање | Е-група | 103 | 10,96 | 8,27  | 9,35                             | 12,58       |
|                      | К-група | 104 | 9,14  | 6,54  | 7,87                             | 10,41       |
|                      | Укупно  | 207 | 10,05 | 7,49  | 9,02                             | 11,07       |
| Финално тестирање    | Е-група | 103 | 17,98 | 10,84 | 15,86                            | 20,10       |
|                      | К-група | 104 | 11,13 | 6,88  | 9,79                             | 12,47       |
|                      | Укупно  | 207 | 14,54 | 9,68  | 13,21                            | 15,87       |

Обе групе ученика показале су напредак на финалном тесту у односу на иницијални. Ученици из Е-групе остварили су знатно више просечне резултате ( $M = 17,98$ ;  $SD = 10,84$ ), при чему је бољи резултат него на иницијалном тестирању остварила и К-група ( $M = 11,13$ ;  $SD = 6,88$ ) (Табела 19).

Сигнификантност Левеновог теста износи 0,674 и потврђује да није нарушена претпоставка о једнакости варијансе на финалном тестирању (Табела 20), па се за испитивање да ли је разлика у постигнућима ученика на напредном нивоу добијених финалним тестирањем статистички значајна може користити двофакторска анализа варијансе.

Табела 20. Левенов тест једнакости варијансе на напредном нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 0,923                                 | 32  | 165 | 0,674 |

Након уклањања утицаја коваријата (резултата иницијалног теста), утврђено је да је разлика у постигнућима ученика Е-групе и К-групе на напредном нивоу статистички значајна ( $F = 10,859$ ;  $p = 0,001$ ) (Табела 25). Вредност парцијалног ета квадрата износи 0,062 и указује на мали утицај варијансе у резултатима са финалног теста (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), односно да се 6,2% варијансе у финалном тестирању (на напредном нивоу постигнућа) може објаснити утицајем експерименталног програма. Даље, посматрањем утицаја коваријата који чине постигнућа ученика на напредном нивоу иницијалног теста на постигнућа ученика на истом нивоу финалног теста након уклањања утицаја независне променљиве (групе), добија се статистички значајна разлика ( $F = 1,845$ ;  $p = 0,011$ ) (Табела 21). Парцијални ета квадрат износи 0,232 и указује на умерени утицај варијансе у резултатима финалног мерења знања ученика.

Табела 21. Анализа коваријансе на напредном нивоу постигнућа

| Tests of Between-Subjects Effects     |                         |     |             |         |       |                     |
|---------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|---------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Финално тестирање |                         |     |             |         |       |                     |
| Source                                | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                       | 7268,893 <sup>a</sup>   | 41  | 177,290     | 2,433   | 0,000 | 0,377               |
| Intercept                             | 18144,683               | 1   | 18144,683   | 248,981 | 0,000 | 0,601               |
| Иницијално тестирање                  | 3630,040                | 27  | 134,446     | 1,845   | 0,011 | 0,232               |
| Група                                 | 791,351                 | 1   | 791,351     | 10,859  | 0,001 | 0,062               |
| Error                                 | 1482,303                | 13  | 114,023     |         |       |                     |
| Total                                 | 12024,508               | 165 |             |         |       |                     |
| Corrected Total                       | 63062,000               | 207 |             |         |       |                     |

a. R Squared = 0,377 (Adjusted R Squared = 0,222)

Резултати оба тестирања знања указују да је код ученика обе групе дошло до побољшања постигнућа на напредном нивоу. Оно што се такође може уочити јесте да су ученици код којих је настава извођена уз коришћење софтвера остварили значајнији напредак у односу на ученике који су садржаје савладавали класичним путем. Да бисмо боље разумели шта је довело до појаве поменутих разлика у постигнућима ученика Е-групе и К-групе анализираћемо поступке решавања задатака које су ученици најчешће користили.

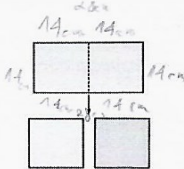
Један од задатака са напредног нивоа на финалном тесту односио се на одређивање површине правоугаоника састављеног од два подударна квадрата (Пример 6). Од ученика се захтевало да на основу датог обима једног квадрата најпре израчунају дужину странице тог квадрата, а затим и уоче њен однос са страницама правоугаоника.

Пример 6. Задатак израчунавања површине правоугаоника са финалног тестирања

а)

Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5dm 6cm. Одреди површину тог правоугаоника.

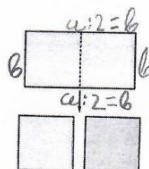
$$\begin{aligned} O &= 4 \cdot a & P &= a \cdot b & P &= 392 \text{ cm}^2 \\ O &= 56 : 4 & P &= 28 \cdot 14 \\ O &= 14 \text{ cm} \end{aligned}$$



б)

Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5dm 6cm. Одреди површину тог правоугаоника.

$$\begin{aligned} O &= 5 \text{ dm } 6 \text{ cm} = 56 \text{ cm} & P &= a \cdot b & b &= 7 & b &= 0 : 4 & b &= 56 : 4 \\ b &= 14 \text{ cm} & a &= 2 & a &= 28 \text{ cm} & P &= 14 \cdot 28 & P &= 392 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



На основу анализе радова може се приметити да је велики број ученика приликом решавања користио графички приказ правоугаоника дат уз задатак како би означио односе између страница и елементе који су потребни за израчунавање површине правоугаоника (примери 6а) и 6б)). Знатно је више ученика Е-групе који су користили графички приказ, што имплицира да је експериментални програм учинио да су ученици склонији визуелизацији постављеног проблема. То не изненађује ако се узме у обзир чињеница да је већина задатака реализована на часовима математике у Е-групи била поткрепљена графичким приказом креираним у софтверу.

И уз задатак са финалног теста у којем се захтевало од ученика да израчунају површину квадра састављеног од шест подударних коцки био је дат графички приказ (Пример 7). Ипак, одређени број ученика слику дату уз задатак није доживео као податак неопходан за његово тачно решавање. Без слике задатак би

имао два тачна решења, па би се сматрао потпуно тачним само уколико би ученици одредили оба могућа тачна решења.

Пример 7. Задатак израчунавања површине квадрата са финалног тестирања

Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 2dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a = 2dm$   $P = 6 \cdot (2dm \cdot 2dm)$   $P = 24dm^2$   
 $P = 6 \cdot (a \cdot a)$   $P = 6 \cdot 4dm^2$   $6 \cdot 24dm^2 = 144dm^2$

На основу грешака које су правили, може се закључити да су ученици адитивно својство површине фигура у равни најчешће преносили и на израчунавање површине геометријских тела. Најчешће би одредили површину једне коцке а затим њену површину множили бројем шест како би одредили површину целог квадрата. Овакву грешку поновило је 27,88% ученика К-групе, док је исту грешку направило само 6,79% ученика Е-групе. Са друге стране, један број ученика користио је дати графички приказ квадрата како би на њему представио односе међу величинама (примери 8а) и 8б)), што им је касније помогло и да одреде тачно решење задатка.

Пример 8. Задатак израчунавања површине квадрата са финалног тестирања

Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 2dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

а)  $a = 6dm$   $b = 4dm$   $c = 2dm$   
 $P = 2 \cdot (6dm \cdot 4dm + 6dm \cdot 2dm + 4dm \cdot 2dm) =$   
 $= 2 \cdot (24dm^2 + 12dm^2 + 8dm^2) =$   
 $= 2 \cdot 44dm^2 = 88dm^2$

б)  $a = 6dm$   $b = 2dm$   $c = 4dm$   $P = ?$   
 $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$   $P = 2 \cdot (6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 4)$   
 $P = 2 \cdot (12 + 24 + 8)$   $P = 2 \cdot 44dm^2$   $P = 88dm^2$

Ученици који су користили слику квадрата дату уз задатак повезали су дужине ивица коцке са ивицама квадрата потребним за израчунавање површине. Тако су на потпунији начин сагледали односе међу познатим и непознатим вредностима у задатку и дошли до тачног решења. Овај закључак је у складу са наводима

Кожевникова и сарадника да ученици који поседују развијену способност просторне визуелизације имају тенденцију да кодирају и обрађују слике аналитички, део по део, користећи просторне односе за распоређивање и анализу компонента (Kozhevnikov, Kosslyn & Shephard, 2005).

У трећем задатку са напредног нивоа додатно долази до изражаја тенденција ученика Е-групе за визуелизацијом. С обзиром на то да уз задатак није био дат графички приказ проблема, ученици који су током експеримента учили уз моделе креиране у Геогебри показали су да теже да проблемску ситуацију прикажу графички (Пример 9).

Пример 9. Задатак израчунавања површине коцке са финалног тестирања

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

а)  $a = 3m$   $1m^2 \rightarrow 1L$  боје  $a = 3m = 30dm$   $b = 5dm$   $P = 5 \cdot a \cdot a = a \cdot b$   
 $P = 5 \cdot (30 \cdot 30) = 4500$   $P = 5 \cdot 30 \cdot 5 = 1500$   $P = 1500 - 4500 = 3000$   $P = 3000 : 2 = 1500$   
 Одговор: Потребно је 1500L боје



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

б)  $a = 3m$   $a = 5dm$   $45 - 1 = 44m^2$   
 $P = ?$   $b = 2m = 20dm$   $1L = 2m^2$   
 $P = 5 \cdot (a \cdot a)$   $P = a \cdot b$   $44 : 2 = 22L$   
 $P = 5 \cdot (3 \cdot 3)$   $P = 5 \cdot 20$   
 $P = 5 \cdot 9$   $P = 100dm^2 = 1m^2$   
 $P = 45m^2$



Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

в)  $a = 3m = 30dm$   $1m^2 \rightarrow 1L$  боје  $a = 2m = 20dm$   $b = 5dm$   $P = 4500dm^2 - 100dm^2$   
 $P = 5 \cdot a \cdot a = a \cdot b$   $P = 5 \cdot (30dm \cdot 30dm) = 4500dm^2$   $P = 4500dm^2 - 100dm^2 = 4400dm^2$   
 $P = 5 \cdot 30dm \cdot 20dm = 3000dm^2$   $P = 4400dm^2 - 3000dm^2 = 1400dm^2$   
 Одговор: Потребно је 1400L боје

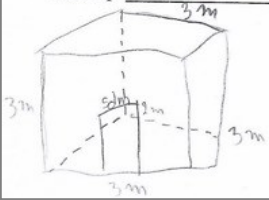


г)

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$a = 3m, P_a = ?$ ,  $P_b = 5 \cdot (a \cdot a)$ ,  $P_c = 5 \cdot (3 \cdot 3)$ ,  $P_d = 5 \cdot 9$ ,  $P_e = 45m^2$   
 $a = 3m = 30dm, b = 5dm, P_b = ?$ ,  $P_c = a \cdot b$ ,  $P_d = 20 \cdot 5$ ,  $P_e = 100dm^2 = 10m^2$ ,  $P_a = 45m^2 - 10m^2 = 35m^2$

Одговор: \_\_\_\_\_



Тежња ученика Е-групе за визуелизацијом проблема показала се сасвим оправданом, пошто је њих 45,63% тачно урадило цео задатак, за разлику од 7,69% ученика К-групе који су успешно решили исти задатак. Додатно, нико од ученика К-групе није покушао да задати проблем илуструје. То доста говори о начину рада који је примењен у раду са ученицима Е-групе, јер подстакнути динамичним приказима креираним уз помоћ софтвера ученици претендују да и када задатак решавају на папиру користе цртеже да представе односе међу величинама. Ово је посебно важно, јер се међу ученицима који постижу напредни ниво постигнућа најчешће налазе они који учествују на математичким такмичењима. Геогедра им може бити од велике помоћи, јер им путем визуелизације може помоћи у постизању бољих резултата и смањивању разлике у постигнућима у односу на њихове вршњаке (Vulović, Mihajlović & Milikić, 2022; Вуловић, Миленковић и Миликић, 2024).

## 1.2. Геогедра и образовна постигнућа ученика у зависности од пола

Један од задатака истраживања био је испитати да ли примена софтвера на садржајима геометрије остварује једнак утицај на постигнућа и дечака и девојчица. На иницијалном тестирању знања девојчице из К-групе ( $M = 44,54$ ;  $SD = 15,16$ ) постигле су боље резултате од дечака ( $M = 41,51$ ;  $SD = 16,08$ ), док је у Е-групи умеренија разлика у постигнућима девојчица ( $M = 45,22$ ;  $SD = 17,22$ ) и дечака ( $M = 44,81$ ;  $SD = 19,60$ ) (Табела 22).

На финалном тестирању обављеном након реализације експерименталног програма ученици оба пола из Е-групе били су знатно успешнији у односу на ученике К-групе (Табела 22). На финалном тесту девојчице из Е-групе су просечно оствариле бољи резултат у односу на дечаке из исте групе, а и просечно су више напредовале у односу на иницијални тест (оствариле су за 12,98 поена бољи резултат, док су дечаци остварили напредак од 7,02 поена).

Табела 22. Постигнућа ученика у односу на пол

| Група   | Пол    | Иницијално тестирање |                | Финално тестирање |                | n   |
|---------|--------|----------------------|----------------|-------------------|----------------|-----|
|         |        | Mean                 | Std. Deviation | Mean              | Std. Deviation |     |
| Е-група | Мушки  | 44,8086              | 19,60003       | 51,8200           | 28,36187       | 50  |
|         | Женски | 45,2230              | 17,21976       | 58,2075           | 23,26880       | 53  |
|         | Укупно | 45,0218              | 18,32371       | 55,1068           | 25,93730       | 103 |
| К-група | Мушки  | 41,5060              | 16,07915       | 40,0000           | 19,84823       | 43  |
|         | Женски | 44,5411              | 15,15696       | 43,1475           | 18,68318       | 61  |
|         | Укупно | 43,2863              | 15,54042       | 41,8462           | 19,14166       | 104 |
| Укупно  | Мушки  | 43,2816              | 18,03821       | 46,3548           | 25,36501       | 93  |
|         | Женски | 44,8582              | 16,07951       | 50,1491           | 22,16800       | 114 |
|         | Укупно | 44,1499              | 16,96344       | 48,4444           | 23,67448       | 207 |

Са друге стране, може се уочити да су у К-групи ученици оба пола имали у просеку лошије резултате у односу на резултате постигнуте на иницијалном тесту. За утврђивање статистичке значајности разлике у постигнућима ученика у односу на пол и провере да ли допринос Геогедра софтвера остваривању бољих резултата зависи од пола употребљена је двофакторска анализа коваријансе. Пре њене примене, испитали смо хомогеност варијансе (Табела 23). Вредност Левеновог теста ( $F(3,203) = 4,621$ ;  $p = 0,061$ ) потврђује да су испуњени сви услови за примену анализе коваријансе.

Табела 23. Левенов тест хомогености варијансе

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 4,621                                 | 3   | 203 | 0,061 |

Резултати добијени двофакторском анализом коваријансе указују да, ако се утицај коваријата (иницијалног теста) узме у обзир, утицај интеракције групе и пола ученика није статистички значајан ( $F(1,202) = 0,438$ ;  $p = 0,509$ ) (Табела 24). Одатле следи да треба одбацити претпоставку да ученицима једног пола одговара одређени начин рада (примена софтвера или класичан начин рада). Вредност парцијалног ета квадрата је мала, износи 0,002, и показује да је утицај који остварује врло мали, свега 0,2% варијансе на финалном тесту може се довести у везу са интеракцијом независних променљивих (групом и полом ученика).

Табела 24. Двофакторска анализа коваријансе

| Dependent Variable: Финално тестирање |                         |     |             |        |       |                     |
|---------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Source                                | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                       | 16780,440 <sup>a</sup>  | 4   | 4195,110    | 8,588  | 0,000 | 0,145               |
| Intercept                             | 30217,460               | 1   | 30217,460   | 61,857 | 0,000 | 0,234               |
| Иницијално тестирање                  | 6381,098                | 1   | 6381,098    | 13,062 | 0,000 | 0,061               |
| Група                                 | 8297,613                | 1   | 8297,613    | 16,986 | 0,000 | 0,078               |
| Пол                                   | 896,254                 | 1   | 896,254     | 1,835  | 0,177 | 0,009               |
| Група * Пол                           | 214,058                 | 1   | 214,058     | 0,438  | 0,509 | 0,002               |
| Error                                 | 98678,672               | 202 | 488,508     |        |       |                     |
| Total                                 | 601260,000              | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                       | 115459,111              | 206 |             |        |       |                     |

a. R Squared = 0,145 (Adjusted R Squared = 0,128)

Посматрањем коваријансе добијене на финалном тесту између група које су формиране на основу пола, може се закључити да (ако се утицај коваријата изостави) разлика у постигнућима ученика није статистички значајна ( $F(1,202) = 1,835$ ;  $p = 0,177$ ). Парцијални ета квадрат износи 0,009 и показује да се тек 0,9% варијансе објашњава полом, што се тумачи као врло мали утицај. Дакле, може се закључити да употреба софтвера Геогедра остварује позитиван утицај на повећање нивоа постигнућа ученика оба пола. Приказани резултати потврђују да и дечаци и девојчице на сличан начин реагују на експериментални програм и да приликом његове реализације није неопходно узимати у обзир пол ученика. Девојчице јесу и на иницијалном и на финалном тесту постигле боље резултате од дечака, али они немају карактер статистичке значајности. Наши налази су у сагласности са резултатима истраживања које је спровео Аканму (Akanmu, 2016). Наиме, он је испитујући да ли у постигнућима ученика који су учили математику уз употребу Геогедре постоји статистички значајна разлика у односу на пол дошао до истог закључка. И резултати његове студије показали су да су ученици оба пола постигли боље резултате на тесту обављеном после експеримента. Мукири (Mukiri, 2016) као резиме свог истраживања наводи да се уз употребу Геогедре у подучавању и учењу садржаја геометрије превазилазе разлике у постигнућима ученика. На основу свега изнетог може се закључити да динамично окружење софтвера Геогедра пружа прилику ученицима оба пола да овладавају геометријским појмовима на исти начин, без бојазни да може доћи до појаве разлика у њиховим постигнућима.

