

Александра Михајловић

ДАРОВИТОСТ, КРЕАТИВНОСТ И МАТЕМАТИКА



Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

Александра Михајловић

ДАРОВИТОСТ, КРЕАТИВНОСТ И МАТЕМАТИКА

Јагодина
2023

Издавач

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу
Милана Мијалковића 14, Јагодина

За издавача

Проф. др Виолета Јовановић

Уредник

Проф. др Ненад Вуловић

Рецензенти

Проф. др Мирко Дејић

Проф. др Сања Маричић

Дизајн корица

Проф. Слободан Штетић

Илустрација на корици

Матија Николић

Илустрације

Александра Михајловић

Freepik.com

Технички уредник

Владан Димитријевић

Лектура и коректура

Мср Марија Ђорђевић

Штампа

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

Тираж

50

ISBN 978-86-7604-228-9

Наставно-научно веће Факултета педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина одобрило је објављивање овог уџбеника одлуком број 01-4778/1 од 11. 10. 2023. године

© Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

*Мојим родитељима, браћу и сестрама
који су инспирација за сваку нашу креативност*

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР	5
1. ДАРОВИТОСТ	7
1.1. Појам даровитости	7
1.2. Различити приступи, схватања и дефиниције даровитости	8
1.3. Идентификација даровитих	27
2. МАТЕМАТИЧКА ДАРОВИТОСТ	34
2.1. Појам математичке даровитости	34
2.2. Математичке способности	40
2.3. Карактеристике математички даровитих ученика	46
2.4. Идентификација математички даровитих ученика	52
2.5. Рад са математички даровитим ученицима	59
Обогаћивање	64
Развијање математичке даровитости у редовној настави	68
3. МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ	85
3.1. Математички задаци, математички проблеми и њихово решавање	85
3.2. Математички проблеми затвореног и отвореног типа	93
4. КРЕАТИВНОСТ	105
4.1. Различита схватања и дефиниције креативности	106
4.2. Историјски осврт на различите приступе у проучавању феномена креативности	107
5. МАТЕМАТИЧКА КРЕАТИВНОСТ	117
5.1. Различити приступи, схватања и дефиниције математичке креативности	117
5.2. Индикатори математичке креативности	126
5.3. Математичка креативност и настава математике	140
5.4. Развијање и подстицање математичке креативности	141
5.5. Пројектна настава математике и креативност	147
6. САДРЖАЈИ ЗА РАД СА МАТЕМАТИЧКИ ДАРОВИТИМ УЧЕНИЦИМА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	161
6. 1. Креирање проблема отвореног типа	162
6. 2. Примери проблема отвореног типа у почетној настави математике	169
ПРИЛОГ	193
Тест математичких способности	193
ЛИТЕРАТУРА	196
ИНДЕКС ПОЈМОВА	212
ИНДЕКС АУТОРА	215
БЕЛЕШКА О АУТОРУ	217

ПРЕДГОВОР

Уџбеник *Даровитост, креативност и математика* намењен је студентима основних академских студија смера Учитељ. Конципиран је тако да одговара плану извођења наставе предмета Даровитост и креативност у настави математике, који се изучава на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина, али га могу користити и студенти других учитељских, као и природно-математичких факултета. Садржаји представљени у уџбенику могу бити од користи и учитељима и наставницима математике са вишегодишњим искуством који се континуирано самостално усавршавају пратећи савремену литературу.

Уџбеник има за циљ да будуће учитеље припреми и оспособи за идентификацију и рад са математички даровитим ученицима, као и за подстицање и развијање математичке креативности ученика.

Прво поглавље уџбеника посвећено је појму и различитим схватањима опште даровитости. Приказане су неке од најутицајнијих теорија и приступа овом феномену. У другом поглављу бавимо се појмом математичке даровитости и математичким способностима. Студенти се упознају са карактеристикама математички даровитих ученика, са начинима њихове идентификације и са организационим облицима рада са њима. Треће поглавље посвећено је математичким проблемима, њиховим врстама, процесу решавања, улози у редовној настави математике и у раду са даровитим ученицима. Четврто поглавље бави се појмом опште креативности. У овом поглављу дат је историјски осврт на различита схватања и приступе проучавању креативности. Пето поглавље посвећено је математичкој креативности. Приказан је развој схватања о креативности математичара, од оних која се односе на изузетне ствараоце у области математике до оних која се односе на креативност ученика док ради математику. Посебна пажња усмерена је на могућност развијања и подстицања математичке креативности ученика кроз израду одговарајућих математичких задатака и рад на пројектима. Шесто, последње поглавље уџбеника представља вредан методички ресурс са великим бројем примера разноврсних активности и садржаја који се могу користити у раду са математички даровитим ученицима.

Питања и задаци за самосталан рад студената након сваког поглавља намењени су утврђивању знања и служе као припрема за полагање колоквијума и испита. На крају уџбеника дат је списак коришћене литературе, као и индекс појмова и аутора.

Мада је превасходно намењен студентима, будућим учитељима, овај уџбеник може послужити као ресурс свима који се баве наставом математике, радом са математички даровитим ученицима, као и развијањем и подстицањем математичке креативности.

Посебну захвалност изражавам рецензентима, проф. др Мирку Дејићу и проф. др Сањи Маричић, за низ веома корисних и добронамерних савета и сугестија. Такође, захваљујем и колегиници Марији Ђорђевић, лектору, за велико стрпљење и драгоцене савете у последњој етапи припреме ове књиге.

Аутор

1. ДАРОВИТОСТ

*Не скривај своје таленте. Дайи су ти да их користиш.
Чему служи сунчани сав у хладу?*

Бенџамин Френклин

Кроз историју и векове, почевши од античких цивилизација и култура па до данашњег савременог друштва, појединци са изузетним постигнућима одувек су били предмет интересовања и интригирали су научнике, практичаре и обичне људе. Многи од њих имали су суштински значај за развој људске цивилизације захваљујући свом интелектуалном потенцијалу. Леонардо да Винчи, Амадеус Моцарт, Алберт Ајнштајн, Карл Фридрих Гаус само су неки од даровитих и талентованих појединаца чије је стваралаштво представљало важну прекретницу на пољу науке и уметности и чија дела су и данас од непроцењивог значаја. Даровити појединци представљају вредан социјални капитал људског друштва, те су њихова идентификација и образовање од суштинског значаја за све земље широм света.

1.1. ПОЈАМ ДАРОВИТОСТИ

Појам даровитости представља један од најкомплекснијих психолошких и педагошких појмова. На питање *Шта је даровитост?* не постоји јединствен и једнозначан одговор. Многобројни су и различити одговори који умногоме зависе и од одређених друштвено-историјских околности. У различитим историјским периодима и у разним културама, даровитост је различито одређивана, јер су и различите способности биле важне, како за опстанак, тако и за напредак неке заједнице људи. Данас о даровитости знамо много више на основу истраживања и систематски прикупљених података. Ипак, и даље постоји више различитих теорија и приступа овој појави, а самим тим и много нејасноћа и неразрешених проблема, као и нових питања која чекају одговоре.

Дефиниција даровитости се мењала у складу са бољим упознавањем појаве даровитости, њених елемената, карактеристика, услова настанка и њене природе. Најраније дефиниције су везивале даровитост за општу

интелектуалну способност. Ове дефиниције су дуго времена биле широко прихваћене и, мада су данас критиковане, и даље представљају незамењив приступ теоријским гледиштима даровитости (Kadum-Bošnjak, 2013). Нека каснија схватања даровитости проширују даровитост и на друга подручја људске делатности, као што су специфичне школске способности, стваралачке способности, способности руковођења, уметничке способности, психомоторне способности. Мада су високо развијене способности од великог значаја у дефинисању појма даровитости, даровитост чине и многи други елементи, попут мотивацијских процеса, споја наслеђеног и социокултурног, процеса социјализације, активности и самоактивности итд. Савремене дефиниције указују на неопходност интеракције већег броја когнитивних и конативних чинилаца, односно даровитост дефинишу као интеракцију високо развијених способности, креативности, особина личности и одговарајућег окружења. Кроз промене дефиниције може се уочити усвајање неких општих сазнања о природи даровитости, као што су следећа (Andrilović, Čudina-Obradović, 1996):

- даровитост не представља резултат једне карактеристике, већ је то комбинација особина, способности и саме личности;
- даровитост се може јавити у различитим областима способности, или као изразито једна способност, или као комбинација способности које долазе до изражаја у некој области људског знања и активности;
- даровитост се може манифестовати у облику продуктивно-креативне активности и резултата (продуката), или као потенцијална, латентна, која ће се уз подршку околине, подстицањем и неговањем развити у продуктивну даровитост, тј. стваралаштво;
- даровитост се развија међусобним деловањем појединца и окружења, од рођења до фазе пуне продуктивности.

Иако постоји велики број различитих дефиниција даровитости (преко 140) и свака од њих има своју потпору, једне свеобухватне општеприхваћене дефиниције нема (Huzjak, 2006).

У наредном поглављу приказаћемо неке од најпознатијих и најшире прихваћених приступа, схватања и дефиниција даровитости, почевши од оних најранијих па до савремених.

1.2. РАЗЛИЧИТИ ПРИСТУПИ, СХВАТАЊА И ДЕФИНИЦИЈЕ ДАРОВИТОСТИ

Ретки појединци који су се издвајали по томе што су могли обављати одређене активности изузетно брже, боље и успешније од других људи или на неконвенционалан начин одувек су привлачили пажњу. О њима

су расправе водили и антички филозофи. У античким цивилизацијама даровити и талентовани појединци доводили су се у везу са вишим, божанским бићем, божанском инспирацијом (Robinson, Clinkenbeard, 2008). Систематско бављење даровитима започело је тек онда када су створени научни предуслови за мерење и утврђивање индивидуалних разлика у људским способностима (Kogen, 2013). Мада феномен даровитости није новијег датума, са његовим научним и организованим проучавањем почело се тек пре нешто више од једног века. У међувремену су настале бројне теорије, од којих су неке данас старе и превазиђене, док су друге, новијег датума, научно егзактније, савременије, свеобухватније.

Психологија даровитости је као научна дисциплина поникла на схватању да даровитост представља урођен квалитет и да се на њега не може утицати (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Ово становиште везује се за енглеског биолога Френсиса Голтона. Научни извори указују да се он први почео бавити феноменом даровитости и конструисао је прве мерне инструменте за мерење интелигенције. Голтон је сматрао да је генијалност појединца одређена искључиво наследним фактором. У књизи *Наследна генијалност*, објављеној 1869. године, истиче да се недостатак дара не може превазићи вежбањем а, са друге стране, само постојање дара чини сувишним обуку и образовање.

Луис Терман, амерички психолог чији је рад обележио психологију даровитости током прве половине двадесетог века, полази од знатно другачијег становишта. За Термана се може рећи да је ударио почетни печат научном приступу проучавању даровитости. Мада се слагао са Голтоном у томе да је даровитост урођена и општа способност, сматрао је да се образовању даровитих мора посветити посебна пажња.

Даровитост као висока општа интелектуална способност

Терман је 1921. године, заједно са својим сарадницима, спровео лонгитудинално истраживање на Универзитету Стенфорд које је имало за циљ да се утврди које су менталне и физичке особине, односно црте личности, својствене интелектуално супериорној деци. Сматрао је да је боље познавање менталних и физичких особина и карактерних црта даровите деце важно како би се њиховом образовању приступило са већим изгледима за успех. Као основни критеријум за идентификацију даровитих користио је резултате остварене на тестовима интелигенције. Терман је између интелигенције и даровитости стављао знак једнакости. Сматрао је да је висина интелигенције директно сразмерна постигнућима деце на тестовима опште интелектуалне способности. Разлике у способности

могуће је мерити (бројем решених задатака у тесту) и изразити као коефицијент интелигенције (IQ – количник менталног и календарског узраста).