### 1.3. Геогейбра и образовна постигнућа ученика у зависности од оцено из математике

Поред пола, један од истраживачких задатака био је утврдити да ли постоји повезаност начина рада уз употребу софтвера и оцено коју ученици имају из математике. Поређењем резултата остварених на иницијалном и финалном тестирању намера је била испитати да ли овакав приступ остварује утицај на ниво постигнућа ученика у зависности од оцено из математике коју су ученици имали на крају претходног разреда.

Очекивано, у обе групе испитаника најбоље резултате на иницијалном тестирању постигли су ученици са одличном оценом (Табела 25). Следећи најуспешнији у обе групе били су ученици са врлодобром оценом, затим ученици који имају оценоу добар (3), а најлошије резултате, у обе групе ученика, остварили су ученици који имају оценоу довољан (2). Док су ученици из Е-групе и К-групе са одличном и врлодобром оценом постигли прилично уједначене резултате, ученици са оценама довољан и добар из К-групе остварили су виша постигнућа у односу на ученике Е-групе.

Табела 25. Постигнућа ученика у зависности од оцено из математике

| Група   | Оцена         | Иницијално тестирање |                | Финално тестирање |                | n   |
|---------|---------------|----------------------|----------------|-------------------|----------------|-----|
|         |               | Mean                 | Std. Deviation | Mean              | Std. Deviation |     |
| Е-група | Довољан (2)   | 17,2820              | 2,37764        | 32,2000           | 25,04396       | 5   |
|         | Добар (3)     | 26,9989              | 13,82520       | 42,7778           | 23,19902       | 9   |
|         | Врлодобар (4) | 34,5305              | 16,20107       | 46,6818           | 25,24808       | 22  |
|         | Одличан (5)   | 52,9579              | 14,44503       | 61,2388           | 24,72460       | 67  |
|         | Укупно        | 45,0218              | 18,32371       | 55,1068           | 25,93730       | 103 |
| К-група | Довољан (2)   | 27,5114              | 15,07599       | 29,4286           | 21,96100       | 7   |
|         | Добар (3)     | 34,7020              | 11,66049       | 35,0000           | 14,59833       | 10  |
|         | Врлодобар (4) | 35,6781              | 15,53394       | 35,7407           | 21,08881       | 27  |
|         | Одличан (5)   | 49,9810              | 12,54338       | 47,1833           | 17,02490       | 60  |
|         | Укупно        | 43,2863              | 15,54042       | 41,8462           | 19,14166       | 104 |
| Укупно  | Довољан (2)   | 23,2492              | 12,40062       | 30,5833           | 22,20753       | 12  |
|         | Добар (3)     | 31,0532              | 12,98261       | 38,6842           | 19,01769       | 19  |
|         | Врлодобар (4) | 35,1629              | 15,68028       | 40,6531           | 23,45257       | 49  |
|         | Одличан (5)   | 51,5515              | 13,60872       | 54,5984           | 22,48465       | 127 |
|         | Укупно        | 44,1499              | 16,96344       | 48,4444           | 23,67448       | 207 |

На финалном тестирању најбољи резултат у Е-групи постигли су ученици са одличном оценом, који су остварили просечно 8,28 поена више у односу на иницијални тест. Приметан напредак у просечном броју поена остварили су ученици који имају врлодобру оцену, који су у просеку остварили 12,15 поена више. У односу на резултате са иницијалног теста највећи напредак у просечном броју поена остварили су ученици са оценом довољан и оценом добар, који су на финалном тестирању просечно постигли 14,92, односно 15,78 поена више. Са друге стране, ученици К-групе који су имали одличну оцену из математике остварили су најбољи резултат у односу на своје вршњаке, али су просечно имали 2,8 поена мање у односу на иницијални тест. Ученици са врлодобром оценом приликом решавања задатака са финалног теста постигли су готово идентичан резултат као на иницијалном тестирању. Ученици са оценом добар (3) остварили су нешто бољи резултат у односу на иницијално тестирање, док је највећи напредак у К-групи, просечно 1,91 поен више у односу на иницијално тестирање, остварила група ученика који су имали оцену довољан (2).

Ако се упореде резултати свих ученика на иницијалном и финалном тестирању, уочљиво је да су ученици Е-групе показали знатно виши ниво постигнућа од ученика К-групе који су се углавном задржали на истом нивоу на оба тестирања. Посматрано по подгрупама, док је код ученика осталих подгрупа К-групе уочљив благи пораст нивоа постигнућа, код ученика са одличном оценом евидентан је просечно нижи број поена у односу на резултате иницијалног теста. На финалном тесту најизраженији је пораст просечног броја поена међу ученицима са оценом довољан (2) и добар (3) из Е-групе. Да је заиста тако потврђују и Мартиновски и Мартиновски (Martinovski & Martinovski, 2013), који наводе да ученици којима решавање проблема из геометрије представља сложен задатак постижу знатно већи успех након употребе софтвера Геогедра. Након поређења постигнућа експерименталне и контролне групе на пост-тесту, истичу да је међу ученицима из експерименталне групе знатно мање оних који остварују исподпросечне резултате, што доводе у директну везу са претходном употребом софтвера.

Ради утврђивања да ли је разлика у постигнућима ученика у односу на оцену из математике статистички значајна коришћена је двофакторска анализа коваријансе уз претходно потврђену хомогеност варијансе провером хипотезе о једнакости варијансе. Левенов тест показао је да је задовољена претпоставка о једнакости варијансе ( $F(7,199) = 1,248$ ;  $p = 0,278$ ) (Табела 26), те је могуће извршити анализу коваријансе.

Табела 26. Левенов тест хомогености варијансе

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 1,248                                 | 7   | 199 | 0,278 |

Након обављене двофакторске анализе коваријансе (Табела 27) резултати су показали да, након уклањања утицаја коваријата (резултата иницијалног теста), утицај интеракције групе и оцено из математике на постигнућа ученика остварена на финалном тестирању знања није статистички значајан ( $F(3,198) = 0,248$ ;  $p = 0,863$ ). На основу тога, претпоставка да ученицима који имају различите оцено из математике одговарају различити начини рада (рад уз примену софтвера или класичан начин рада) није потврђена и морамо је одбацити. Вредност парцијалног ета квадрата 0,004 наводи на закључак да је утицај веома мали, односно да се тек 0,4% варијансе у финалном тестирању може објаснити интеракцијом независних променљивих (групом и оценом из математике). Ово је од важности јер указује на чињеницу да након употребе софтвера долази до напретка у постигнућима свих ученика, без обзира на то коју оцено из математике имају.

Табела 27. Двофакторска анализа коваријансе

| Dependent Variable: Финално тестирање             |                         |     |             |        |       |                     |
|---------------------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Source                                            | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                                   | 21837,101 <sup>a</sup>  | 8   | 2729,638    | 5,773  | 0,000 | 0,189               |
| Intercept                                         | 34077,945               | 1   | 34077,945   | 72,071 | 0,000 | 0,267               |
| Иницијално тестирање                              | 401,180                 | 1   | 401,180     | 0,848  | 0,358 | 0,004               |
| Група                                             | 2048,764                | 1   | 2048,764    | 4,333  | 0,039 | 0,021               |
| Оцена                                             | 6113,289                | 3   | 2037,763    | 4,310  | 0,006 | 0,061               |
| Група * Оцена                                     | 352,039                 | 3   | 117,346     | 0,248  | 0,863 | 0,004               |
| Error                                             | 93622,011               | 198 | 472,838     |        |       |                     |
| Total                                             | 601260,000              | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                                   | 115459,111              | 206 |             |        |       |                     |
| a. R Squared = 0,189 (Adjusted R Squared = 0,156) |                         |     |             |        |       |                     |

Даље, ако се посматрају резултати двофакторске анализе коваријансе може се уочити да се резултати ученика разликују у зависности од оцено коју имају из математике. Ученици који поседују више оцено остварили су и боље резултате, док су ученици са слабијим оценама остварили лошије резултате и на финалном тесту. Након уклањања утицаја групе, вредност коваријансе добијена финалним тестирањем између група ученика формираних у зависности од тога коју оцено имају из математике указује да су разлике статистички значајне и указује на везу између коваријата и успеха који су ученици постигли на финалном тесту ( $F(3,198) = 4,310$ ;  $p = 0,006$ ). Вредност парцијалног ета квадрата од 0,061 указује на средњи утицај, односно да се 6,1% варијансе на финалном тесту може објаснити независном променљивом (оценом из математике). Вредност коваријансе

показује да је разлика у резултатима ученика Е-групе и К-групе статистички значајна, чиме су додатно потврђени ефекти примене софтвера на повећање образовних постигнућа ученика.

Може се закључити да софтвер Геогедра остварује позитивне ефекте и подстиче раст образовних постигнућа ученика у области геометрије, без обзира на то коју оцену имају из математике. Резултати добијени решавањем задатака са иницијалног и финалног теста говоре у прилог томе да је дошло до значајног напретка код оне групе ученика који су пратили наставу уз употребу софтвера. Резултати ученика К-групе остали су на нивоу иницијалног тестирања, док су са друге стране ученици Е-групе на тесту који је уследио након завршетка експерименталног програма остварили знатно боље резултате. Посматрано у односу на оцену коју ученици имају из математике, може се запазити да што је виша оцена веће су и разлике у просечном броју поена обе групе ученика на финалном тесту. Посебно је важно истаћи напредак који остварују ученици из Е-групе који имају оцене добар (3) и довољан (2). Њихов напредак може се довести у везу са динамичним приказима које Геогедра пружа, са могућношћу да изводе експерименте и манипулације објектима током савладавања садржаја геометрије и решавања геометријских задатака. Већ више пута је наведено да визуелизација позитивно утиче на ученике да дубље разумеју геометријске проблеме и лакше их савладавају. С тим у вези Љајко (Љајко, 2014) истиче да је употреба софтвера у сложенијим математичким проблемима вишеструко потврђена, због чега има смисла пажњу посветити увођењу софтвера у редовну наставу и проширити обухват ученика на свим нивоима образовних постигнућа.

#### **1.4. Геогедра и образовна постигнућа ученика у зависности од општег успеха**

Четврти задатак истраживања јесте утврдити да ли постоји повезаност ефеката наставе која је реализована уз помоћ софтвера и школског успеха који су ученици постигли на крају претходног разреда, односно открити да ли примена Геогедре на садржаје геометрије доводи до повећања образовних постигнућа свих ученика, без обзира на општи успех који су имали на крају трећег разреда.

Увидом у резултате ученика са иницијалног теста може се уочити да су и у Е-групи и у К-групи најбоље резултате постигли ученици са одличним успехом (Табела 28). После њих, најбоље резултате остварили су ученици са врлодобрим општим успехом. Број ученика са добрим и довољним општим успехом у обе групе је релативно мали (по један или два ученика), па се и просечне вредности резултата остварених на иницијалном тестирању не могу сматрати адекватним за анализу. Ако се управо због претходно поменуте величине субузорка изоставе резултати ученика са добрим и довољним успехом, може се закључити да су у

обе групе ученици са општим успехом одличан и врлодобар постигли прилично уједначене резултате на иницијалном тесту.

Табела 28. Постигнућа ученика у зависности од општег успеха

| Група   | Општи успех | Иницијално тестирање |                | Финално тестирање |                | n   |
|---------|-------------|----------------------|----------------|-------------------|----------------|-----|
|         |             | Mean                 | Std. Deviation | Mean              | Std. Deviation |     |
| Е-група | Довољан     | 13,8300              | 0,00000        | 26,5000           | 0,00000        | 1   |
|         | Добар       | 17,5000              | 1,76777        | 32,5000           | 2,12132        | 2   |
|         | Врлодобар   | 27,8679              | 14,60530       | 46,3929           | 21,66899       | 14  |
|         | Одличан     | 48,8171              | 16,67155       | 57,3837           | 25,86306       | 86  |
|         | Укупно      | 45,0218              | 18,32371       | 55,1068           | 25,49785       | 103 |
| К-група | Довољан     | 34,7500              | 0,00000        | 25,0000           | 0,00000        | 1   |
|         | Добар       | 34,7500              | 0,00000        | 29,0000           | 0,00000        | 1   |
|         | Врлодобар   | 27,3019              | 14,02000       | 30,0952           | 19,32331       | 21  |
|         | Одличан     | 47,6411              | 13,17972       | 45,2593           | 18,16575       | 81  |
|         | Укупно      | 43,2863              | 15,54042       | 41,8462           | 19,24788       | 104 |
| Укупно  | Довољан     | 24,2900              | 14,79267       | 25,7500           | 1,06066        | 2   |
|         | Добар       | 23,2500              | 10,03743       | 31,3333           | 2,51661        | 3   |
|         | Врлодобар   | 27,5283              | 14,04509       | 36,6143           | 21,55911       | 35  |
|         | Одличан     | 48,2467              | 15,04592       | 51,5030           | 23,20518       | 167 |
|         | Укупно      | 44,1499              | 16,96344       | 48,4444           | 23,48038       | 207 |

По завршетку експерименталног програма извршено је финално тестирање знања свих ученика. Добијени резултати показали су да су у Е-групи најбоље резултате постигли ученици са одличним општим успехом, остваривши просечно 8,57 поена више у односу на резултате са иницијалног теста (Табела 28). Уочљив напредак у просечном броју поена остварили су и ученици који имају општи успех довољан и добар, који су у односу на иницијални тест имали просечно 12,67, односно 15 поена више. У Е-групи највећи напредак забележили су ученици са општим успехом врлодобар, који су на финалном тесту просечно имали 18,53 поена више него на иницијалном. У К-групи најбоље резултате остварили су ученици са општим успехом одличан, али су њихова постигнућа за просечно 2,38 поена слабија у односу на иницијални тест. Са друге стране, код групе ученика са општим успехом врлодобар приметан је умерени напредак, будући да су остварили резултат за просечно 2,79 поена виши у односу на резултате са иницијалног теста. Двоје ученика из К-групе који су трећи разред завршили са општим успехом добар и довољан забележили су велики пад у постигнућима, будући да су имали 5,75 односно 9,75 поена мање него на иницијалном тесту знања.

Ако се резултати са финалног теста упореде са резултатима са иницијалног теста, међу ученицима Е-групе највећи напредак остварили су ученици са општим успехом врлодобар, затим добар, довољан и одличан. У случају ученика из К-групе, осим ученика са успехом врлодобар који су забележили боље резултате на финалном тесту у односу на иницијални, лошије просечне скорове су оствариле све остале подгрупе ученика. Да би се утврдило да ли је примена софтвера допринела повећању нивоа постигнућа ученика Е-групе и у каквој су вези ефекти примене Геогедре са општим успехом примењена је двофакторска анализа коваријансе. Непосредно пре тога, Левеновим тестом утврђено је да је претпоставка о једнакости варијансе задовољена ( $F(7,199) = 1,753$ ;  $p = 0,099$ ) (Табела 29), чиме су испуњени услови за примену анализе коваријансе.

Табела 29. Левенов тест хомогености варијансе

| Dependent Variable: Финално тестирање |     |     |       |
|---------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                     | df1 | df2 | Sig.  |
| 1,753                                 | 7   | 199 | 0,099 |

Након уклањања утицаја коваријата (резултата иницијалног теста), резултати двофакторске анализе коваријансе указују да утицај интеракције групе и општег успеха ученика на резултате постигнуте на финалном тестирању знања није статистички значајан ( $F(3,198) = 0,120$ ;  $p = 0,948$ ) (Табела 30). Такви резултати се могу интерпретирати као одбацивање претпоставке да ученици са различитим општим успехом постижу исте резултате без обзира на примењени начин рада. Вредност парцијалног ета квадрата од 0,002 указује на веома мали утицај (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), односно да се свега 0,2% варијансе са финалног теста може се објаснити интеракцијом независних варијабли (групом и општим успехом ученика).

Ако се посматра утицај општег успеха ученика на резултате добијене финалним тестом закључујемо да, када се отклони утицај коваријата (резултата иницијалног теста), утицај експерименталног програма на успех ученика није статистички значајан ( $F(3,198) = 1,885$ ;  $p = 0,133$ ) (Табела 30). Овакви резултати указују да су ученици Е-групе подједнако напредовали без обзира на општи успех са краја претходног разреда, а вредност парцијалног ета квадрата од 0,028 имплицира да 2,8% варијансе остварене на финалном тесту може објаснити независна променљива (општи успех ученика). Дакле, може се констатовати да начином рада који подразумева интеграцију софтвера Геогедра у наставни процес ученици, без обзира на општи успех, остварују напредак у образовним постигнућима.

Табела 30. Двофакторска анализа коваријансе

| Dependent Variable: Финално тестирање             |                         |     |             |        |       |                     |
|---------------------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Source                                            | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                                   | 18592,140a              | 8   | 2324,018    | 4,845  | 0,000 | 0,164               |
| Intercept                                         | 11386,819               | 1   | 11386,819   | 23,737 | 0,000 | 0,107               |
| Иницијално тестирање                              | 1850,821                | 1   | 1850,821    | 3,858  | 0,051 | 0,019               |
| Група                                             | 453,765                 | 1   | 453,765     | 0,946  | 0,032 | 0,055               |
| Општи успех                                       | 2713,254                | 3   | 904,418     | 1,885  | 0,133 | 0,028               |
| Група * Општи успех                               | 172,195                 | 3   | 57,398      | 0,120  | 0,948 | 0,002               |
| Error                                             | 94981,471               | 198 | 479,704     |        |       |                     |
| Total                                             | 599374,500              | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                                   | 113573,611              | 206 |             |        |       |                     |
| a. R Squared = 0,164 (Adjusted R Squared = 0,130) |                         |     |             |        |       |                     |

Добијени резултати додатно потврђују позитивне ефекте примене софтвера на раст постигнућа ученика, јер добијена вредност коваријансе ( $F(1,198) = 0,946$ ;  $p = 0,032$ ) упућује на статистички значајну разлику између Е-групе и К-групе, у корист ученика из Е-групе.

На основу претходно изнетог, закључак је да примена Геогевре при реализацији садржаја геометрије у четвртом разреду погодује свим ученицима, без обзира на остварени општи успех на крају трећег разреда. Изузетно је важно истаћи да и ученици са постигнутим најслабијим општим успехом учењем уз софтвер остварују напредак у постигнућима, чинећи његову примену додатно методички оправданом. Слично закључују и Мартиновски и Мартиновски (Martinovski & Martinovski, 2013), који акценат стављају управо на већи успех ученика који иначе имају потешкоћа при савладавању садржаја геометрије. Софтвер ученицима са слабијим успехом наставне садржаје чини динамичним и очигледним, омогућавајући им тако да лакше разумеју геометријске појмове. Међутим, предности примене Геогевре нису ограничене само на допринос ученицима са слабијим успехом, већ се препознају и код ученика са високим постигнућима. Подстичући развој геометријског резонувања софтвер остварује позитиван утицај на повећање образовних постигнућа свих ученика.



## 2. УТИЦАЈ ГЕОГЕБРЕ НА ТРАЈНОСТ ЗНАЊА УЧЕНИКА

Последњи истраживачки задатак односио се на утврђивање доприноса употребе Геогедра софтвера приликом обраде садржаја геометрије повећању трајности знања ученика у четвртом разреду основне школе. Анализом резултата добијених на финалном тестирању утврђено је да након периода употребе софтвера у настави математике ученици остварују знатно виша постигнућа у односу на њихове вршњаке код којих је настава реализована класично. Додатно, намера је била испитати да ли примена Геогедре позитивно утиче и на повећање трајности знања стечених уз њено коришћење. Четири месеца по завршетку експерименталног програма и обављеном финалном тестирању извршено је поновљено тестирање (ретестирање) свих учесника истраживања. Утицај примене софтвера на трајност знања ученика праћен је путем постигнућа на тесту знања четири месеца од извршеног експерименталног програма. У складу са истраживачким задатком, формулисана је и тестирана претпоставка да Геогедра доприноси повећању трајности усвојених геометријских знања ученика у почетној настави математике.

У Табели 31 приказани су резултати ученика на поновљеном тестирању. Ученици из Е-групе остварили су на овом тесту знања слабије резултате ( $M = 48,98$ ;  $SD = 14,78$ ) у односу на резултате са финалног теста спроведеног четири месеца раније ( $M = 55,10$ ;  $SD = 25,93$ ). И ученици К-групе забележили су значајан пад у постигнућима на ретесту ( $M = 33,17$ ;  $SD = 18,33$ ) у односу на резултате са финалног теста ( $M = 41,84$ ;  $SD = 19,14$ ). Дакле, без обзира на то што су и једни и други постигли ниже резултате, ученици из Е-групе су забележили просечно мањи пад у постигнућима (просечно 6,12 поена) у односу на ученике К-групе (просечно 8,67 бодова). Напоменимо да је заборављање природан процес, те је стога и очекивано да ученици на ретесту остваре слабије резултате него на финалном тесту.

Табела 31. Постигнућа ученика на финалном и поновљеном тестирању

|                   |         | n   | M     | SD    | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------|---------|-----|-------|-------|----------------------------------|-------------|
|                   |         |     |       |       | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Финално тестирање | Е-група | 103 | 55,10 | 25,93 | 50,03                            | 60,17       |
|                   | К-група | 104 | 41,84 | 19,14 | 38,12                            | 45,56       |
|                   | Укупно  | 207 | 48,44 | 23,67 | 45,20                            | 51,68       |
| Ретест            | Е-група | 103 | 48,98 | 14,78 | 46,09                            | 51,87       |
|                   | К-група | 104 | 33,17 | 18,33 | 29,61                            | 36,74       |
|                   | Укупно  | 207 | 41,04 | 18,41 | 38,52                            | 43,56       |

Вредности Левеновог теста и на финалном тестирању ( $F(1,205) = 12,059$ ;  $p = 0,001$ ) и на ретесту ( $F(1,205) = 7,814$ ;  $p = 0,006$ ) мање су од граничне вредности (Табела 32), због чега су посматрани резултати Велшовог и Браун–Форсајтовог теста који су отпорни на кршење претпоставке о хомогености варијансе. Вредности оба теста су статистички значајне, па се за утврђивање статистичке значајности разлика у постигнућима може користити анализа варијансе. Примењени тест показао је да постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика на ретесту, и то у корист ученика Е-групе (Табела 32).

Табела 32. Анализа варијансе финалног и поновљеног тестирања

|                                          |                | Levene statistic | df1 | df2     | Sig.  |
|------------------------------------------|----------------|------------------|-----|---------|-------|
| Финално тестирање                        |                | 12,059           | 1   | 205     | 0,001 |
| Ретест                                   |                | 7,814            | 1   | 205     | 0,006 |
| <i>Robust Tests of Equality of Means</i> |                |                  |     |         |       |
|                                          |                | Statistic        | df1 | df2     | Sig.  |
| Финално тестирање                        | Welch          | 17,489           | 1   | 187,648 | 0,000 |
|                                          | Brown–Forsythe | 17,489           | 1   | 187,648 | 0,000 |
| Ретест                                   | Welch          | 46,712           | 1   | 196,918 | 0,000 |
|                                          | Brown–Forsythe | 46,712           | 1   | 196,918 | 0,000 |

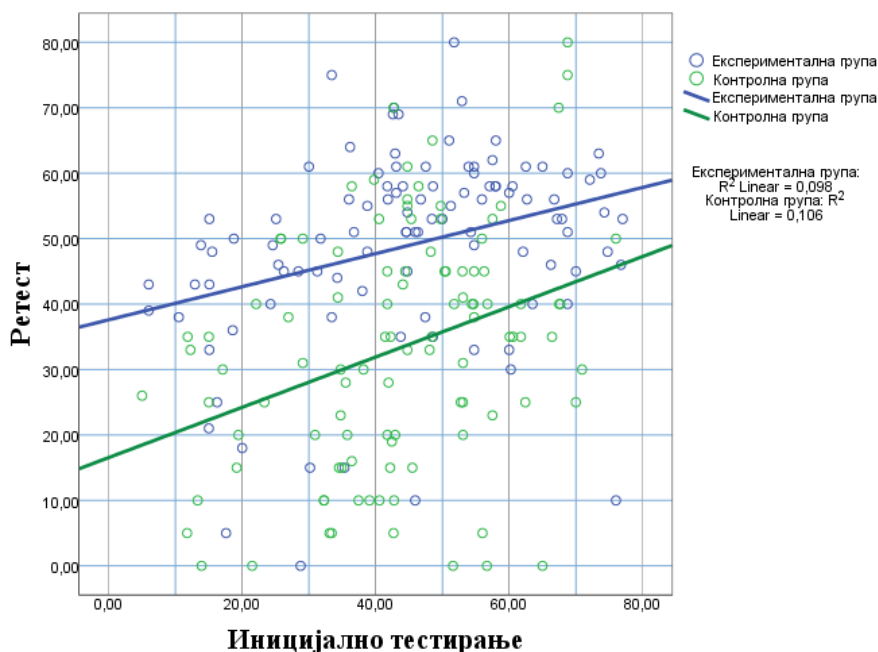
Резултати тестова показују да је разлика у постигнућима Е-групе у односу на К-групу статистички значајна, дакле може се закључити да је претпоставка о ефектима примене софтвера на повећање нивоа постигнућа ученика потврђена. Под утицајем експерименталног програма, ученици из Е-групе су били успешнији у решавању геометријских задатака у поређењу са њиховим вршњацима који су исте садржаје током трајања експеримента усвајали класичним путем.

Вредност Кронбах алфа коефицијента указује да поновљени тест има прихватљиву унутрашњу сагласност (Табела 33), па се резултати добијени тестом могу сматрати поузданим.

Табела 33. Вредност Кронбах коефицијента алфа

| Cronbach's Alpha | Cronbach's Alpha Based on Standardized Items | N of Items |
|------------------|----------------------------------------------|------------|
| 0,720            | 0,724                                        | 8          |

Ради провере да добијени резултати нису последица неуједначености група (експерименталне и контролне), примењена је анализе коваријансе. Резултати иницијалног тестирања узети су за коваријат, док је за проверу линеарности коваријата и зависне променљиве (резултата ретеста) коришћен дијаграм растурања (Графикон 3). Са графикона се може закључити да је у свакој од група однос између зависне променљиве и коваријата праволинијски, односно линеаран. Тиме је потврђена хипотеза о њиховој линеарности.



Графикон 3. Линеарност зависне променљиве и коваријата

Провера интеракције између коваријата и начина рада у групама извршена је статистички испитивањем хомогености регресионих нагиба. Вредност интеракције коваријата и зависне променљиве ( $F(1,203) = 0,987$ ;  $p = 0,322$ ) показује да претпоставка о хомогености регресионих нагиба није нарушена (Табела 34) и да су испуњени услови за примену анализе коваријансе.

Табела 34. Хомогеност регресионих нагиба

| Dependent Variable: Петест   |                         |     |             |        |       |
|------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|
| Source                       | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  |
| Corrected Model              | 18791,904 <sup>a</sup>  | 3   | 6263,968    | 24,931 | 0,000 |
| Intercept                    | 19057,765               | 1   | 19057,765   | 75,852 | 0,000 |
| Група                        | 2879,354                | 1   | 2879,354    | 11,460 | 0,001 |
| Иницијално тестирање         | 5847,554                | 1   | 5847,554    | 23,274 | 0,000 |
| Група * Иницијално тестирање | 247,884                 | 1   | 247,884     | 0,987  | 0,322 |
| Error                        | 51003,787               | 203 | 251,250     |        |       |
| Total                        | 418419,000              | 207 |             |        |       |
| Corrected Total              | 69795,691               | 206 |             |        |       |

a. R Squared = 0,269 (Adjusted R Squared = 0,258)

Пре анализе коваријансе иницијалног тестирања и ретеста (Табела 35) статистички је уклоњен утицај коваријата (резултата са иницијалног теста). Сигнификантност резултата ( $F(1,204) = 47,915$ ;  $p < 0,0005$ ) указује на постојање утицаја резултата ретеста знања ученика ако се уклони утицај коваријата, и да он има карактер статистичке значајности. Парцијални ета квадрат износи 0,190 и указује на велики утицај променљивих (Cohen, 1988, према Pallant, 2011), односно да се после четири месеца од обављеног финалног тестирања 19% варијансе ретеста може објаснити примењеним експерименталним програмом, односно употребом софтвера.

Табела 35. Анализа коваријансе

| Dependent Variable: Петест |                         |     |             |        |       |                     |
|----------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Source                     | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model            | 18544,020 <sup>a</sup>  | 2   | 9272,010    | 36,906 | 0,000 | 0,266               |
| Intercept                  | 19965,743               | 1   | 19965,743   | 79,471 | 0,000 | 0,280               |
| Иницијално тестирање       | 5613,175                | 1   | 5613,175    | 22,342 | 0,000 | 0,099               |
| Група                      | 12037,757               | 1   | 12037,757   | 47,915 | 0,000 | 0,190               |
| Error                      | 51251,670               | 204 | 251,234     |        |       |                     |
| Total                      | 418419,000              | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total            | 69795,691               | 206 |             |        |       |                     |

a. R Squared = 0,266 (Adjusted R Squared = 0,258)

На основу свих претходно приказаних резултата може се закључити да употреба софтвера Геогедра на садржаје геометрије позитивно утиче на трајност знања ученика четвртог разреда. Тиме је потврђена хипотеза да Геогедра доприноси повећању трајности усвојених геометријских знања ученика у почетној настави математике. Дакле, истраживањем је потврђено да примена Геогедре остварује позитиван ефекат на постизање вишег нивоа постигнућа ученика, али и садржаје усвојене уз коришћење софтвера чини трајнијим. До сличних резултата, односно до закључка да знања стечена у процесу наставе уз коришћење Геогедре показују већу стабилност и трајност од оних која су стечена класичним моделом наставе, дошао је Прентовић (Прентовић, 2014). Његово истраживање потврђује да настава реализована уз помоћ образовног софтвера води повећању постигнућа ученика, односно чини ученике оспособљеним за учење путем открића, помаже им да буду успешнији у примени стечених знања и да знања која у том процесу стекну буду трајнија.

Овакви закључци показују да је један од најважнијих циљева наставе да обезбеди да стечено знање буде задржано у свести ученика што дуже. Заборављање јесте природан процес, али и трајност знања представља императив како би се на већ формираним основама усвајали нови садржаји. Квалитет знања се не огледа само у његовом испољавању непосредно након стицања, већ и у томе да ученици буду у могућности да у различитим временским периодима покажу да су то знање трајно усвојили (Мишчевић-Кадиевић, 2009). Дриден и Вос наводе да ученици који уче слушајући наставу и користећи класичан уџбеник запамте, односно репродукују око 30% садржаја, а ученици који непосредно виде, доживе и активно учествују у реализацији наставних садржаја науче и у дужем временском периоду ефикасно репродукују до 90% садржаја (Dryden & Vos, 2001). Ови подаци потврђују најчешће истицану дидактичку компоненту Геогедре, а то је могућност представљања великог броја примера на чијим темељима ученици могу да врше уопштавања и генерализације. Имајући у виду да се показало да ученици на вишим нивоима образовања у недовољној мери владају основним математичким појмовима које би требало да су формирали у прва четири разреда основне школе (Mihajlović, Vulović & Milikić, 2020; Vulović, Mihajlović & Milikić, 2022; Миликић, 2018), употреба Геогедре при реализацији садржаја чини се оправданом и пожељном.

## 2.1. Утицај Геогедре на трајност знања ученика по нивоима

Поред испитивања утицаја софтвера на повећање нивоа постигнућа ученика, један од циљева истраживања био је и открити утицај реализованог експерименталног програма на трајност знања ученика на различитим нивоима образовних постигнућа.

### 2.1.1. Утицај Геогебре на трајност знања ученика на основном нивоу

Дескриптивни показатељи утицаја примене Геогебре на трајност знања ученика на основном нивоу постигнућа са финалног теста и ретеста представљени су у Табели 36. На финалном тестирању ученици Е-групе постигли су бољи резултат ( $M = 15,24$ ;  $SD = 7,15$ ) у односу на њихове вршњаке из одељења у којима се настава одвијала на класичан начин ( $M = 14,13$ ;  $SD = 6,44$ ).

Табела 36. Постигнућа ученика на основном нивоу

|                   |         | n   | M     | SD   | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------|---------|-----|-------|------|----------------------------------|-------------|
|                   |         |     |       |      | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Финално тестирање | Е-група | 103 | 15,24 | 7,15 | 13,84                            | 16,64       |
|                   | К-група | 104 | 14,13 | 6,44 | 12,88                            | 15,39       |
|                   | Укупно  | 207 | 14,69 | 6,81 | 13,75                            | 15,62       |
| Ретест            | Е-група | 103 | 15,58 | 4,86 | 14,63                            | 16,53       |
|                   | К-група | 104 | 12,35 | 7,34 | 10,93                            | 13,78       |
|                   | Укупно  | 207 | 13,96 | 6,42 | 13,08                            | 14,84       |

На ретесту су резултати показали да су ученици са којима је реализован експериментални програм постигли сличан резултат као и на финалном тестирању, уз благо повећање просечног броја поена ( $M = 15,58$ ;  $SD = 4,86$ ), док су ученици из К-групе имали пад у просечном броју поена ( $M = 12,35$ ;  $SD = 7,34$ ) (Табела 36).

Вредност Левеновог теста на ретесту ( $F = 2,156$ ;  $p = 0,369$ ) показује да је претпоставка о једнакости варијансе задовољена (Табела 37) и да се за испитивање статистичке значајности разлика у добијеним резултатима може користити двофакторска анализа варијансе.

Табела 37. Левенов тест једнакости варијанси на основном нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Поновљено тестирање |     |     |       |
|-----------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                       | df1 | df2 | Sig.  |
| 2,156                                   | 1   | 205 | 0,369 |

Након уклањања утицаја коваријата (постигнућа са иницијалног теста) потврђено је постојање статистички значајне разлике у постигнућима ученика на основном нивоу ( $F = 14,521$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 38). Парцијални ета квадрат има вредност 0,066, што показује да је утицај варијансе на резултате ретеста мали (Cohen, 1988, према Pallant, 2011). С обзиром на вредност парцијалног ета квадрата, може се закључити да се 6,6% варијансе приликом ретестирања знања на

основном нивоу постигнућа може објаснити утицајем независне променљиве (експерименталним програмом).

Утицај коваријата (постигнућа на основном нивоу са иницијалног теста) на резултате ученика на ретесту, након уклањања утицаја независне променљиве (групе), статистички је значајан ( $F = 3,536$ ;  $p = 0,017$ ) (Табела 38). Вредност парцијалног ета квадрата од 0,153 указује на умерени утицај експерименталног програма на резултате ретеста знања, тј. 15,3% варијансе на основном нивоу постигнућа са ретеста може се објаснити независном променљивом у виду експерименталног програма.