Терман је са својим сарадницима пратио напредовање 1528 интелектуално надарене деце (старости од 7 до 15 година), која су по резултатима на тесту интелигенције представљала 1% најбољих (Дејић, Михајловић, 2014). Анализирали су велики број података о образовном и професионалном постигнућу, продуктивности и општој животној прилагођености ове даровите деце до њихове зреле доби, односно током целог њиховог живота.

Терман даровитост поистовећује са високом општом интелектуалном способношћу, а интелигенцију са постигнућем на тесту. Од њега потиче најстарије и најшире прихваћено схватање даровитости које произлази из психометријске дефиниције даровитости (Мијановић, 2018). Заснива се на тези да се општа интелигенција, односно људска способност сналажења у различитим типовима проблема распоређује према нормалној расподели, тако да највећи проценат заузимају просечно интелигентни појединци, док је број исподпросечних и изнадпросечних приближно исти. Тестовима интелигенције мере се оне способности које појединцу омогућавају сналажење у новим ситуацијама, служење апстрактним појмовима и односима, апстрактним симболима, а што му омогућава да знања стиче убрзано и с разумевањем.

Као главни недостаци ове дефиниције даровитости наводе се слаба предикција, неидентификовање дела даровитих, ограниченост појма даровитости само на сазнајно подручје и недостаци коефицијента интелигенције у мерењу способности. Употребом психометријског критеријума могуће је утврдити тзв. „школску даровитост”, односно способност учења лекција и решавања тестова. Ова даровитост наглашава пре свега рецептивне и репродуктивне способности. Показало се да ниједно од деце Терманове групе са тако дефинисаним способностима није постигло креативни резултат који је био светски значајан и познат. Још један проблем је то што овим критеријумом нису обухваћени многи појединци који имају потенцијала да постану креативни ствараоци, али због специфичних услова развоја то не могу показати. У ту групу спадају, на пример, васпитно запуштена деца, деца из сиромашних и необразованих породица, деца с одређеним тешкоћама у развоју, односно сва она деца која не постижу добре резултате у школском учењу и групно примењиваним тестовима интелигенције. Новија схватања даровитости не ограничавају се само на сазнајне способности, већ се даровитим сматра свако дете које постиже високе резултате у сваком потенцијално вредном подручју људске активности. Такви резултати се веома често не могу мерити или исказати

постигнућем на неком тесту, већ је потребно вршити процену продуката, понашања итд. Додатну тешкоћу представља и то што је коефицијент интелигенције резултат неједнаког удела различитих способности. Може се десити да два ученика имају исту вредност коефицијента интелигенције, али да је код једног већи удео вербалне, а код другог већи удео нумеричке способности. Ово имплицира да се вредност коефицијента интелигенције не може користити као полазна основа за специфично програмирање развоја даровитости ученика. На мерење интелигенције могу да утичу и различити случајни фактори, па понекада није довољно само једно мерење. Резултати ових тестова представљају само један од података о карактеристикама даровитог детета и сами по себи нису довољни. До осталих информација можемо доћи на основу посматрања свакодневних активности детета, начина на који приступа задацима, продуката итд.

Након Термана многи други аутори су истраживали случајеве истакнутих појединаца и у складу са новим налазима ширили су схватање појма даровитости.

Таненбаумов петофакторски модел даровитости

За разлику од Термана, Таненбаум (Tannenbaum, 1986) сматра да се даровитост манифестује и потврђује продуктивно-креативним постигнућем. „Даровитост чине *вештине* *произвођења* значајних нових идеја или материјалних открића и вештине бриљантног рада, *извођења*, за публику која то цени или за добробит клијената који од тог рада имају користи” (Максић, 1993: 17). Значајне резултате не дају они даровити појединци који нису продуктивни, али ни они чија продукција у себи не садржи нешто ново и оригинално. Ова опажања доводе до схватања да даровитост укључује не само продуктивност, него истовремено и креативност.

Таненбаум (1986) ово назива „моделом морске звезде” или петофакторским моделом даровитости. Овај модел је проширио идеју о томе како може да изгледа потенцијално даровито дете и укључио је и атрибуте као што су мотивација, истрајност, самопоуздање итд. Сматрао је да деца која имају потенцијал да успеју као даровити одрасли осим опште и специфичних способности морају имати и одређене особине личности, али и одређене специфичне сусрете са околином који олакшавају појављивање талента. Истичући да развијени таленат постоји само код одраслих, Таненбаум објашњава да је његова дефиниција даровитости код деце потенцијал да постану признати извођачи или произвођачи идеја у сферама активности које унапређују морални, физички, емоционални, социјални, интелектуални или естетски живот заједнице (Tannebaum, 1983: 86).



Слика 1. Петофакторски модел даровитости (према Tannenbaum, 1986: 396)

Пет унутрашњих и спољашњих варијабли које се преплићу илустровано је моделом морске звезде, при чему даровитост производи преклапање ових пет фактора (Слика 1).

Општа способност. Односи се на општу интелигенцију, тзв. генерални фактор који се најчешће изражава високим коефицијентом интелигенције.

Посебне или специфичне способности. Односе се на посебне капацитете и афинитете за различите активности које обично називамо талентима.

Особине личности или неинтелектуални фактори. Односе се на особине личности као што су мотивација, упорност, истрајност, јачина ега, самопоштовање, преданост задатку, итд.