Табела 38. Анализа коваријансе на основном нивоу постигнућа

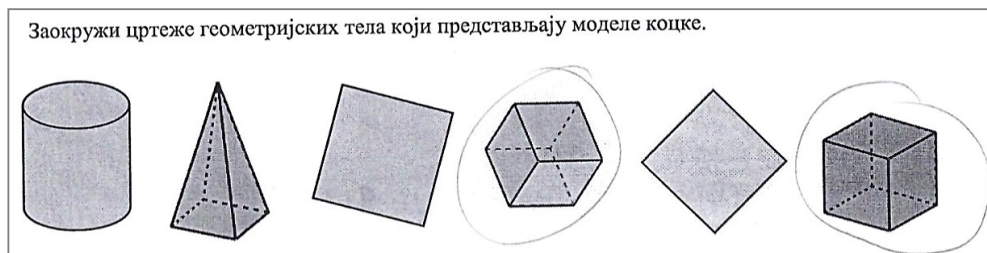
| Tests of Between-Subjects Effects       |                         |     |             |        |       |                     |
|-----------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Поновљено тестирање |                         |     |             |        |       |                     |
| Source                                  | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                         | 598,312a                | 2   | 299,156     | 7,722  | 0,001 | 0,070               |
| Intercept                               | 2053,339                | 1   | 2053,339    | 53,000 | 0,000 | 0,206               |
| Иницијално тестирање                    | 59,506                  | 1   | 59,506      | 3,536  | 0,017 | 0,153               |
| Група                                   | 562,559                 | 1   | 562,559     | 14,521 | 0,000 | 0,066               |
| Error                                   | 7903,379                | 204 | 38,742      |        |       |                     |
| Total                                   | 48850,000               | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                         | 8501,691                | 206 |             |        |       |                     |

a. R Squared = 0,070 (Adjusted R Squared = 0,061)

Добијени резултати потврђују да су се ученици код којих је приликом обраде садржаја геометрије коришћен софтвер на ретесту знања задржали на приближно истом нивоу, док су ученици К-групе постигли лошије резултате у решавању задатака са основног нивоа образовних постигнућа. Начини рада који су примењивани у обе групе испитаника указују да су визуелне репрезентације садржаја допринеле да основна геометријска знања која су ученици стекли буду трајнија у односу на начин стицања знања класичним моделом учења.

Како би се открило на које садржаје основног нивоа постигнућа је утицала примена Геогебре, извршена је анализа радова и резултати ретеста су упоређени са резултатима финалног теста. Као и на финалном тесту, првим задатком са основног нивоа тестирана је способност ученика да међу датим геометријским фигурама у равни и простору препознају модел коцке (Пример 10).

Пример 10. Задатак препознавања коцке међу датим геометријским фигурама са ретеста



У поређењу са финалним тестом на којем је један део ученика имао проблем да од датих фигура издвоји ону облика коцке, на ретесту је веома мали број оних ученика који нису успели да реше исти задатак. Процентуално, 96,11% ученика из Е-групе и 90,38% ученика К-групе је у целости тачно решило задатак, док су преостали грешили означавајући квадрате, при чему ваља нагласити да ниједан ученик није заокружио ваљак или пирамиду. Ако се изврши поређење са резултатима постигнутим на аналогном задатку са финалног теста, може се приметити да су на ретесту ученици успешније правили разлику између коцке и других геометријских тела, док су поједини ученици и даље уместо коцке означавали квадрат.

Другим задатком са основног нивоа на ретесту требало је утврдити у којој мери су ученици усвојили појам мерења површине фигуре ако је дата нестандардна мерна јединица (Пример 11).

Пример 11. Задатак мерења површине правоугаоника са ретеста

Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? 20

б) Троугао В? 40

Колика је површина правоугаоника М ако је јединица мере:

а) Правоугаоник А? 10

б) Троугао В? 30

Анализом радова ученика може се закључити да су разумели захтев задатка – да је површину требало измерити попличавањем – али су занемарили налоге на основу којих је дати правоугаоник требало попличати малим правоугаоником, односно троуглом. Пример 11 приказује најучесталије грешке ученика. У примеру а) ученици су уместо у мерним јединицама  $A$  површину великог правоугаоника изражавали у квадратима из којих се састојала квадратна мрежа. Са друге стране, у примеру б) представљено је погрешно решење у којем су ученици имали проблем да прецизно преброје колико је троуглова потребно да се поплича површ великог правоугаоника. Оно што је заједничко за примере а) и б) јесте да ученици нису тежили графичком представљању поступка попличавања, што би им сасвим сигурно помогло приликом пребројавања фигура.

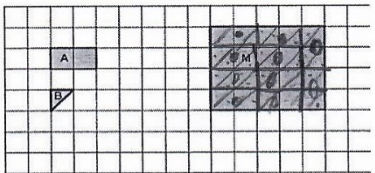
За разлику од финалног теста, на ретесту ниједан ученик није покушао да израчуна површину правоугаоника коришћењем обрасца. Иако су претходно усвојили обрасце за израчунавање површине, ученици су показали да четири месеца након обраде поменутих садржаја боље разумеју суштину мерења површине. У поређењу са претходним, у Примеру 12 представљено је једно од тачних решења истог задатка у којем су ученици приказали поступак попличавања.

#### Пример 12. Задатак мерења површине правоугаоника са ретеста

Колика је површина правоугаоника  $M$  ако је јединица мере:

а) Правоугаоник  $A$ ? 10

б) Троугао  $B$ ? 40



Ученици су површ мерене фигуре делили на фигуре  $A$  и  $B$  које представљају јединице мере водећи рачуна да не дође до њиховог преклапања. Након тога, пребројавањем су утврђивали тачну површину датог правоугаоника. Међу ученицима који су користили овакав начин решавања задатка знатно је више ученика Е-групе, што наводи на закључак да је визуелизација којој су били изложени захваљујући Геогебри остварила позитиван ефекат на њихов начин резоновања. Ученици, свесни подршке коју им адекватан графички приказ пружа, теже његовој употреби приликом решавања проблема.

#### 2.1.2. Утицај Геогебре на трајност знања ученика на средњем нивоу

У циљу дескриптивне анализе утицаја примене софтвера на трајност геометријских знања ученика на средњем нивоу образовних постигнућа, представљени су резултати ученика остварени на финалном тесту и ретесту (Табела 39).

На основу табеларног приказа података да се закључити да су ученици Е-групе на финалном тесту знања ( $M = 21,88$ ;  $SD = 9,98$ ) просечно остварили више резултате у односу на контролну групу ученика ( $M = 16,58$ ;  $SD = 8,42$ ).

Табела 39. Постигнућа ученика на средњем нивоу

|                   |         | n   | M     | SD   | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------|---------|-----|-------|------|----------------------------------|-------------|
|                   |         |     |       |      | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Финално тестирање | Е-група | 103 | 21,88 | 9,98 | 19,93                            | 23,83       |
|                   | К-група | 104 | 16,58 | 8,42 | 14,94                            | 18,21       |
|                   | Укупно  | 207 | 19,22 | 9,58 | 17,90                            | 20,53       |
| Ретест            | Е-група | 103 | 21,24 | 7,57 | 19,76                            | 22,72       |
|                   | К-група | 104 | 14,47 | 8,43 | 12,83                            | 16,11       |
|                   | Укупно  | 207 | 17,84 | 8,68 | 16,65                            | 19,03       |

На ретесту ученици Е-групе постигли су нешто ниже просечне резултате у односу на финални тест ( $M = 21,24$ ;  $SD = 7,57$ ), док је пад у постигнућима ученика К-групе уочљивији ( $M = 14,47$ ;  $SD = 8,43$ ) (Табела 39). Ако се упореде постигнућа на средњем нивоу у оквиру ретеста, може се уочити да су ученици који су радили по експерименталном програму постигли знатно више просечне резултате у поређењу са њиховим вршњацима из контролне групе.

Сигнификантност Левеновог теста ( $F = 2,376$ ;  $p = 0,125$ ) показује да није било значајнијег нарушавања претпоставке о једнакости варијансе (Табела 40) и да се може применити двофакторска анализа варијансе за утврђивање постојања статистички значајне разлике у резултатима ученика на ретесту знања.

Табела 40. Левенов тест једнакости варијансе на средњем нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Поновљено тестирање |     |     |       |
|-----------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                       | df1 | df2 | Sig.  |
| 2,376                                   | 1   | 205 | 0,125 |

По уклањању утицаја резултата иницијалног теста (коваријата), утврђено је да је разлика у постигнућима ученика на средњем нивоу ретеста статистички значајна ( $F = 38,203$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 41). На основу вредности парцијалног ета квадрата од 0,158 може се закључити да постоји умерени утицај варијансе на резултате поновљеног теста знања. Другим речима, четири месеца од финалног тестирања 15,8% варијансе у поновљеном тестирању може се објаснити утицајем спроведеног експерименталног програма.

Након уклањања утицаја независне променљиве (групе), утицај коваријата (резултата на средњем нивоу иницијалног тестирања) на резултате ученика на истом нивоу са ретеста јесте статистички значајан ( $F = 14,357$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 41). Парцијални ета квадрат са вредношћу од 0,462 указује на средњи утицај експерименталног програма на резултате ретеста знања. Вредност парцијалног ета квадрата имплицира да се 46,2% варијансе у резултатима на средњем нивоу постигнућа ретеста може објаснити ефектима обављеног експеримента.

Табела 41. Анализа коваријансе на средњем нивоу постигнућа

| Tests of Between-Subjects Effects       |                         |     |             |         |       |                     |
|-----------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|---------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Поновљено тестирање |                         |     |             |         |       |                     |
| Source                                  | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F       | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                         | 3238,344a               | 2   | 1619,172    | 26,860  | 0,000 | 0,208               |
| Intercept                               | 7994,237                | 1   | 7994,237    | 132,615 | 0,000 | 0,394               |
| Иницијално тестирање                    | 865,450                 | 1   | 865,450     | 14,357  | 0,000 | 0,462               |
| Група                                   | 2302,944                | 1   | 2302,944    | 38,203  | 0,000 | 0,158               |
| Error                                   | 12297,395               | 204 | 60,281      |         |       |                     |
| Total                                   | 81421,000               | 207 |             |         |       |                     |
| Corrected Total                         | 15535,739               | 206 |             |         |       |                     |

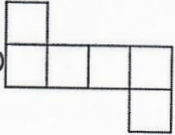
a. R Squared = 0,208 (Adjusted R Squared = 0,201)

Закључак је да четири месеца од обављеног финалног тестирања знања ученици Е-групе и даље постижу знатно више просечне резултате на средњем нивоу постигнућа од ученика из К-групе. На који начин је Геогедбра томе допринела, да знања ученика са средњег нивоа постигнућа буду трајнија, најбоље се може установити квалитативном анализом радова ученика.

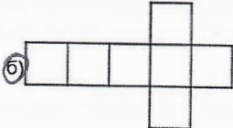
Првим задатком са средњег нивоа постигнућа на ретесту намера је била проверити у којој мери су ученици након четири месеца од увођења појма мреже коцке у стању да је међу датим фигурама препознају.

Пример 13. Задатак уочавања мреже коцке са ретеста

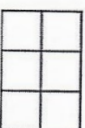
Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.



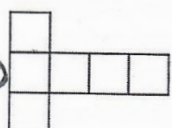
а)



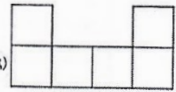
б)



в)



г)

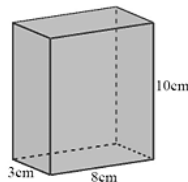
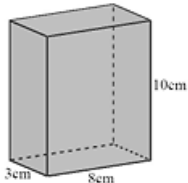


д)

Пример 13 илуструје једну од најчешћих грешака коју су ученици понављали на ретесту. Иако су означавали тачна решења под а) и г), ученици су често означавали и пример под б) као тачан. Овакву грешку су много чешће правили ученици К-групе (25,0%), док је само 9,71% ученика из Е-групе правило исту грешку. Овај податак показује да у обе групе постоји један број ученика који и даље не повезују број страна коцке са бројем квадрата из којих се састоји фигура у примеру б). Мањи проценат ученика из Е-групе који су правили овакву грешку може се довести у директну везу са начином рада који је примењен. Такође, Геогедра је утицала да ниједан ученик из Е-групе не обележи фигуре под в) и д) као мреже коцке, док је са друге стране 7,69% ученика К-групе означило неку од ових фигура. Овакви резултати само потврђују резултате финалног теста и да је приказ трансформације мреже коцке из простора у раван у софтверу допринео да ученици трајно овладају овим појмом.

Други задатак на средњем нивоу ретеста одабран је како би се утврдило да ли ученици четири месеца по завршетку експеримента и даље разумеју на који начин се израчунава површина квадрата. Представљени одговори ученика (Пример 14) указују на то да су ученици заборавили образац и његово правилно коришћење.

#### Пример 14. Задатак израчунавања површине квадрата са ретеста

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Којим изразом можеш израчунати површину квадрата чије су ивице дужине 8cm, 3cm и 10cm? Заокружи слово испред тачног одговора.</p> <p>а) <input checked="" type="radio"/> <math>8 \cdot 3 \cdot 10 \text{ cm}^2</math></p> <p>б) <input type="radio"/> <math>8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \text{ cm}^2</math></p> <p>в) <input type="radio"/> <math>2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10) \text{ cm}^2</math></p> |   |
| <p>Којим изразом можеш израчунати површину квадрата чије су ивице дужине 8cm, 3cm и 10cm? Заокружи слово испред тачног одговора.</p> <p>а) <input type="radio"/> <math>8 \cdot 3 \cdot 10 \text{ cm}^2</math></p> <p>б) <input checked="" type="radio"/> <math>8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \text{ cm}^2</math></p> <p>в) <input type="radio"/> <math>2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10) \text{ cm}^2</math></p> |  |

Само 27,88% ученика из К-групе тачно је решило задатак, док је из Е-групе то учинило 79,32% ученика. Ако се ови резултати доведу у везу са увођењем појма мерења површине, долази се до закључка да су модели креирани у Геогедри допринели да ученици боље схвате његову суштину. Разноврсни примери који захтевају примену обрасца подржани графичким приказима нису од ученика захтевали његово просто меморисање, већ дубље разумевање и смислено коришћење.

### 2.1.3. Утицај Геогебре на трајност знања ученика на напредном нивоу

Ефекти примене софтвера на трајност знања ученика о садржајима геометрије на напредном нивоу образовних постигнућа видљиви су кроз разлику у постигнућима ученика на финалном тесту и ретесту. На финалном тестирању знања ученици Е-групе просечно су остварили боље резултате ( $M = 17,98$ ;  $SD = 10,84$ ) од ученика из К-групе ( $M = 11,13$ ;  $SD = 6,88$ ) (Табела 42).

Табела 42. Постигнућа ученика на напредном нивоу

|                   |         | n   | M     | SD    | 95% Confidence Interval for Mean |             |
|-------------------|---------|-----|-------|-------|----------------------------------|-------------|
|                   |         |     |       |       | Lower Bound                      | Upper Bound |
| Финално тестирање | Е-група | 103 | 17,98 | 10,84 | 15,86                            | 20,10       |
|                   | К-група | 104 | 11,13 | 6,88  | 9,79                             | 12,47       |
|                   | Укупно  | 207 | 14,54 | 9,68  | 13,21                            | 15,87       |
| Ретест            | Е-група | 103 | 12,21 | 7,87  | 10,67                            | 13,75       |
|                   | К-група | 104 | 6,35  | 7,73  | 4,84                             | 7,85        |
|                   | Укупно  | 207 | 9,26  | 8,32  | 8,12                             | 10,40       |

Резултати тестирања обављеног четири месеца након реализације експеримента показују да су обе групе ученика оствариле мањи број поена у односу на резултате финалног теста. Ипак, ученици Е-групе постигли су знатно више просечне резултате ( $M = 12,21$ ;  $SD = 7,87$ ) у односу на њихове вршњаке из К-групе ( $M = 6,35$ ;  $SD = 7,73$ ) (Табела 42).

Резултат Левеновог теста једнакости варијансе потврђује да је на ретесту задовољена претпоставка о једнакости варијансе ( $F = 0,192$ ;  $p = 0,662$ ) (Табела 43) и да се за откривање статистичке значајности разлике у постигнућима ученика на напредном нивоу ретеста може применити двофакторска анализа варијансе.

Табела 43. Левенов тест једнакости варијансе на напредном нивоу постигнућа

| Dependent Variable: Поновљено тестирање |     |     |       |
|-----------------------------------------|-----|-----|-------|
| F                                       | df1 | df2 | Sig.  |
| 0,192                                   | 1   | 205 | 0,662 |

Након што је уклоњен утицај коваријата (резултати иницијалног теста), потврђено је да је разлика у постигнућима на напредном нивоу између експерименталне и контролне групе ученика статистички значајна ( $F = 25,778$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 44). Вредност добијеног парцијалног ета квадрата од 0,112 упућује на то да постоји мали утицај варијансе на резултате ретеста (Cohen, 1988, према

Pallant, 2011). Може се закључити да је 11,2% варијансе на ретесту на напредном нивоу образовних постигнућа објашњено утицајем независне променљиве (експерименталног програма).

Табела 44. Анализа коваријансе на напредном нивоу постигнућа

| Tests of Between-Subjects Effects       |                         |     |             |        |       |                     |
|-----------------------------------------|-------------------------|-----|-------------|--------|-------|---------------------|
| Dependent Variable: Поновљено тестирање |                         |     |             |        |       |                     |
| Source                                  | Type III Sum of Squares | df  | Mean Square | F      | Sig.  | Partial Eta Squared |
| Corrected Model                         | 2610,170 <sup>a</sup>   | 2   | 1305,085    | 22,849 | 0,000 | 0,183               |
| Intercept                               | 3144,273                | 1   | 3144,273    | 55,048 | 0,000 | 0,213               |
| Иницијално тестирање                    | 828,623                 | 1   | 828,623     | 14,507 | 0,000 | 0,466               |
| Група                                   | 1472,406                | 1   | 1472,406    | 25,778 | 0,000 | 0,112               |
| Error                                   | 11652,216               | 204 | 57,119      |        |       |                     |
| Total                                   | 32034,000               | 207 |             |        |       |                     |
| Corrected Total                         | 14262,386               | 206 |             |        |       |                     |

a. R Squared = 0,183 (Adjusted R Squared = 0,175)

Утицај коваријата (постигнућа ученика остварена на напредном нивоу иницијалног теста) на њихове резултате на ретесту након уклањања утицаја независне променљиве (групе) такође је статистички значајан ( $F = 14,507$ ;  $p < 0,0005$ ) (Табела 44). Коефицијент парцијалног ета квадрата 0,466 имплицира да постоји средњи утицај експерименталног програма на резултате ученика на ретесту. На основу вредности парцијалног ета квадрата може се закључити да је 46,6% варијансе приликом ретестирања на напредном нивоу образовних постигнућа објашњено утицајем реализованог експерименталног програма.

У циљу бољег разумевања аспеката у којима је примена софтвера остварила највише ефекте у повећању трајности знања ученика, анализирани су поступци које су ученици користили приликом решавања задатака са напредног нивоа. Овај вид анализе помогао је доношењу јаснијих закључака о дугорочним бенефитима које пружа овако организована настава. С тим у вези, првим задатком са напредног нивоа постигнућа требало је проверити да ли су ученици четири месеца након обављеног финалног тестирања и даље у стању да са успехом израчунају површину правоугаоника. У К-групи мали проценат ученика, свега 6,73%, са успехом је решио цео задатак. Један од разлога за овако лоше резултате може се пронаћи у чињеници да највећи број ученика није користио графички приказ који је дат уз задатак како би лакше решио проблем. Анализом радова уочено је да је свега један ученик из К-групе, од укупно 104, користио графички приказ како би означио односе међу величинама (Пример 15). Међутим, иако је

исправно одредио димензије правоугаоника, ученик је уместо површине израчунао његов обим.

Пример 15. Задатак израчунавања површине правоугаоника са ретеста

Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

$4dm\ 8cm = 48cm$   $48 : 4 = 12$   $P = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 24 + 48 = 72$

Ученици Е-групе не само да су били веома успешни при решавању истог задатка (76,70% их је тачно урадило задатак), већ је анализом радова уочено да је и велики број њих користио слику дату уз задатак (Пример 16).

Пример 16. Задатак израчунавања површине правоугаоника са ретеста

Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4dm 8cm. Одреди површину тог правоугаоника.

а)  $O_k = 4dm\ 8cm = 48cm$   $b = 0 : 4$   $P_p = 24 \cdot 12$   
 $P_p = ?$   $b = 12cm$   $P = 288cm^2$   
 $P = a \cdot b$   $a = 2 \cdot 12$   
 $b = ?$   $a = 24cm$

б)  $O_k = 4dm\ 8cm = 48cm$   $P = ?$   $P = a \cdot a$   $a = ?$   $a = 0 : 4$   
 $n = 48 : 4$   $a = 12cm$   $P = 12 \cdot 12$   $P = 144$   
 $a = 12cm$   $b = 24cm$   $P = ?$   $P = a \cdot b$   $P = 12 \cdot 24$   $P = 288cm^2$

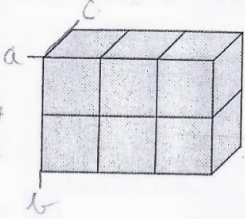
в)  $O = 48cm$   $a = 48 : 4$   $a = 12cm$   
 $P = a \cdot b$   $P = 24 \cdot 12cm$   $P = 288cm^2$

Заједничко за већину радова у којима су ученици користили слику приликом решавања задатка јесте да су одредили тачно решење. Ова чињеница говори о томе колико је експериментални програм оставио снажан утисак на ученике Е-групе. Геогедра је помогла ученицима да развију способност визуелизације и да теже повезивању проблема са његовим графичким приказом.

Слично је и са задатком у којем је требало израчунати површину квадра насталог слагањем шест једнаких коцки. Будући да је за дати број коцки задатак могао имати два тачна решења, графички приказ је недвосмислено указивао о којем квадрату се ради. Међутим, мали број ученика је слику дату уз задатак схватио као још један податак и олакшицу за решавање задатка. Слично као у претходном задатку, у К-групи је само двоје ученика искористило слику како би на њој означило основне елементе потребне за решавање задатка (Пример 17), а тек пет ученика К-групе (4,81%) успело је да тачно реши цео задатак. Најчешћу грешку правили су када су, као на финалном тесту, адитивну особину површине фигура у равни преносили на површину геометријских тела. Најпре би одредили површину једне коцке, а затим добијену вредност површине множили са шест и тако на погрешан начин покушали да израчунају површину квадра.

#### Пример 17. Задатак израчунавања површине квадра са ретеста

Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

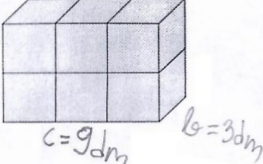


$a = 3 \cdot 3dm = 9dm$  |  $b = 2 \cdot 3dm = 6dm$  |  $c = 3dm$   
 $P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$  |  $P = 2 \cdot 9dm \cdot 6dm + 2 \cdot 9dm \cdot 3dm + 2 \cdot 6dm \cdot 3dm$   
 $P = 108dm^2 + 54dm^2 + 36dm^2$  |  $P = 162dm^2 + 36dm^2$   
 $P = 198dm^2$

Ученици из Е-групе били су далеко успешнији у решавању овог задатка од својих вршњака из К-групе (56,99% ученика Е-групе у целости је тачно решило задатак). Многи од њих користили су слику како би довели у везу дужину ивица коцке и димензије квадра (Пример 18). Оваква визуелна репрезентација помогла је ученицима да потпуније сагледају однос познатих и непознатих вредности и тако лакше дођу до тачног решења.

#### Пример 18. Задатак израчунавања површине квадра са ретеста

Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.



$a = 6dm$  |  $b = 3dm$  |  $c = 3dm$   
 $P = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)dm^2$   
 $P = 2 \cdot (6dm \cdot 3dm + 3dm \cdot 3dm + 6dm \cdot 3dm)$   
 $P = 2 \cdot (18dm^2 + 27dm^2 + 54dm^2)$   
 $P = 2 \cdot 99dm^2$   
 $P = 198dm^2$

б)

Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

$a = 6dm$   
 $b = 3dm$   
 $c = 9dm$   
 $P = ?$

$P = 2 \cdot (18 + 54 + 27)$   
 $P = 0.99$   
 $P = 198dm^2$

$P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$   
 $P = 2 \cdot (6 \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 9)$   
 Површина је  $198dm^2$

Последњим задатком са напредног нивоа образовних постигнућа требало је испитати у којој мери су ученици у задатку који није садржао слику осетили потребу за визуелизацијом проблема. С обзиром да није постојала слика, интересантно је било уочити у којој мери су ученици тежили графичкој репрезентацији и да ли им је помогла при решавању задатка.

Свега четири ученика К-групе (3,85%) успела су да тачно ураде цео задатак, док је њих двоје покушало да проблем графички представи (Пример 19). Занимљиво је да од ученика који су покушали да дају визуелни приказ проблема ни један од њих није успешно решио задатак. Овај податак говори да ученици који су усвајали садржаје геометрије класичним путем нису довољно оспособљени да цртеж користе као помоћ за решавање математичког проблема.

Пример 19. Задатак израчунавања површине коцке са ретеста

а)

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$O = 3m$   
 $B = 2m \ 5dm = 2.5dm$   
 $30 - 25 = 5m$   
 $1 \cdot 1 = 3$

Одговор: Потребно је  $5m^2$  боје да се окречи.

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

$$(1m + 2.5m) \cdot (3m \cdot 1m^2) = 2m \cdot 5dm + 4m = 6m \cdot 5dm$$

б)

Одговор: Потребно је 6m и 5dm да се окречи 4m + 2.5m

$$3m = 30dm$$



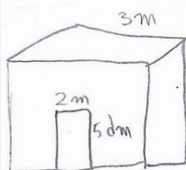
Иако су били мање успешни при решавању истог задатка у односу на резултате финалног теста који је садржао аналогни проблем, ученици Е-групе били су знатно успешнији од својих вршњака из К-групе – 35,92% ученика је тачно урадило задатак, а значајан број њих је до решења дошао управо уз помоћ графичких приказа какви су дати у Примеру 20.

Пример 20. Задатак израчунавања површине коцке са ретеста

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

а)

Одговор: Потребно је 44l боје.



$$a = 3m$$

$$P = ?$$

$$P = 5 \cdot (a \cdot a)$$

$$P = 5 \cdot (3 \cdot 3)$$

$$P = 5 \cdot 9$$

$$P = 45m^2$$

$$a = 2m = 20dm \quad 45m^2 - 1m^2 = 44m^2$$

$$b = 5dm$$

$$P = ?$$

$$P = a \cdot b$$

$$P = 20 \cdot 5$$

$$P = 100dm^2 = 1m^2$$

Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3m. За кречење  $1m^2$  утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2m и широка 5dm?

б)

Одговор: За кречење оставе потребно је 44l боје.

Остава:

$$a = 3m$$

$$P = ?$$

$$P = 5 \cdot (a \cdot a)$$

$$P = 5 \cdot (3 \cdot 3)$$

$$P = 5 \cdot 9$$

$$P = 45m^2$$

Врата:

$$a = 5dm$$

$$b = 2m = 20dm$$

$$P = ?$$

$$P = a \cdot b$$

$$P = 5 \cdot 20$$

$$P = 100dm^2$$



$P_0 - P_v = P_{za}$  кречење

$$45m^2 = 4500dm^2$$

$$4500 - 100 = 4400dm^2$$

$$4400dm^2 = 44m^2$$

Захваљујући квалитативној анализи радова долази се до генералног закључка да су начини рада оставили дубоке трагове на начин размишљања ученика обе групе. Ученици из К-групе ретко су повезивали геометријске проблеме са њиховом визуелном репрезентацијом, покушавали су да их преведу на поље алгебре и тако брже дођу до решења. Са друге стране, ученици из Е-групе и четири месеца после реализације експеримента осећали су потребу да у задацима у којима су дате слике искористе их на начин који им олакшава уочавање познатих и непознатих величина. У задацима у којима слика није била дата, ученици су показивали јасну тенденцију да проблем учине очигледним покушавајући да га графички репрезентују. Ове чињенице недвосмислено указују на то да је софтвер Геогедра остварио позитиван утицај на ученике из експерименталне групе, повећавајући њихову успешност у решавању задатака и приступ проблемима овог типа.



## 5. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА И ПЕДАГОШКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ

У времену различитих друштвених околности, јавља се потреба за континуираним иновирањем наставног процеса. Неопходно је да методе, технике и облици рада прате развој друштва и прилагоде се потребама савременог човека. С обзиром на то да је у протеклом периоду дошло до убрзаног развоја различитих врста софтвера, потреба за његовом применом јавила се и у погледу планирања, организовања и реализације наставе. До сада је имплементација образовног софтвера превасходно била усмерена на средње и високо образовање, док је у основношколском образовању остало доста простора који би био адекватан за његову ефикасну употребу.

Софтвер не би требало примењивати без претходног разматрања. Потребно је користити га на плански начин, како би допринео побољшању квалитета наставе. Када је о настави математике реч, неки њени делови су због својих специфичности посебно погодни за интеграцију образовног софтвера. Једна од таквих области јесте геометрија, нарочито у млађим разредима основне школе. Примена софтвера може значајно побољшати разумевање геометријских појмова и повећати ниво геометријског резонувања ученика. Замена статичних приказа геометријских објеката динамичким и употреба образовног софтвера који пружа јасније и лакше разумљиве визуелне представе истичу се као кључни аспекти модернизације почетне наставе геометрије. Ово је посебно важно ако се имају у виду потешкоће са којима се ученици сусрећу приликом учења почетних геометријских појмова (њихова апстрактна природа, неадекватан графички приказ, немогућност представљања тродимензионалних објеката у равни), а које се могу превазићи уз употребу софтвера.

У фокусу овог истраживања налазио се софтвер Геогедра, анализа доступних сазнања о могућностима примене софтвера у настави математике и емпијска провера ефеката његове употребе на повећање образовних постигнућа ученика. У теоријском делу истраживања разматрани су суштина геометрије и геометријског мишљења и сагледан је положај, улога и повезаност садржаја геометрије са другим областима почетне наставе математике. Намера је била утврдити специфичности које утичу на појаву тешкоћа у учењу садржаја и доводе до појаве слабијих постигнућа ученика. Такође, представљено је радно окружење софтвера, његове основне карактеристике и дати су примери употребе Геогедре приликом формирања основних геометријских појмова.

Спровођењем експерименталног истраживања у модалитету педагошког експеримента са паралелним групама извршена је емпиријска провера креираног модела наставе. Реализацијом експеримента у којем су учествовали ученици четвртог разреда основне школе намера је била утврдити да ли посебно осмишљен модел наставе који се заснивао на употреби софтвера Геогедбра остварује позитиван утицај на раст нивоа образовних постигнућа и трајност знања ученика. Ефекти примене софтвера су разматрани кроз непосредан рад са унапред одабраном, сталном групом ученика код које је приликом извођења наставе коришћена Геогедбра и упоређивање резултата таквог начина рада са ефектима наставе реализоване на класичан начин. На основу резултата које су ученици учесници истраживања остварили на тестовима знања могу се донети следећи закључци.

1. Геогедбра остварује позитиван утицај на повећање нивоа образовних постигнућа ученика четвртог разреда основне школе у поређењу са наставом реализованом на класичан начин;
2. Употреба Геогедбре доводи до побољшања резултата ученика четвртог разреда основне школе у раду са садржајима геометрије на свим нивоима образовних постигнућа;
3. Софтвер Геогедбра доприноси повећању постигнућа ученика оба пола;
4. Геогедбра позитивно утиче на раст образовних постигнућа ученика четвртог разреда основне школе, без обзира на то коју оцену имају из математике;
5. Учењем уз употребу Геогедбре сви ученици постижу напредак у образовним постигнућима, без обзира који општи успех су остварили на крају претходног разреда;
6. Геогедбра афирмативно делује на трајност знања ученика о садржајима геометрије у четвртом разреду основне школе.

Резултати добијени истраживањем потврдили су исправност свих постављених хипотеза и у сагласности су са бројним истраживањима која су потврдила позитивне ефекте наставе математике потпомогнуте софтвером Геогедбра (Akanmu, 2016; Bhagat & Chang, 2015; Љајко, 2014; Kaya, Akçakin & Bulut, 2013; Martinovski & Martinovski, 2013; Mukiri, 2016; Прентовић, 2014; Shadaan & Eu, 2013; Triwahyuningtyas, Rahayu & Agustin, 2019; Tutkun & Ozturk, 2013; Zdráhal, Dofková & Nocar, 2019).

Ефекти оваквог модела наставе нису ограничени само на побољшање образовних постигнућа ученика, он остварује утицај и на начин резонувања и подизање нивоа геометријског мишљења ученика. Боља очигледност и визуелизација математичких садржаја, које Геогедбра омогућава, представљају важан мост који ученицима помаже да пређу са конкретних на апстрактне појмове, који су веома често физички и просторно удаљени од њих. Додатно, софтвер спречава појаву

логичких скокова у процесима вертикалне и хоризонталне математизације, чиме поједностављује математичке садржаје и прилагођава их тренутном нивоу когнитивног развоја ученика. Ученицима млађег школског узраста софтвер помаже да лакше пређу у зону наредног развоја, што их на крају води ка стадијуму формалних интелектуалних операција. Употребом модела креираних у Геогебри ученици који су до тада радили са конкретним дидактичким средствима и користили индуктивни приступ постепено се ослобађају од перцептуализације и почињу да математичке појмове схватају оперативно. Постепено прелазе са нивоа препознавања и перцепције на апстрактни ниво, односно на неформално-дедуктивни ниво.

Укратко, Геогебра са успехом интегрише постулате различитих теорија когнитивног и геометријског мишљења. У складу са нивоом когнитивног развоја ученика, она пружа додатну подршку употреби манипулативних дидактичких средстава која су најчешће присутна у школама. Како материјализовани прикази геометријских објеката неизоставно садрже информације које нису битне за формирање појма (као што су материјал, боја и дебљина), Геогебра се фокусира на стварање идеализованих модела где појмовни карактер геометријских објеката преовладава над фигуралним аспектима.

Иако употребу софтвера одликују бројни позитивни аспекти, важно је указати и на потенцијалне ризике који могу настати ако настава уз употребу рачунара није адекватно организована и реализована. Наиме, до побољшања резултата наставе није могуће доћи само увођењем образовног софтвера без претходног планирања и правилне припреме. Да би ефекти наставе уз подршку софтвера били задовољавајући, потребно је пажљиво припремити све учеснике у процесу подучавања и учења. Учитељ мора пажљиво одабрати наставне материјале и изабрати одговарајуће моделе који ће ученицима омогућити да, у подстицајном окружењу, сопственим размишљањем изграде нове појмове. Љајко (2014) сматра да велика опасност у вези са применом Геогебре лежи у могућности да ученици и наставници формирају став да је коришћење софтвера ограничено искључиво на брже и прецизније цртање геометријских објеката. Оваква једнострана примена довела би до занемаривања симболичког приступа математици и свођења на пуку очигледност. Даље, техноцентризам је препознат као значајан проблем, односно као ситуација у којој ученици повезују разумевање геометријског појма искључиво са применом рачунара. Узрок овог проблема јавља се због другачијег приказа геометријских објеката на екрану у односу на таблу, што може довести до тога да ученици приписују објектима погрешне особине. Како би се овакве ситуације избегле, предлог је да се прикази у Геогебри комбинују са радом на табли или у свескама.