Подршка околине. Односи се на стимулативне утицаје окружења – породице, школе, али и ширег друштвеног окружења (нпр. културних институција).

Фактор случајности. Односи се на шансе које су проузроковане непредвидивим догађајима (битно је бити на правом месту у право време).

Таненбаум је истицао да тек одрасле особе могу да буду заиста даровите, док су деца само потенцијално даровита. Према томе, даровита су она деца која показују потенцијалну способност за остваривање продуктивно-креативног резултата у некој области активности. Њихове образовне

потребе премашују оквири стандардног школског програма. Потребни су сложенији, свеобухватнији и квалитативно другачији услови, садржаји и поступци како би ова деца развила неопходан склоп особина потребан за стварање продуктивно-креативних резултата. Креативност се схвата као синоним за даровитост, а састоји се од још непознате комбинације општих и посебних способности и црта личности и високог потенцијала који би могао да се оствари у стимулативној околини.

Гањеов диференцијални модел даровитости

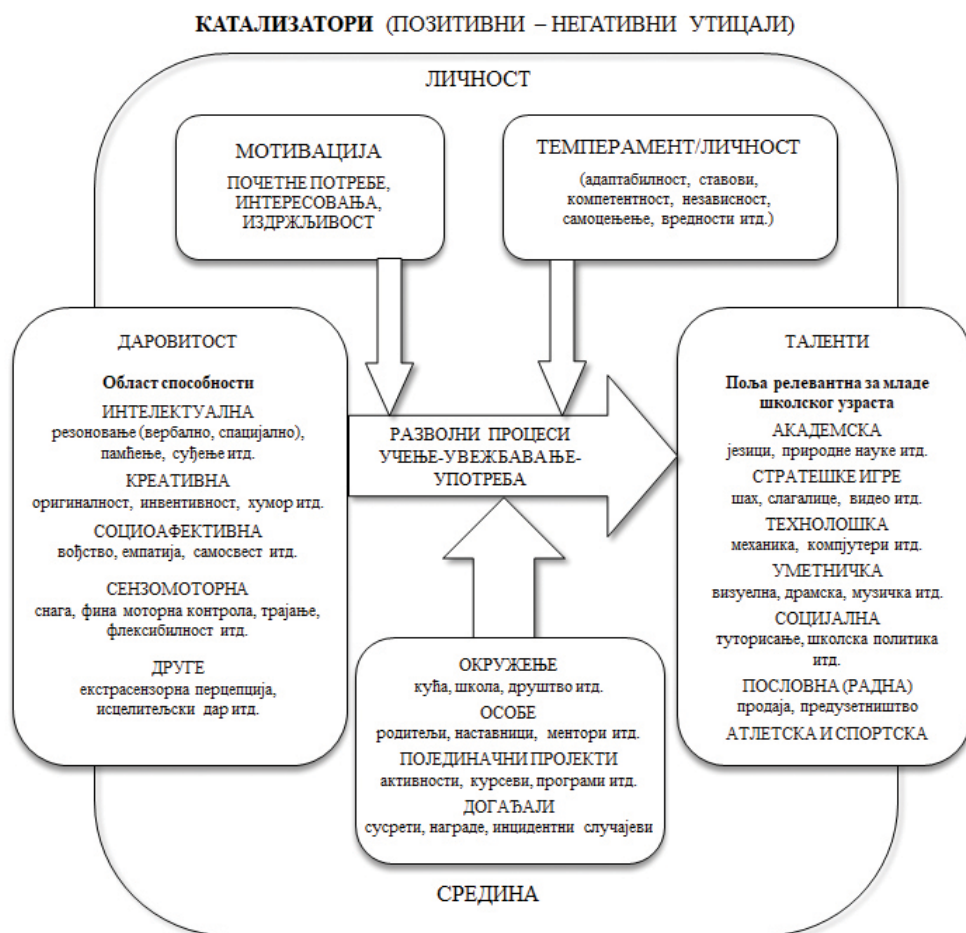
Значајан допринос развоју теорије даровитости дао је канадски психолог Франсоа Гање. Гање је посебно цењен због тзв. *диференцијалној модела даровитости и талента*, односно због прављења дистинкције између њих (Koren, 2013). Наиме, даровитост је за њега поседовање и коришћење неувежбаних и спонтано изражених урођених и природно датих потенцијала у једној или више области, уз неопходан услов да се појединац по тој својој способности сврстава у 15% најуспешнијих вршњака (Максић, 1996). Са друге стране, под талентованим ученицима подразумева супериорне појединце који сигурно владају систематски развијеним способностима (или вештинама) или већ стеченим знањем у најмање једном пољу људске активности, уколико спадају међу 15% најбољих вршњака у том пољу. Развој талента, по њему, представља отелотворење изнадпросечних природних потенцијала у изванредне вештине које издвајају појединца изнад просека у некој области. Односно, процес трансформације одређених изнадпросечних способности у вештине је таленат. По Гањеу, дакле, даровитост и таленат нису синоними (Gagné, 1995, 2005). Даровитост као урођена способност представља „сировину” која се постепено обликује у високо систематски развијене компетенције, односно знања и вештине које називамо талентима (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016).

Гањеов диференцирани модел даровитости спецификује пет домена даровитости, односно потенцијала:

- **интелектуалне способности**; обухватају резонување, памћење и суђење;
- **креативне способности**; односе се на оригиналност, инвентивност, хумор и др;
- **социоафективне способности**; испољавају се кроз емпатију, самосвест, вођство;
- **сензомоторне способности**; испољавају се преко фине моторне контроле, снаге, трајања и контроле моторних радњи;

– **остале способности**; нпр. екстрасензорна перцепција, исцелитељски дар, итд.

Гађе (Мијановић, 2018) даровитост схвата као високо изнадпросечну компетентност појединца у једном или више домена способности (интелектуалној, креативној, социоемотивној, сензомоторној), док се таленат манифестује као изразита изнадпросечна вештина у једном или више подручја људске активности (лингвистичка, математичка, уметничка, музичка, спортска и сл.). Да би од потенцијалне даровитости у способностима дошло до манифестованог талента, пролази се кроз процес развоја талента који се састоји од систематског учења и вежбања, а неопходни су посредни фактори које Гађе назива катализаторима – околина и личност појединца (Слика 2).



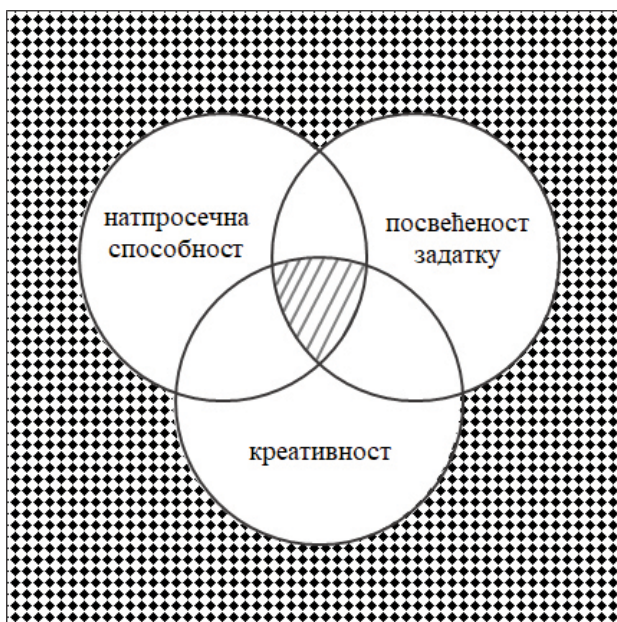
Слика 2. Гађеов диференцијални модел даровитости и талента (према Maksić, 1996: 58)

Дарови, односно потенцијали су природне способности које, по Гањеу, имају генетску основу. Ове способности могу се уочити у сваком задатку са којим се деца сусрећу током свог школовања. Интелектуалне способности су неопходне да би се научило читање и писање, да би се разумели математички, али и појмови природних наука. Креативне способности, са друге стране, омогућавају да дете реши различите проблеме са којима се среће и да направи оригиналан рад у некој области (књижевности, науци и уметности). Социјалне способности деца свакодневно користе у комуникацији са својим друговима, наставницима, родитељима. Физичке способности користе у спорту, музици, техничком образовању. Гање сматра да се потенцијали лакше могу запазити код деце млађег узраста јер су разни утицаји из околине, као и систематско учење још увек деловали само у ограниченој мери. Касније, на старијем узрасту, потенцијали се испољавају кроз брзину и лакоћу којом деца стичу нове вештине у неком пољу људске активности. Дарови, односно природни потенцијали се прогресивно трансформишу у таленте, добро трениране и системски развијене вештине које карактеришу одређено поље људске активности или постигнућа.

Таленти обавезно укључују присуство изнадпросечних природних способности, што значи да појединац не може бити талентован уколико претходно није даровит. Ипак, бити даровит не повлачи за собом да ће појединац постати талентован. Дешава се да многа интелектуално даровита деца у школи не постижу висок академски успех јер су њихове природне способности остале на нивоу потенцијала. Веома је битно да школа препозна почетне потенцијале ученика и пружи им адекватну подршку како би се они развили. Потенцијале и таленте повезују развојни процеси који чине систематско учење, увежбавање одређених активности и коришћење у пракси. Ово учење одликује свесна намера да се пажљиво планираним редоследом корака постигне одговарајући циљ, односно унапређење компетенција. Ове активности се најчешће одвијају унутар одговарајућих институција као што су школе, центри за обуку, факултети. На развојне процесе делују тзв. катализатори – личност појединца и околина. Као најзначајнију карактеристику личности Гање препознаје мотивацију, а затим и темперамент и особине. Подједнако значајан катализатор представља и околина чији се утицај може посматрати на макро (улога средине као географске, демографске и социолошке категорије) и микро плану (улога породице и њених карактеристика, вршњака, наставника). Гање као централни пут у процесу изградње талента види образовање/ учење, а образовне програме и обуке, као и наставнике, као катализаторе.

Рензулијев тропрстенасти модел даровитости

Један од најчешће коришћених модела приказа даровитости, тзв. тропрстенасти модел развоја даровитости, израдио је амерички психолог Џозеф Рензули. Рензули је представио даровитост као шему у облику три прстена који се међусобно делимично преклапају.



Слика 3. Шта чини даровитост? (Renzulli, 1986 према Алтарас, 2006)

Рензули је под даровитошћу подразумевао даровито понашање индивиде (Renzulli, 1986). По њему, даровито понашање се састоји од понашања које одражава интеракцију три кластера, односно три групе карактеристика: изнадпросечне интелектуалне способности, висок ниво посвећености задатку и висок ниво креативности. Овај модел имплицира да се високи потенцијали у наведеним карактеристикама, уколико се појаве у интеракцији код појединца, реализују у изразиту даровитост која се испољава у десетак општих и више десетина специфичних подручја делатности (Koren, 2013).

Рензули сматра да постоје две врсте даровитости (Maksić, 1993). Прва је тзв. школска даровитост (даровитост за школско учење, тестовна даровитост), која се огледа у испуњавању школских задатака, лаког овладавању наставним садржајима, учењу лекција и решавању тестова.