Иако постоји ризик од техноцентризма, посебна пажња у настави математике, посебно у млађим разредима основне школе, мора се посветити правилној

реализацији наставе уз софтвер. Пуни ефекти оваквог модела наставе нису могући ако не постоје одговарајући технички предуслови. На пример, недовољна опремљеност учионица, ограничен број пројектора и интерактивних табли који омогућавају приказивање садржаја креираних у Геогедри представљају озбиљне препреке за успешну интеграцију ИКТ у наставу. Услед поменутих проблема, учитељи радије прибегавају класично организованој настави, лишавајући ученике прилика да истражују и активно учествују у раду. Такође, ни уџбенички комплекти у млађим разредима основне школе не укључују садржаје креиране у Геогедри, због чега би израда приручника, наставних материјала за учитеље и модела имала велики значај за већу ефикасност наставе. Ови материјали би учитељима пружили подршку у стварању интересантнијих и доступнијих активности за ученике, чиме би се побољшала њихова постигнућа и обезбедила трајнија знања. У вези са тим, генералне препоруке учитељима биле би да:

- примењујући овакве иновативне приступе, активно се укључе у процес иновирања наставе јер тиме унапређују образовање;
- раде на личном усавршавању и стицању компетенција за успешно извођење наставе уз употребу ИКТ;
- самостално креирају моделе у Геогедри у складу са сопственим потребама и интересовањима својих ученика;
- информишу се о најновијим верзијама софтвера, могућностима које нуди и начинима његове примене у настави;
- размењују информације и искуства о раду са Геогедром са својим колегама.

Подршка учитељима у имплементацији Геогедра софтвера треба да буде пружена од стране државе, кроз одговарајуће институције и активности као што су центри за стручно усавршавање, семинари и стручни скупови, на којима би се размењивали примери добре праксе. С обзиром на тренд смањења броја програма који се односе на усавршавање учитеља у коришћењу савремених метода, потреба за систематском подршком постаје још израженија (Korpa Vukašinović, Stanojević Veselinović & Milikić, 2024; Mihajlović, Vulović & Milikić, 2020; Вуловић и Миликић, 2017; Вуловић, Чутура и Миликић, 2021). Ова потреба је у складу са препорукама *Стратегије развоја образовања у Републици Србији до 2030. године*, која наглашава потребу за прилагођавањем наставника новим образовним трендовима и сталним усавршавањем.

Неки од првих изазова на које смо наишли приликом планирања и реализације истраживања били су обезбеђивање техничких услова, оспособљавање учитеља, набавка опреме и ресурса, као и техничка подршка, што би требало да буде приоритет приликом увођења образовних софтвера у наставу математике. Пре почетка експеримента било је потребно одабрати школе које испуњавају све техничке услове и добити одобрење од управе школа, педагошко-психолошких

служби, учитеља и родитеља. Такође, велики изазов представљала је и неспремност појединих учитеља да активно учествују у експерименталном делу истраживања и користе Геогедра софтвер приликом извођења наставе, што је захтевало висок степен ангажовања аутора истраживања у реализацији часова у одељењима експерименталне групе.

Поред бројних импликација и препорука, истраживање такође указује и на нека ограничења. Нека од њих проистичу из величине узорка, јер да би се добијени резултати могли генерализовати, неопходно је одабрати велики узорак ученика. Додатно ограничење представља и узраст ученика. Због развојних карактеристика ученика који су учествовали у истраживању, није могуће вршити уопштавање налаза на читаву популацију ученика основне школе. Ученици учесници истраживања нису током трајања експерименталног програма оспособљени за самостално коришћење софтвера, па отуда проистичу одређена ограничења. Поред тога, примена Геогедре је испитана само у контексту геометрије и није могуће изводити опште закључке о ефикасности софтвера у свим аспектима наставе математике. Наиме, истраживање Ђокић, Дабић Боричић и Јелић (Ђокић, Dabić Boričić & Jelić, 2022) које су поредиле ефекте примене ИКТ и манипулативних дидактичких средстава на просторно резоновање ученика четвртог разреда показало је да нема разлике у постигнућима ученика у раду са просторном геометријом у зависности од тога да ли су користили ИКТ или манипулативна дидактичка средства, те аутори сугеришу употребу оба приступа у зависности од доступних ресурса.

Како на простору Републике Србије нема истраживања која су као предмет имала примену софтвера Геогедра на приказани начин, на узорку ученика четвртог разреда и у настави геометрије, надамо се да ће ово истраживање подстаћи нека будућа истраживања у овом пољу али и практично примењивање оваквог приступа настави. Резултати могу пружити основ будућим истраживачима да испитају утицај примене софтвера из других углова, у другим областима почетне наставе математике, да испитају ставове ученика и учитеља о примени Геогедре, или да утврде ефекте коришћења софтвера у другим моделима наставе.

За крај, XXI век представља еру дигитализације, а софтвери попут Геогедре су од пресудне важности за будућност образовања. Употреба ИКТ у настави постаје све неизбежнија, посебно у контексту друштвених околности у којима се одвија наставни процес, а све већа потреба за одвијањем наставе на даљину чини да постанемо свесни потребе за применом образовног софтвера (Milenković, Milikić & Jovović, 2024). С тим у вези, Геогедра се позиционира као кључни алат за савремени наставни процес.

## ЛИТЕРАТУРА

- Abu Bakar, K., Mohd Ayub, A. F., Tarmizi, R. A. (2010). Utilization of Computer Technology in Learning Transformation. *International Journal of Education and Information Technologies*, 2(4), 91–99.
- Adelabu, F. M., Makgato, M., Ramaligela, M. S. (2019). Enhancing Learners' Geometric Thinking Using Dynamic Geometry Computer Software. *Journal of Technical Education and Training*, 11(1), 44–53.
- Agyei, D., Benning, I. (2015). Pre-service Teachers' Use and Perceptions of GeoGebra Software as an Instructional Tool in Teaching Mathematics. *Journal of Educational Development and Practice*, 5(1), 14–30.
- Akanmu, I. A. (2016). Effect of GeoGebra Package on Learning Outcomes of Mathematics (Secondary School) Students in Ogbomoso North Local Government Area of Oyo State. *GeoGebra International Journal of Romania*, 4(2).
- Ansah, S., Asiedu-Addo, S. K., Kabutey, D. T. (2022). Investigating the Effect of Using GeoGebra as an Instructional Tool on Van Hiele's Geometric Thinking Levels of Senior High Technical School Students. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, 10(1), 31–39. <https://doi.org/10.37745/ijmss.13/vol10no1pp.31-39>
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Aspari, D. C., Hartono, M. (2021). The Effectiveness of Module and GeoGebra Based Learning Media to Improve Mathematics Learning Outcomes of Grade IV Students. *7th International Conference on Education and Technology (ICET)*, Malang, Indonesia, 315–319. DOI: [10.1109/ICET53279.2021.9575088](https://doi.org/10.1109/ICET53279.2021.9575088)
- Awaji, B. M., Khalil, I., AL-Zahrani, A. (2025). A Bibliometrics Study of Two Decades of Geogebra Research in Mathematics Education. *Journal of Educational and Social Research*, 15(1), 130–150. <https://doi.org/10.36941/jesr-2025-0011>
- Baltacı, S., Yildiz, A. (2015). GeoGebra 3D from the perspectives of elementary pre-service mathematics teachers who are familiar with a number of software programs. *Cypriot Journal of Educational Sciences*, 10(1), 12–17.
- Baykul, Y. (2005). *Teaching mathematics in primary education (for grades 1–5)*. Ankara: Pegem A.
- Belgheis, S., Kamalludeen, R. (2018). The Intention to Use GeoGebra in the Teaching of Mathematics Among Malaysian Teachers. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 6(1), 109–115.
- Bhagat, K. K., Chang, C.-Y. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry learning – A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 77–86.
- Boo, J. Y., Eu, L. K. (2016). Teaching and Learning of Geometry in Primary School Using GeoGebra. In: *Proceedings of the 21st Asian Technology Conference in Mathematics*, Pattaya, Thailand. Retrieved September, 2018 from the World Wide Web [http://atcm.mathandtech.org/EP2016/contributed/4052016\\_21227.pdf](http://atcm.mathandtech.org/EP2016/contributed/4052016_21227.pdf).
- Božić, R., Takači, Đ., Stankov, G. (2019). Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters. *Interactive Learning Environments*, 29(4), 655–669. DOI: [10.1080/10494820.2019.1602842](https://doi.org/10.1080/10494820.2019.1602842)

- Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bu, L., Spector, J. M., Hacımeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra: A theoretical framework for learning mathematics with understanding. In: L. Bu and R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, 6, 13–40.
- Budinski, N. (2013). A survey on use of computers in mathematical education in Serbia. *The teaching of mathematics*, 16(1), 42–46.
- Budinski, N., Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Milinkovic, D. (2020). Developing Primary School Students' Formal Geometric Definitions Knowledge by Connecting Origami and Technology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2), 1–10. <https://doi.org/10.29333/iejme/6266>
- Bulut, M., Ünlütürk Akçakın, H., Kaya, G., Akçakın, V. (2016). The Effects of GeoGebra on Third Grade Primary Students' Academic Achievement in Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 11(2), 347–355. <https://doi.org/10.29333/iejme/338>
- Bwalya, D. (2019). Influence of Geogebra on Students' Achievement in Geometric Transformations and Attitude towards Learning Mathematics with Technology. *Journal of Education and Practice*, 10(13), 25–36.
- Chua, G. L. L., Tengah, K. A., Shahrill, M., Tan, A., Eu, L. (2017). Analysing Students' Perspectives on Geometry Learning from the Combination of Van Hiele Phase-based Instructions and GeoGebra. In: *Proceeding of the 3rd International Conference on Education*, 3, 205–213. DOI: <https://doi.org/10.17501/icedu.2017.3122>
- Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 420–464.
- Diković, Lj. (2009). Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191–203.
- Dimitrijević, S., Popović, B., Stanić, M. (2012). Computer use in mathematics teaching – overview of the situation in Serbia. *Croatian Journal of Education*, 14(2), 387–415.
- Doğan, M., İçel, R. (2011). The role of dynamic geometry software in the process of learning GeoGebra example about triangles. *International Journal of Human Sciences*, 8(1), 1441–1458.
- Dryden, G., Vos, J. (2001). *Revolucija u učenju*. Zagreb: Educa.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In: R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2–25.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Đokić, O., Dabić Boričić, M., Jelić, M (2022). Comparing ICT With Physical Manipulative Supported Learning of 3D Geometry in Elementary School. *Journal of Educational Computing*, 59(8), 1623–1654. <https://doi.org/10.1177/07356331211001319>

- Ertem Akbaş, E., Alan, K. (2022). Examining 6th Grade Students' Learning of the Subject of Volume with GeoGebra Software Within the Framework of RME Approach. *Open Journal for Educational Research*, 6(1), 89–104. <https://doi.org/10.32591/coas.ojer.0601.07089e>
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60–72.
- Furner, J. M., Marinas, C. A. (2012). Geoboards to Geogebra: Moving from the Concrete to the Abstract in Geometry. In: *Electronic Proceedings of the Twenty-third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 111–118.
- Gal, H., Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 163–183.
- Goldenberg, E., Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry?. In: R. Lehrer and D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, 351–367.
- Gunčaga, J., Majherová, J. (2012). GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia. *North American GeoGebra Journal*, 1(1), 45–48.
- Gunčaga, J., Tkačik, Š., Žilková, K. (2017). Understanding of Selected Geometric Concepts by Pupils of Pre-Primary and Primary Level Education. *European Journal of Contemporary Education*, 6(3), 497–515. DOI: [10.13187/ejced.2017.3.497](https://doi.org/10.13187/ejced.2017.3.497)
- Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In: L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3–19.
- Gutiérrez, A. (2014). Geometry. In: P. Andrews and T. Rowland (Eds.), *MasterClass in Mathematics Education – International Perspectives on Teaching and Learning*, 151–164. London: Bloomsbury.
- Guzman, M. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*.
- Gökçe, S., Güner, P. (2022). Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies*, 27, 5301–5323. DOI: [10.1007/s10639-021-10836-1](https://doi.org/10.1007/s10639-021-10836-1)
- Haahr, J. H., Nielsen, T. K., Hansen, M. E., Jakobsen, S. T. (2005). *Explaining Student Performance – Evidence from the international PISA, TIMSS and PIRLS surveys*. Taastrup: Danish Technological Institute.
- Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R. (2013). When visual and verbal representations meet – The case of geometrical figures. In: *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 409–416.
- Herceg, Đ., Herceg Mandić, V. (2013). GeoGebra in a geography class, *Acta Didactica Napocensia*, 6(1), 61–67.
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., Lavicza, Z. (2008). Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In: *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Nuevo Leon, Mexico. Retrieved June, 2018 from the World Wide Web [https://www.researchgate.net/publication/228869636\\_Teaching\\_and\\_calculus\\_with\\_free\\_dynamic\\_mathematics\\_software\\_GeoGebra](https://www.researchgate.net/publication/228869636_Teaching_and_calculus_with_free_dynamic_mathematics_software_GeoGebra).

- Horzum, T., Ünlü, M. (2017). Pre-service mathematics teachers views about GeoGebra and its use. *Acta Didactica Napocensia*, 10(3), 77–89.
- Houdement, C., Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3, Working group 7*, 1–9. Bellaria: Italy.
- Huang, H.-M. E., Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10–26. <http://dx.doi.org/10.5430/jct.v2n1p10>
- İbili, E. (2019). The Use of Dynamic Geometry Software from a Pedagogical Perspective: Current Status and Future Prospects. *Journal of Computer and Education Research*, 7(14), 337–355. DOI: [10.18009/jcer.579517](https://doi.org/10.18009/jcer.579517)
- Ismail, Z., Rahman, S. N. A. (2017). Learning 2-Dimensional and 3-Dimensional Geometry with Geogebra: Which Would Students Do Better?. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 1(2), 121–134. <https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i2.5541>
- Jeon, K. (2009). Mathematics Hiding in the Nets for a CUBE. *Teaching Children Mathematics*, 15(7), 394–399.
- Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. In: *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1–2), 29–34.
- Juandi, D., Priatna, N. (2018). Discovery learning model with Geogebra assisted for improvement mathematical visual thinking ability. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013, 1–8. DOI: [10.1088/1742-6596/1013/1/012209](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1013/1/012209)
- Kadijević, Đ., Žakelj, A., Gutvajn, N. (2015). Explaining differences for Serbia and Slovenia in mathematics achievement in fourth grade. *Nastava i vaspitanje*, 64(1), 21–38. <https://doi.org/10.5937/NASVAS1501021K>
- Kamii, C., Kysh, J. (2006). The difficulty of “length x width”: Is a square the unit of measurement?. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105–115.
- Kanono, R., Batiibwe, M. S. K. (2024). Students' Knowledge of Integration of GeoGebra in Mathematics Classes in Uganda. *East African Journal of Education Studies*, 7(4), 88–102. <https://doi.org/10.37284/eajes.7.4.2230>
- Kay, R., Kwak, J. Y. (2018). Comparing types of mathematics apps used in primary school classrooms: an exploratory analysis. *Journal of Computers in Education*, 5(3), 349–371. DOI: [10.1007/S40692-018-0109-X](https://doi.org/10.1007/S40692-018-0109-X)
- Kaya, G., Akçakin, V., Bulut, M. (2013). The effects of interactive whiteboards on teaching transformational geometry with dynamic mathematics software. In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Antalya, Türkiye, 2594–2603.
- Klemer, A., Rapoport, S. (2020). Origami and GeoGebra Activities Contribute to Geometric Thinking in Second Graders. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(11), 1–12. <https://doi.org/10.29333/ejmste/8537>
- Kopas Vukašinović, E., Stanojević Veselinović, M., Milikić, M. (2024). Professional Support for Young Researchers. *Pedagogy*, 96(4), 475–487. <https://doi.org/10.53656/ped2024-4.03>
- Kösa, T., Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic geometry. *Procedia – Social and Behavioral Sciences* 2, 1385–1389.