Ова даровитост се заправо односи на оне способности које обично захтевају традиционална настава и тестови интелигенције (Altaras, 2006). Јавља се на различитим нивоима и могуће је идентификовати стандардним техникама процењивања. Мери се тестовима интелигенције и тестовима знања. Базира се на репродуктивности, а не продуктивности. Треба имати на уму да изузетне резултате не дају они даровити појединци који су непродуктивни или репродуктивни. Друга је креативно-продуктивна даровитост и односи се на ангажовање способности даровитог појединца да се бави проблемима и областима проучавања који имају чисто лични значај за њега, али може да прерасте и у рад ради самог истраживања. Ова врста даровитости одговорна је за настанак оригиналних идеја, материјала и производа који су сврсисходни и имају утицај на живот већег броја људи. Рензули истиче да је креативно-продуктивну даровитост тешко мерити и да само историја може дати коначан суд о њој. Настава која је усмерена на ову врсту даровитости наглашава проблемско учење (коришћење информација, знања и вештина са циљем решавања неког, често реалног проблема). Ученик није само пасивни „прималац“ информација, већ и корисник и оператер. По Рензулију, постоји разлика између даровитости деце и одраслих. Даровита и талентована деца су она која поседују или су способна да развију композитни склоп наведених карактеристика и примене га у било којој потенцијално вредној области људског рада (Maksić, 1998). Могу бити даровита тако што ће са успехом извршавати задатке који им се постављају у школи и код куће и испољавати високу способност учења.

Креативно-продуктивна даровитост захтева обавезно присуство све три групе наведених особина и постижу је одрасле особе. Појављује се ретко, у неким периодима живота неких појединаца и под одређеним условима. Рензули верује да је за висок ниво креативно-продуктивне даровитости у одређеном пољу потребна изнадпросечна, али не обавезно изузетно висока интелектуална способност. Најпродуктивнији људи не морају бити генијални. Сматра да су изнадпросечне интелектуалне способности од већег значаја за даровитост за учење, односно школску даровитост, док је за креативно-продуктивну даровитост неопходна интеракција три групе карактеристика.

Изнадпросечне интелектуалне способности Рензули дефинише двојако, као општу способност и као посебне (специфичне) способности. Општа способност подразумева способност апстрактног мишљења, процесуирања информација, интегрисања информација и искустава која резултирају одговарајућим и адаптивним одговорима на нове ситуације. Мери се тестовима опште интелигенције и примењује се у широком спектру интелектуалних задатака (Altaras, 2006). То су, на пример,

вербално и нумеричко резонување, схватање просторних односа, меморија, вербална флуентност, итд. Посебне способности односе се на капацитет стицања и примене знања, вештине или способности за обављање активности у једној или више области знања или људског деловања. Ове способности су дефинисане тако да указују на начин испољавања у реалном животном контексту и везане су за одређени домен (нпр. сликање, балет, хемија, математика, музика, итд.). Поједине специфичне способности, на пример у областима математике и хемије, имају и јаку везу са општим способностима, па се неки индикатори потенцијала у овим областима могу утврдити тестовима општих способности и интелигенције, али и тестовима постигнућа и посебних способности. Ипак, када су у питању неке друге области, тестови интелигенције се могу користити само као почетне мере, много је битније процењивање индикатора креативног мишљења, ранијих радова и постигнућа и креативније продукције.

Посвећеност или преданост задатку се описује као рафиниран или фокусиран облик мотивације, представља енергију коју неко улаже и која је усмерена на одређени задатак или специфично подручје деловања. Подразумева издржљивост, истрајност, тежак и напоран рад, марљиво вежбање, самопоуздање, веру у сопствену способност да се изврши важан посао. Високе способности и креативност без мотивације не могу да доведу до продуктивности, као ни до изузетних постигнућа. Ово се неретко среће у школама, дешава се да ученици имају много потенцијала али им недостаје посвећеност задатку. Као резултат имамо ниско постигнуће. Ипак, добра страна је то што се на мотивацију може утицати.

Под креативношћу Рензули подразумева особине као што су флуентност, флексибилност, оригиналност мишљења које се испољавају као отвореност за различита искуства, пријемчивост за ново и другачије, интелектуална радозналост и разиграност, спекулативност, ментална живахност, жеља за преузимањем ризика (у мислима и стварним активностима), естетска осетљивост, жеља да се реагује и дела у складу са спољашњим подстицајима на сопствене идеје и осећања (Altaras, 2006; Maksić, 1998).

Рензули сматра да не морају све три групе карактеристика да буду присутне у истој мери у свакој особи и ситуацији да би дошло до даровитог понашања. За разлику од способности које представљају релативно стабилне црте, креативност и посвећеност задатку се појављују у зависности од ситуације (Altaras, 2006). Такође, различите области захтевају различите степене интелигенције за висок ниво креативно-продуктивног остварења. Ипак, само интеракција између ове три групе карактеристика може резултовати даровитим понашањем. У новијим верзијама

своје теорије, Рензули (Renzulli, 2005) проширује своју концепцију тзв. позадинским компонентама даровитог понашања (оптимизам, храброст, „заљубљеност” у проблем или дисциплину, осетљивост за људске потребе, физичка и ментална енергија и визија).

Гарднерова теорија вишеструких интелигенција или талената

Мада је проучавање даровитости у једном тренутку кренуло својим путем, одувек је постојала тесна веза са проучавањем интелигенције (Altaras, 2006). Теорије интелигенције и даље имају утицаја на наше схватање, идентификацију, процену и третирање даровитости.

Настојећи да да одговор на питање каква је природа ума који има ту способност да створи мноштво умећа и производа који су препознати и цењени широм света, Гарднер је формулисао своју теорију вишеструких (мултипли) интелигенција (Gardner, 2000). Према теорији вишеструке интелигенције, људи нису даровити за само једну област, већ имају предиспозиције за више области истовремено (Милановић, 2017). Већина старијих модела за тестирање интелигенције усмерена је на само две врсте интелигенције – логичко-математичку и вербално-лингвистичку. Гарднер сматра да је људски ум током еволуције наштимован на најмање седам различитих садржаја и у складу са тим поседује одговарајући број посебних скупова способности, односно интелигенција које се могу посматрати и мерити (Altaras, 2006). У првој верзији своје теорије Гарднер разликује седам врста људских способности, односно седам врста релативно аутономних интелектуалних способности (Гарднер, 1983): вербално-лингвистичку, логичко-математичку, визуелно-спацијалну, музичко-ритмичку, телесно-кинестетичку, интраперсоналну и интерперсоналну интелигенцију. Касније укључује још две врсте интелигенције, природњачку и егзистенцијалну интелигенцију.

Свака од наведених врста способности, односно интелигенција, представља посебан систем који се разликује од осталих. Све оне су биолошки предодређене и заједно чине свеукупну интелигенцију неког појединаца. Гарднер сматра да је интелигенција наследна особина која се може мењати под утицајем искуства. Искуства имају важну улогу у манифестовању различитих врста интелигенције. Управо схватање да је интелигенција нешто што је могуће мењати, побољшавати вежбањем и васпитавањем, за разлику од неких традиционалних схватања која су интелигенцију видела као нешто статично, непроменљиво и фиксирано, имало је утицај на то да је Гарднерова теорија вишеструких интелигенција

широко прихваћена у педагошкој пракси (Stojaković, 2022). Свако дете постиже најбоље резултате ако му се омогући да учи на начин који њему највише одговара, односно у складу са сопственим когнитивним стилем или стилем рада и учења. Модел вишеструке интелигенције заправо говори о томе да постоје многобројни начини учења и сазнавања спољашњег света.

Гарднер даровитост види као комбинацију више различитих способности, а не само као једну општу. Уколико индивидуа има изразито развијену барем једну од наведених интелигенција у односу на ширу популацију, онда се може сматрати даровитом у тој области (Gardner, 1983; Мијановић, 2018). За сваку врсту интелигенције Гарднер наводи обележја по којима се даровити могу препознати (Милановић, 2017).

Вербално-лингвистичка интелигенција манифестује се као способност говорног изражавања и говорне флуентности и односи се на све облике и могућности тог изражавања: поезија, проза, граматика, апстрактно резонување, симболичко мишљење, метафоре, писање, читање итд. Ова врсте интелигенције високо је развијена код књижевника, друштвено-политичких радника итд. Деца код које је изражена ова способност имају обично богатији речник од својих вршњака, препричавају догађаје и дела са више детаља, воле читање, писање, игре речима. Карактерише их причање, приповедање, препричавање, расправљање, читање наглас, слушање саговорника.

Логичко-математичка интелигенција се најчешће повезује са оним што се назива „научно мишљење” и индуктивно резонување. Обухвата способност апстрактног мишљења и решавања проблема, способност да се уоче законитости и да се ради са апстрактним појмовима и симболима (бројеви, геометријске фигуре) и да се уоче скривене везе између датих података и информација. Ова врста интелигенције може се уочити код научника, математичара, програмера, инжењера итд. Деца која имају изражене ове способности брже и лакше манипулишу апстрактним појмовима и решавају математичке проблеме и задатке, карактерише их критичко мишљење, воле да експериментишу, решавају логичке загонетке, рачунају. Ова интелигенција је, заједно са вербално-лингвистичком, највише вреднована у школи и заступљена је у већини стандардизованих тестова интелигенције.

Визуелно-спацијална интелигенција представља способност запжања визуелних информација и могућност њихове визуелизације у одсуству спољних стимулуса. Односи се обично на ликовно изражавање, цртање, моделовање, цртање мапа, архитектуру итд. Нарочито важну улогу има способност стварања менталних слика, визуелног памћења и

менталне ротације. Високо развијену визуелно-спацијалну способност имају особе које се баве визуелном уметношћу, али је битна и за неке неуметничке професије (нпр. архитекте, картографи итд.). Децу која имају високо развијене способности карактерише лакоћа сналажења и решавања проблема у простору, грађење коцкама и другим материјалима, слагање сложенијих слагалица, итд. Ова интелигенција се код њих огледа и кроз цртање, мапирање или скицирање прича, бојење, илустровање, решавање визуелних загонетки.

Музичко-ритмичка интелигенција односи се на способности препознавања и коришћења ритмичких и звуковних образаца, осетљивост на звуковне надражаје у окружењу, људске гласове и музичке инструменте. Манифестује се на различитим степенима интензитета, од стваралаца и инструменталиста до слушалаца. Ову врсту интелигенције имају музичари, композитори, наставници музике. Деца са овом врстом интелигенције имају изражену способност запажања најразличитијих звукова, препознавања ритма и музичке теме, боље певају, квалитетније се ритмички изражавају, свирају инструменте.

Телесно-кинестетичка интелигенција представља способност коришћења тела за изражавање емоција (плес, игра, бављење спортом итд.). Односи се на способност контроле телесних покрета и баратања предметима. Ова врста интелигенције присутна је код спортиста, плесача, глумаца итд. Деца која имају развијену ову врсту интелигенције показују спретност у покретима и при баратању различитим предметима, реагују покретом изражајно на разне музичке и вербалне подстицаје у окружењу.

Интерперсонална интелигенција манифестује се као способност ефикасне интеракције са другима путем разумевања њихових осећања, емоција, намера и мотива. Дакле, односи се на препознавање и разумевање других људи, њихових потреба, расположења, темперамента, намера. Другим речима, то је способност да се „читају” расположење, емоције, осећања, намере и мотивација других. Особе које имају развијену интерперсоналну интелигенцију имају велику могућност емпатије. Ову врсту интелигенције обично поседују социјални радници, учитељи, наставници, терапеути, али и политичари и верски лидери. Деца код које је изражена ова способност са лакоћом започињу комуникацију и игру са другом децом, помажу у решавању сукоба у групи, омиљена су у друштву, често имају улогу вође или организатора. Препознају се по кооперативном учењу, групном раду, друштвеним играма, посредовању у сукобима, групним пројектима.