- Kostić Kovačević, I., Gavrilović, J. (2011). Inkorporiranje obrazovnih softvera za dinamičku matematiku u sistem za učenje na daljinu. U: *X međunarodni naučno-stručni simpozijum INFOTEH – JAHORINA 2011*, Bosna i Hercegovina. Preuzeto septembra 2020. sa internet adrese [https://www.researchgate.net/publication/256426293\\_Inkorporiranje\\_obrazovnih\\_softvera\\_za\\_dinamicku\\_matematiku\\_u\\_sisteme\\_za\\_ucenje\\_na\\_daljinu](https://www.researchgate.net/publication/256426293_Inkorporiranje_obrazovnih_softvera_za_dinamicku_matematiku_u_sisteme_za_ucenje_na_daljinu).
- Kozhevnikov, M., Kosslyn, S., Shephard, J. (2005). Spatial versus object visualizers: A new characterization of visual cognitive style. *Memory & Cognition*, 33(4), 710–726.
- Küçük, K., Gün, Ö. (2023). The Effects of GeoGebra-Assisted Transformation Geometry Instruction on Student Achievement, Attitudes, and Beliefs. *Journal of Computer and Education Research*, 11(22), 671–690. <https://doi.org/10.18009/jcer.1324668>
- Kutluca, T. (2013). The effect of geometry instruction with dynamic geometry software; GeoGebra on Van Hiele geometry understanding levels of students. *Educational Research and Reviews*, 8(17), 1509–1518. <https://doi.org/10.5897/ERR2013.1554>
- Lee, H. J., Boyadzhiev, I. (2013). Challenging Common Misconceptions of Fractions through GeoGebra. In: R. McBride and M. Searson (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2013*, 2893–2898.
- Little, C. (2009). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers & New Opportunities. *Mathematics in School*, 38(2), 9–11.
- Ljajko, E., Pavličić, Z., Radulović, I. (2010). Some Technical Difficulties With GeoGebra in High-school Mathematics Instruction. In: D. Aćimović (ed.), *Zbornik radova konferencije MIT 2009*, 206–209. Kopaonik–Budva.
- Machaba, F. M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, 37(1), a304. <http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.304>
- Mackrell, K. (2011). Integrating Number, Algebra, and Geometry with Interactive Geometry Software. In: *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME7*, Rzeszów, Poland.
- Mainali, B. R. (2014). *GeoGebra from Students' Perspectives*. Retrieved September 2018 from the World Wide Web <https://ggijro1.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/01/art47141.pdf>.
- Martin, W. G., Strutchens, M. E. (2000). Geometry & measurement. In: E. A. Silver and P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*, 193–234.
- Martín-Caraballo, A. M., Tenorio-Villalón, Á. F. (2015). Teaching Numerical Methods for Non-linear Equations with GeoGebra-Based Activities. *Mathematics Education*, 10(2), 53–65. <https://doi.org/10.29333/iejme/291>
- Martinovski, J., Martinovski, S. (2013). Using Geogebra in Primary Schools. *Horizons*, 63–68.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889–918.
- Mensah, P. A. A., Ansu, B., Besing Karadaar, I., Gurah Junior, J. (2023). GeoGebra as a Tool for Improving Mathematics Instruction and Learning by Ghanaian Teachers. *American Journal of Education and Technology*, 2(2), 69–75. <https://doi.org/10.54536/ajet.v2i2.1586>
- Mihajlović, A., Vulović, N., Milikić, M. (2020). The Teaching Efficacy of Preservice Mathematics Teachers: Research in the Republic of Serbia. *The New Educational Review*, 61(3), 63–75. DOI: [10.15804/tner.2020.61.3.05](https://doi.org/10.15804/tner.2020.61.3.05)

- Mihajlović, A., Vulović, N., Milikić, M. (2020). Using the Fangcheng method to develop pre-algebra concepts in primary-grade students. *Teaching Innovations, Special Issue – A Theatre of Mathematical History – A Historical Memoir*, 33(1), 72–88. doi: [10.5937/inovacije2001072M](https://doi.org/10.5937/inovacije2001072M)
- Milenković, A., & Vučićević, N. (2024). Advancing students' achievements in multivariable calculus education through CSCL. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(2), em0776. <https://doi.org/10.29333/iejme/14472>
- Milenković, A., Milikić, M., Jovović, T. (2024). Embracing technology in distance mathematics education: Investigating students' perceptions of the teachers' usage of the pen tablet. *Research in Pedagogy*, 14(1), 28–45. DOI: [10.5937/IstrPed2401028M](https://doi.org/10.5937/IstrPed2401028M)
- Milenković, A., Takači, Đ., & Božić, R. (2024). The Influence of Dynamic Representations in Mobile Applications on Students' Learning Achievements in Solving Multiple Integrals. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 12(5), 1340–1359. <https://doi.org/10.46328/ijemst.4246>
- Moyer-Packenham, P. S., Ulmer, L. A., Anderson, K. L. (2012). Examining Pictorial Models and Virtual Manipulatives for Third-Grade Fraction Instruction. *Journal of Interactive Online Learning*, 11(3), 103–120.
- Mthethwa, M., Bayaga, A., Bossé, M. J., Williams, D. (2020). GeoGebra for learning and teaching: A parallel investigation. *South African Journal of Education*, 40(2), 1–12. <https://doi.org/10.15700/saje.v40n2a1669>
- Mudaly, V., Fletcher, T. (2019). The Effectiveness of GeoGebra When Teaching Linear Functions Using the iPad. *Problems of Education in the 21<sup>st</sup> Century*, 77(1), 55–81. <https://doi.org/10.33225/pec/19.77.55>
- Mukiri, M. I. (2016). *Feasibility of Using GeoGebra in the Teaching and Learning of Geometry Concepts in Secondary Schools in Kajiado County, Kenya* (PhD Thesis). School of Education of Kenyatta University.
- Mulligan, J., Prescott, A., Mitchelmore, M., Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young students' images of area measurement. *Australian primary mathematics classroom*, 10(2), 4–8.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Boston: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Murni, V., Sariyasa, S., Ardana, I. M. (2017). GeoGebra Assist Discovery Learning Model for Problem Solving Ability and Attitude toward Mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 895, 1–6. DOI: [10.1088/1742-6596/895/1/012049](https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012049)
- Mushipe, M., Ogonnaya, U. I. (2019). Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 14(8), 206–219. DOI: <https://doi.org/10.3991/ijet.v14i08.9581>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nzaramyimana, E., Mukandayambaje, E., Iyamuremye, L., Hakizumuremyi, V., Ukobizaba, F. (2021). Effectiveness of GeoGebra towards Students' Active Learning, Performance and Interest to learn Mathematics. *International Journal of Mathematics and Computer Research*, 9(10), 2423–2430. DOI: <https://doi.org/10.47191/ijmcr/v9i10.05>

- Olsson, J. (2019). Relations Between Task Design and Students' Utilization of GeoGebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 5, 223–251. <https://doi.org/10.1007/s40751-019-00051-6>
- Pallant, J. (2011). *SPSS: priručnik za preživljavanje: postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a*. Beograd: Mikro knjiga.
- Pech, P. (2012). *How integration of DGS and CAS helps to solve problems in geometry*. Retrieved November, 2020 from the World Wide Web [https://atcm.mathandtech.org/ep2012/invited\\_papers/3472012\\_19796.pdf](https://atcm.mathandtech.org/ep2012/invited_papers/3472012_19796.pdf).
- Phan-Yamada, T., Man, S. W. (2018). Teaching Statistics with GeoGebra. *North American GeoGebra Journal*, 7(1), 14-24.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York: Norton.
- Pittalis, M., Christou, C. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 673–689.
- Potkonjak, N., Šimleša, P. (ur.) (1989). *Pedagoška enciklopedija 1*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Preiner, J. (2008). *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra* (PhD Thesis). Slazburg: University of Salzburg, Faculty of Natural Sciences.
- Presmeg N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205–235.
- Prodromou, T. (2014). GeoGebra in Teaching and Learning Introductory Statistics. *The Research Journal of Mathematics and Technology*, 3(2), 17–30.
- Radovanović, V., Karić, J. (2011). Stavovi nastavnika prema primeni informacionih i komunikacionih tehnologija u školama za gluve i nagluve. *Specijalna edukacija i rehabilitacija*, 10(1), 37–48.
- Rambe, I., Syahputra, M. R., Octariani, D., Matondang, A. (2020). Discovery Learning Model for Solving System of Linear Equations using GeoGebra. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Multidisciplinary Research*, 383–386. DOI: [10.5220/0008885503830386](https://doi.org/10.5220/0008885503830386)
- Ramlan, A. M., Cahyono, E., Fahinu, Hali, F. (2020). Geometric Reasoning Ability Based on Van Hiele Theory by Geogebra Software. In: *Proceeding of USN Kolaka – ADRI International Conference on Sustainable Coastal-Community Development*, 1, 69–74. <https://doi.org/10.31327/icusn-adri.v1i0.1141>
- Ratnasari, D. I. R., Mariani, S., Mulyono, M. (2020). Mathematics Creative Thinking Skills Reviewed from the Students' Self-Confidence by Implementing the Treffinger Learning Model Assisted by Geogebra. *Journal of Primary Education*, 9(4), 377–386. DOI: [10.15294/jpe.v9i4.41059](https://doi.org/10.15294/jpe.v9i4.41059)
- Sarama, J., Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Shadaan, P., Eu, L. K. (2013). Effectiveness of Using Geogebra on Students' Understanding in Learning Circles. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 1(4), 1–11.
- Simbolon, A. K. A. P., Siahaan, L. M. (2021). The Use of Geogebra Software in Improving Student's Mathematical Abilities in Learning Geometry. In: *Proceedings of the International Conference on Culture Heritage, Education, Sustainable Tourism, and Innovation Technologies (CESIT 2020)*, 352–360. DOI: [10.5220/0010311800003051](https://doi.org/10.5220/0010311800003051)

- Sinclair, N., Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM - Mathematics Education*, 47, 319–329. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4>
- Soedjadi. (1991). *The feature of mathematics education at our primary school*. Indonesia, Surabaya State University.
- Stephan, M., Clements, D. H. (2003). *Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2*. Retrieved January, 2020 from the World Wide Web [https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/258933218\\_Linear\\_and\\_area\\_measurement\\_in\\_pre-kindergarten\\_to\\_grade\\_2/links/55cb3f4f08aebc967dfce792/Linear-and-area-measurement-in-prekindergarten-to-grade-2.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Clements-2/publication/258933218_Linear_and_area_measurement_in_pre-kindergarten_to_grade_2/links/55cb3f4f08aebc967dfce792/Linear-and-area-measurement-in-prekindergarten-to-grade-2.pdf).
- Šuljić, Š. (2005). GeoGebra - Prvi softver dinamične geometrije na hrvatskom jeziku. *Matematika i škola*, 6(28), 123–130.
- Taber, K. S. (2018). The Use of Cronbach's Alpha When Developing and Reporting Research Instruments in Science Education. *Research in Science Education*, 48, 1273–1296. <https://doi.org/10.1007/s11165-016-9602-2>
- Tamam, B., Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1882, 1–7. DOI: [10.1088/1742-6596/1882/1/012042](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012042)
- Thambi, N., Eu, L. K. (2013). Effect of students' achievement in fractions using GeoGebra. *SAINSAB*, 16, 97–106.
- The International Commission on Mathematical Instruction (1995). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century. *Educational Studies in Mathematics*, 28, 91–98.
- Tiwari, S., Obradović, D., Rathour, L., Narayan Mishra, L., Narayan Mishra, V. (2021). Visualization In Mathematics Teaching. *Journal of Advances in Mathematics*, 20, 431–439. <https://doi.org/10.24297/jam.v20i.9136>
- Tolić, M., Jukić, R., Josipović, V. (2015). Multimedijско učenje i vrednovanje matematičkih paoa na primjeru GeoGebre. *Medijska istraživanja*, 21(2), 125–153.
- Tomčić, L. (2020). Princip očiglednosti kroz delo “Orbis Sensualium pictus”. *Pedagoška stvarnost*, LXVI, 44–58. <https://doi.org/10.19090/ps.2019.0.44-58>
- Tomić, M. K. (2013). Mathematical Software in Croatian Mathematics Classrooms - A Review of Geogebra and Sketchpad. *Croatian Journal of Education*, 15(1), 197–208.
- Tran, T., Nguyen, N.-G., Bui, M.-D., Phan, A.-H. (2014). Discovery Learning with the Help of the GeoGebra Dynamic Geometry Software. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 7(1), 44–57.
- Triwahyuningtyas, D., Rahayu, S., Agustin W. D. (2019). The impact of Geogebra classic application on learning geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1381(1), 1–4. DOI: [10.1088/1742-6596/1381/1/012033](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1381/1/012033)
- Tutkun, O. F., Ozturk, B. (2013). The Effect of Geogebra Mathematical Software to the Academic Success and the Level of Van Hiele Geometrical Thinking. *International Journal of Academic Research*, 5(4), 22–28. DOI: [10.7813/2075-4124.2013/5-4/B.3](https://doi.org/10.7813/2075-4124.2013/5-4/B.3)
- Udin, H. S., Ismail, N., & Alhassora, N. S. A. (2024). Integration of Geogebra in Teaching Geometry to Year 5 Pupils in Primary School. *Quantum Journal of Social Sciences and Humanities*, 5(SI1), 194–204. <https://doi.org/10.55197/qjssh.v5iSI1.576>
- Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry, In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, 17–31. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Vágová, R. (2021). Designing Combinations of Physical and Digital Manipulatives to Develop Students' Visualisation. *Open Education Studies*, 3, 56-75. <https://doi.org/10.1515/edu-2020-0140>
- Vágová, R., Kmetová, M. (2019). GeoGebra, a Tool to Improve Students' Visual Imaging. *Acta Didactica Napocensia*, 12(2), 225–237. DOI: [10.24193/adn.12.2.18](https://doi.org/10.24193/adn.12.2.18)
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Vighi, P., Marchini, C. (2011). A gap between learning and teaching geometry. Paper presented at the *CERME7 Conference*, Rzeszow, Poland. Retrieved August 2021 from the World Wide Web [https://kipdf.com/a-gap-between-learning-and-teaching-geometry-1\\_5acd8a4d7f8b9a86478b4638.html](https://kipdf.com/a-gap-between-learning-and-teaching-geometry-1_5acd8a4d7f8b9a86478b4638.html).
- Vulović, N., Mihajlović, A., Milikić, M. (2022). Achievements of younger primary school students in mathematics competitions during the Covid-19 pandemic. *Uzdanica*, 19(Special issue), 133–147. DOI: [10.46793/Uzdanica19.S.133V](https://doi.org/10.46793/Uzdanica19.S.133V)
- Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D. (2013). Using GeoGebra to develop primary school students' understanding of reflection. *North American GeoGebra Journal*, 2(1), 19–23.
- Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., & Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: a meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*, 57(2), 437–458. <https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886>
- Yu, P. W. D., Tawfeeq, D. A. (2011). Can a kite be a triangle? Bidirectional discourse and student inquiry in a middle school interactive geometric lesson. *New England Mathematics Journal*, 43, 7–20.
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 224–239.
- Zdráhal, T., Dofková, R., Nocar, D. (2019). The Effects of ICT on Student Achievement in Mathematics. In: *Proceedings of ICERI2019*, 1166–1173. Seville, Spain. DOI: [10.21125/iceri.2019.0359](https://doi.org/10.21125/iceri.2019.0359)
- Zengin, Y., Furkan, H., Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software Geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31, 183–187.
- Žilinskienė, I. (2014). Use of GeoGebra in primary math education: a theoretical approach. In: *Proceedings of the Lithuanian Mathematical Society*, 55, 73–78. <https://doi.org/10.15388/LMR.A.2014.14>
- Žilinskienė, I., Demirbilek, M. (2015). Use of GeoGebra in Primary Math Education in Lithuania: An Exploratory Study from Teachers' Perspective. *Informatics in Education*, 14(1), 127–142. DOI: [10.15388/infedu.2015.08](https://doi.org/10.15388/infedu.2015.08)
- Божић, Р. (2019). *Методичка обрада функција са њарамејрима уз њомоћ рачунара* (докторска дисертација). Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет.
- Вуловић, Н., Миленковић, А., Миликић, М. (2024). Разлике у постигнућима ученика 7. и 8. разреда који наставу похађају у основним школама и при гимназијама на државним такмичењима из математике. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, 26(27), 221–244. <https://doi.org/10.5937/ZRPFU2426221V>
- Вуловић, Н., Миликић, М. (2017). Мишљења учитеља и наставника математике о применљивости стечених знања. *Учење и настава*, 3(4), 697–706.

- Вуловић, Н., Чутура, И., Миликић, М. (2021). Оспособљеност будућих учитеља за процену прецизности текстуалних математичких задатака. *Узданица*, 18(2), 289–305. DOI: [10.46793/Uzdanica18.II.289V](https://doi.org/10.46793/Uzdanica18.II.289V)
- Гашић-Павишић, С., Станковић, Д. (2012). Образовна постигнућа ученика из Србије у истраживању TIMSS 2011. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 44(2), 243–265.
- Глејзер, Г. Д. (1996). Геометрија у школи. Проблеми и расуђивања. *Настава математике*, XLII(1-2), 1–6.
- Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2015). *Методика математике у разредној настави*. Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.
- Ђокић, О. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије* (докторска дисертација). Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.
- Ђокић, О., Зељић, М. (2017). Теорије развоја геометријског мишљења према Ван Хилу, Фишбајну и Удемон-Кузникау. *ТЕМЕ*, 41(3), 623–637. <https://doi.org/10.22190/TEME1703623D>
- Зељић, М. Ж., Иванчевић, М. Р. (2019). Алгоритамски и концептуални приступ мерењу површине фигура. *Иновације у настави*, XXXII(1), 64–74. <https://doi.org/10.5937/inovacije1901064Z>
- Коменски, Ј. А. (1954). *Велика дидактика*. Београд: Савез педагошких друштава.
- Љајко, Е. (2014). *Улога GeoGebra-е на предавање и учење аналитичке геометрије у средњој школи* (докторска дисертација). Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет.
- Максимовић, Ј., Османовић, Ј. (2020). *Статистички тијелови у педагошким истраживањима*. Ниш: Филозофски факултет Универзитета у Нишу.
- Марушић Јаблановић, М., Гутвајн, Н., Јакшић, И. (ур.) (2017). TIMSS 2015 у Србији – резултати међународног истраживања постигнућа ученика 4. разреда основне школе из математике и природних наука. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 50(2).
- Миленковић, А. (2021). *Визуализација наставних садржаја из вишеструких интеграла – коинтезивни конфликти* (докторска дисертација). Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет.
- Миликић, М. (2018). Трајност математичких знања ученика средњих школа стечених у првом циклусу обавезног образовања. *Узданица*, 15(1), 221–231.
- Миликић, М., Вуловић, Н., Михајловић, А. (2020). Геометријска интерпретација разломака применом образовног софтвера ГеогЕбра. *Узданица*, 17(1), 307–317. DOI: [10.18485/uzdanica.2020.17.1.19](https://doi.org/10.18485/uzdanica.2020.17.1.19)
- Миликић, М., Маричић, С., Вуловић, Н. (2022). Примена софтвера GeoGebra при формирању појма обима фигуре у млађим разредима основне школе. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, 25(24), 127–140. <https://doi.org/10.5937/ZRPFU2224127M>
- Милинковић, Ј., Марушић Јаблановић, М., Дабић Боричић, М. (2017). Постигнуће ученика из математике: главни налази, трендови и наставни програм. *Бидлиотека „Педагошка теорија и пракса”*, 44.
- Мишчевић-Кадријевић, Г. (2009). Кооперативни приступ у настави и трајност ученичких знања. *Настава и васпитање*, LVIII(4), 499–508.

- Општински стандарди основношколског образовања – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања, Математика* (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.
- Павловић Бабић, Д., Бауцал, А. (2009). *Математичка писменост: PISA 2003 и PISA 2006*. Београд: Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Институт за психологију Филозофског факултета Универзитета у Београду.
- Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 16/2018.
- Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 10/2017.
- Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 5/2019.
- Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019). *Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије*, бр. 11/2019.
- Првановић, С. (1974). *Методика наставе математике: уџбеник за VI разред ђедајошке академије*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Прентовић, Б. (2014). *Рачунар у настави аналитичке геометрије у гимназији* (докторска дисертација). Нови Сад: Природно-математички факултет.
- Ранђеловић, Б., Ђукић, Д., Трбојевић, Т., Марковић, Б. (2024). *Резултати међународног истраживања ТИМСС 2023: Национални извештај Републике Србије*, Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.
- Станковић, М., Јорданоновић, М., Јанковић, С. (2015). Примена програмског пакета GeoGebra у циљу осавремењивања наставе математике. У: Ј. Арсенијевић (ур.), *Компјутеризација васпитавања за друштво знања*, 547–554. Кикинда.
- Стратегија развоја образовања и васпитања у Републици Србији до 2030. године (2021). *Службени гласник Републике Србије*, 63.
- Тончева, Н. (2011). *Софтверни технологије за създавање на дидактички материјали за учење по математика*. Шумен: Шуменски универзитет „Епископ Константин Преславски“.
- Чапрић, Г. (ур.) (2007). *Национално тестирање ученика IV разреда*. Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.
- Шпијуновић, К., Маричић, С. (2016). *Методика основне наставе математике*. Ужице: Учитељски факултет.

## ПРИЛОЗИ

## ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА

Име и презиме: \_\_\_\_\_

Разред и одељење: \_\_\_\_\_

## Геометријске фигуре и тела

## Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима, њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за дужину, израчунавању обима фигура.

Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли, а затим покушај да даш одговор на постављено питање. Код појединих задатака треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (1 школски час).

*Желимо ти многа успеха у раду!*

## Задаци

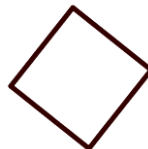
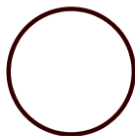
1. Линијом споји назив геометријске фигуре са одговарајућим обликом.

Троугао

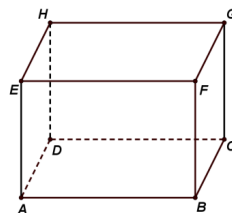
Круг

Квадрат

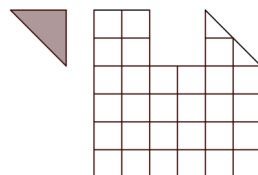
Правоугаоник



---

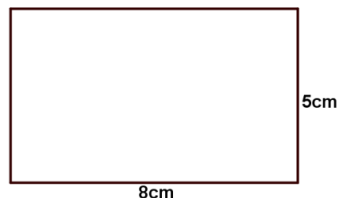


Потребно је \_\_\_\_\_ фигура.



a) 12 dm,    δ) 104 mm,    в) 68 cm,    г) 9 dm,    д) 1 240 mm,    ё) 100 cm.

а)  $2 + (5 \text{ cm} + 8 \text{ cm})$ ,  
 б)  $5 \text{ cm} + 8 \text{ cm}$ ,  
 в)  $5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 5 \text{ cm}$ ,  
 г)  $2 \cdot (5 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm})$ .

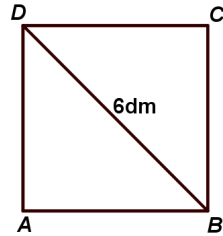


а) обим троугла чије су странице дужине 12 cm, 15 cm, 21 cm;

б) дужину странице квадрата чији је обим једнак обиму троугла;

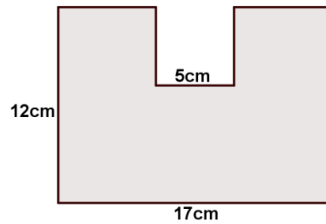
в) дужину странице правоугаоника чији је обим једнак обиму троугла, а једна страница је 14 cm.

7. Нацртан је квадрат  $ABCD$ . Дуж  $BD$  дели квадрат на два једнака троугла. Колики је обим квадрата ако је обим једног троугла  $16 \text{ dm}$ ?



Обим квадрата је \_\_\_\_\_ dm.

8. Из правоугаоника је „одсечен” квадрат. Колики је обим тако добијене фигуре?



Обим фигуре је \_\_\_\_\_ cm.

## ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА

Разред и одељење: \_\_\_\_\_

Име и презиме: \_\_\_\_\_

## Израчунавање површине. Јединице мере за површину

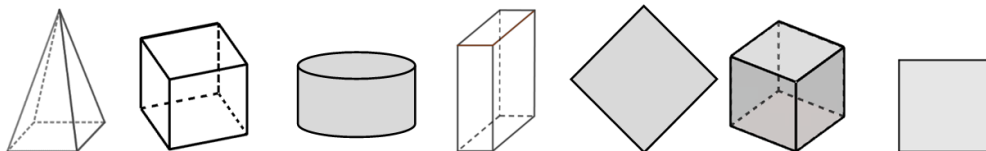
## Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима, њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за површину, израчунавању површине фигура и тела.

Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли, а затим покушај да даш одговор на постављено питање. У неким задацима треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (један школски час).

*Желимо ти многа успеха у раду!*

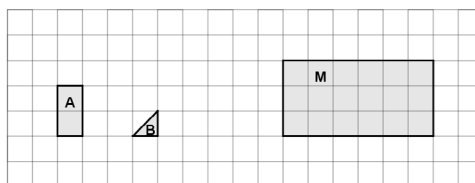
1. Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.



2. Колика је површина правоугаоника  $M$  ако је јединица мере:

а) Правоугаоник  $A$ ? \_\_\_\_\_

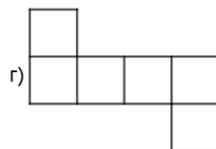
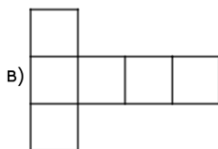
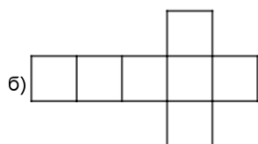
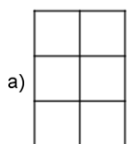
б) Троугао  $B$ ? \_\_\_\_\_



3. Сваки од датих појмова повежи линијом са мерном јединицом којом би измерио његову површину.

|                    |        |
|--------------------|--------|
| Коверта за писмо   | $m^2$  |
| Квадратић у свесци | $cm^2$ |
| Под стана          | $mm^2$ |
| Терен за фудбал    | a      |
| Србија             | $km^2$ |
|                    | $dm^2$ |

4. Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

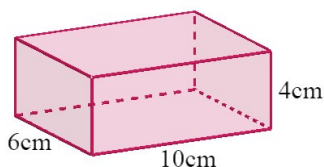


5. Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 10 cm, 6 cm и 4 cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

а)  $10 \cdot 6 \cdot 4 \text{ cm}^2$

б)  $10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \text{ cm}^2$

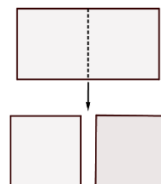
в)  $2 \cdot (10 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4) \text{ cm}^2$



6. Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 5 dm 6 cm. Одреди површину тог правоугаоника.

\_\_\_\_\_

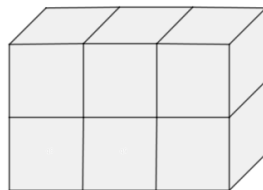
\_\_\_\_\_



7. Милета је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 2 dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

---

---



8. Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3 m. За кречење  $1 \text{ m}^2$  утроси се пола литра боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2 m и широка 5 dm?

---

---

Одговор: \_\_\_\_\_

### ПРИЛОГ 3. РЕТЕСТ ЗНАЊА

Разред и одељење: \_\_\_\_\_

Име и презиме: \_\_\_\_\_

#### Израчунавање површине. Јединице мере за површину

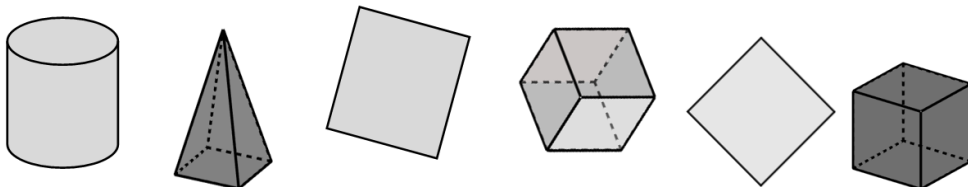
##### Упутство за рад

На овом тесту решаваћеш задатке о геометријским фигурама и телима: њиховим особинама, међусобним односима, мерним јединицама за површину, израчунавању површине фигура и тела.

Сваки задатак најпре пажљиво прочитај, размисли, а затим покушај да даш одговор на постављено питање. У неким задацима треба да одговориш тако што ћеш заокружити слово испред тачног одговора, а у неким да решиш задатак. Буди упоран, прво размисли пре него што даш одговор – понекад постоји један, а понекад више одговора који су тачни. Ако неки задатак не знаш да решиш пређи на следећи задатак. На крају се врати на задатке које ниси решио и још једном пробај да их урадиш. Труди се да одговоре напишеш читко. Време за решавање задатака износи 45 минута (један школски час).

*Желимо ти многа успеха у раду!*

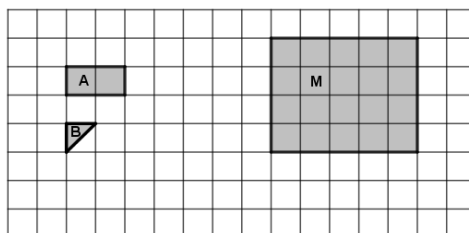
1. Заокружи цртеже геометријских тела који представљају моделе коцке.



2. Колика је површина правоугаоника  $M$  ако је јединица мере:

а) Правоугаоник  $A$ ? \_\_\_\_\_

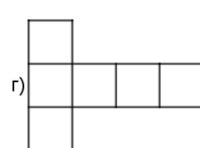
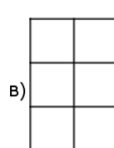
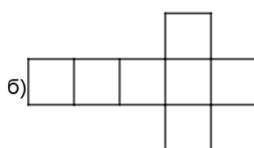
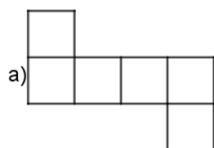
б) Троугао  $B$ ? \_\_\_\_\_



3. Сваки од датих појмова повежи линијом са мерном јединицом којом би измерио његову површину.

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| Уџбеник            | $\text{mm}^2$ |
| Квадратић у свесци | $\text{km}^2$ |
| Под собе           | $\text{m}^2$  |
| Њива               | $\text{dm}^2$ |
| Србија             | $\text{cm}^2$ |
|                    | ha            |

4. Које од датих мрежа јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.

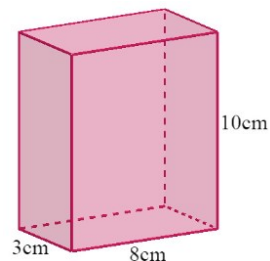


5. Којим изразом можеш израчунати површину квадра чије су ивице дужине 8 cm, 3 cm и 10 cm? Заокружи слово испред тачног одговора.

а)  $8 \cdot 3 \cdot 10 \text{ cm}^2$

б)  $8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \text{ cm}^2$

в)  $2 \cdot (8 \cdot 3 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10) \text{ cm}^2$

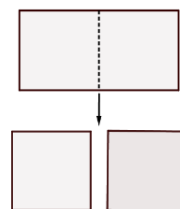


6. Ако се правоугаоник подели на два једнака дела, добију се два квадрата. Обим једног квадрата је 4 dm 8 cm. Одреди површину тог правоугаоника.

---



---



7. Драгутин је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица 3 dm. Одреди површину тела насталог слагањем коцки.

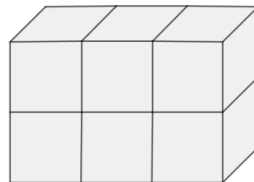
---



---



---



8. Зидове и таваницу оставе облика коцке треба окречити. Дужина оставе је 3 m. За кречење  $1 \text{ m}^2$  утроши се литар боје. Колико је боје потребно да се окречи остава ако су врата на која се у оставу улази висока 2 m и широка 5 dm?

---



---

Одговор: \_\_\_\_\_



## БЕЛЕШКА О АУТОРУ



Милан Миликић рођен је 8. 8. 1988. године у Крагујевцу. Мастер студије завршио је на Природно-математичком факултету у Крагујевцу стекавши звање Мастер математичар. Докторске студије завршио је на Педагошком факултету у Ужицу 2023. године и стекао звање Доктор методике наставе. Запослен је у звању доцента на Факултету педагошких наука у Јагодини, где ради од 2015. године и држи наставу на предметима из области методике наставе математике. Један је од коаутора практикума *Методика наставе математике, Методички практикум математике* (Факултет педагошких наука, Јагодина, 2018). Објавио је преко двадесет научних радова из области методике наставе математике и учествовао на бројним научним скуповима у земљи и иностранству. Учествовао је у реализацији више развојних и научних пројеката и руководио је пројекта „Предиктори постигнућа ученика 7. и 8. разреда на математичким такмичењима” Центра за научноистраживачки рад САНУ и Универзитета у Крагујевцу и Универзитета у Крагујевцу. Реализовао је неколико акредитованих семинара стручног усавршавања за учитеље и наставнике математике и дугогодишњи је сарадник Завода за унапређивање образовања и васпитања Републике Србије.

CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

37.091.3::51(0.034.2)  
004.42ГЕОГЕБРА(0.034.2)

**МИЛИКИЋ, Милан, 1988-**

Геогедра и почетна настава геометрије [Електронски извор] / [аутор и илустратор] Милан П. Миликић. - Јагодина : Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, 2025 (Јагодина : Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM) ; 12 см. - (Едиција Монографије / [Факултет педагошких наука Универзитет у Крагујевцу])

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловног екрана. - "Монографија 'Геогедра и почетна настава геометрије' настала је на основу докторске дисертације 'Ефекти примене софтверског пакета GeoGebra на садржајима геометрије у почетној настави математике' одбрањене у јуну 2023. године на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу ..." --> Предговор. - Ауторова слика. - Тираж 50. - Белешка о аутору. - Садржи библиографију.

ISBN 978-86-7604-244-9

а) Геометрија -- Почетна настава б) Апликативни програм "Геогедра"

COBISS.SR-ID 168330249

Монографија представља значајан допринос педагошкој и методичкој пракси, а нарочито теорији и пракси математичког образовања које се остварује у млађим разредима основне школе. Аутор, ослањајући се на садржаје обухваћене програмима наставе и учења математике у првом циклусу обавезног образовања, анализира предности примене софтвера Геогедра приликом усвајања геометријских знања. Имајући у виду да тема којом се аутор бави није у довољној мери расветљена у нашем образовном систему, монографија је актуелна и значајна за иновирање почетне наставе математике. Може бити од користи истраживачима, али и имати практичан значај за родитеље, учитеље и креаторе образовних политика у смислу бољег разумевања утицаја геометријског резоновања на развој мишљења ученика млађих разреда основне школе.

*Проф. др Ненад Вуловић*

Монографија представља квалитетан рукопис о теми која није у потпуности осветљена у нашем образовном систему. У њој су представљени резултати истраживања примене Геогедра софтвера у почетној настави математике. Научни и практични значај резултата истраживања је вишеструк. Огледа се првенствено у темељно истраженим кључним теоријским основама на којима почива функционисање Геогедра софтвера и његова примена, као и могућностима да се на основу представљених резултата унапреди теоријска и емпиријска заснованост наведене проблематике.

*Проф. др Бранислав Пойовић*

У теоријском оквиру аутор даје детаљан приказ алата образовног софтвера Геогедра, који може бити од користи учитељима, наставницима, ученицима и студентима различитих студијских програма, а такође даје и конкретне примере модела креираних у Геогедра окружењу који се могу користити у почетној настави геометрије. Примена овог динамичког софтвера јесте већ неко време актуелна у високом и средњошколском образовању, међутим, то није случај у првом циклусу основног образовања. Управо чињеница да се утицај употребе овог образовног софтвера у почетној настави математике није озбиљније истраживао на простору Републике Србије ову монографију чини изузетно актуелном и значајном. Научни значај монографије огледа се у детаљној анализи ефеката примене образовног софтвера у настави и учењу математике, као и теоријске заснованости учења геометријских садржаја. Практични значај монографије огледа се у већ поменутом опису алата образовног софтвера Геогедра, али и у бројним примерима и моделима које учитељи могу користити у свом раду.

*Доц. др Александар Миленковић*

ISBN 978-86-7604-244-9