Интраперсонална интелигенција је способност регулисања сопственог живота путем познавања и разумевања сопствених емоција, осећања, намера и мотива, као и способности. Представља способност посматрања себе из различитих аспеката (свог изгледа, осећања, способности, темперамента). Искузује се у бољем разумевању сопствене личности и потреба. Ова врста интелигенције среће се код филозофа, психолога итд. Деца са изразито развијеном интраперсоналном интелигенцијом показују упорност у оном чиме се баве, воле да постављају личне циљеве. Карактеришу их квалитетни индивидуални и самостални одговори и решења, самостално учење, појединачни пројекти.

Природњачка или натуралистичка интелигенција односи се на способност препознавања и разликовања бројних животињских и биљних врста и других објеката у природи, осетљивост за природу и природне појаве. Ову интелигенцију имају научници који се баве природним наукама, пејзажне архитекте, итд. Деца код које је ова интелигенција развијена показују интересовање за инсекте и биљке, проучавају животну средину, изводе природне експерименте (Gardner, 1983; Calik & Birgili, 2013).

Егзистенцијална интелигенција се, по Гарднеру, односи се на способност бављења фундаменталним питањима људског постојања, као што је на пример смисао живота. Обухвата способност рефлексije и дубоког мишљења о основним питањима везаним за живот и постојање.

Гарднер сматра да свако дете поседује све врсте интелигенције, а након поласка у школу почиње да фаворизује и истиче неку или неке од њих (Gardner, 1999; Page, 2006). Ове интелектуалне способности у зависности од појединца и културе могу бити комбиноване на различите прилагодљиве начине (Ђорђевић, Ђорђевић, 2016). Гарднерова дефиниција садржи и културне разлике пошто реализација наведених способности зависи и од средине у којој се манифестују, односно од тога који ће резултати бити цењени и препознати као вредни, па тиме и даље подстицани и развијани.

Гарднерова теорија представља освежавајуће гледиште јер нам даје сасвим нов поглед на способности, што последично има утицаја и на образовно-васпитну праксу (Stojaković, 2022; Ђорђевић, Ђорђевић, 2016). Теорија вишеструких интелигенција отвара врата ка новом гледању на могућности ученика. Наиме, као што постоји више интелигенција, тако постоји и више модела сазнања и стилова учења, чиме се отвара могућност за већи број програма и начина учења у којима би до изражаја дошле различите способности. Образовно-васпитни рад се усмерава на развој појединца као целовитог, јединственог, непоновљивог бића. Школа се види као средина која мора да осигура флексибилне образовно-васпитне садржаје и програме учења како би сваки ученик могао да ради на програму који је у складу

са његовим профилом општих и специфичних способности (Stojaković, 2022). Ово значи да би требало саставити такве програме који би узели у обзир специфичне способности и потребе ученика и омогућили му да у процесу учења користи своју јачу страну, односно ону врсту интелигенције која је код њега нарочито развијена. Савремени учитељи и наставници би требало да теже да ослободе бројне потенцијалне способности својих ученика (Ђорђевић, Ђорђевић, 2016). Први корак је, наравно, схватање о постојању различитих способности ученика. Сваком ученику треба омогућити да користи своје потенцијале тако што ће радити и учити у оној области вишеструких способности и модела сазнања у којој има највише изгледа за успех. Ученици прилазе градиву у складу са својом доминантном облашћу интелигенције и стилем учења који је за њих најефикаснији (нпр. визуелни, аудитивни, вербални, логички, кинестетички, индивидуални, групни) (Yavich, Rotnitsky, 2020). Комбиновање стилова учења са доминантним интелигенцијама побољшава процес учења. Препорука је да наставници покушају да повежу наставне циљеве са различитим врстама интелигенција. На пример, приликом обраде рачунске операције множења уколико ученик има развијену визуелно-просторну интелигенцију користићемо одговарајуће визуелне приказе, а ако има развијену музичко-ритмичку интелигенцију, можемо га научити песми о множењу.

Покушаћемо да на примеру ученика са развијеном визуелно-просторном интелигенцијом и визуелно-когнитивним стилем илуструјемо шта то значи за наставну праксу. Визуелно-просторна интелигенција се односи на способност менталне манипулације објектима и трансформације просторних односа, као и на способност тачног и прецизног опажања облика и форме без обзира на њихов просторни положај (Stojaković, 2022). Визуелно-когнитивни стил подразумева да ученику највише одговарају оне методе учења које користе визуелне аспекте представљања информација. Полази се од претпоставке да у основи највиших форми апстрактног мишљења као основа постоји слика. Користећи јаке стране ученика у овој области наставник му може помоћи да превазиђе слабости у другим областима способности. На пример, на часовима ће креирати такве наставне ситуације и ситуације учења у којима ученик може да створи визуелне моделе репрезентације света, користиће сликовне и друге очигледне материјале у обради нових садржаја (нпр. моделе геометријских тела, разломака итд.), користиће литературу у којој се описују фантастични догађаји које ученици могу представити визуелном имагинацијом. Гарднер верује да се ученици могу прилагодити да успешно уче чак и у оним ситуацијама када им градиво није прилагођено и то пре свега јер поседују неку врсту јаких интелектуалних страна и стратегија које им омогућавају да то постигну и остваре (Ђорђевић, Ђорђевић, 2016).

Стернбергова тријархијска теорија интелектуалне даровитости

Квалитативни приступи проучавању даровитости анализирају зашто неки појединци постижу боље резултате на тестовима или се боље сналазе у решавању проблемских ситуација. Утврђено је да је оно што их разликује од осталих квалитетније управљање сопственим мисаоним процесима. Квалитетније управљање мисаоним процесима (планирање, одлучивање и контролисање) последица је веће и квалитетније метакогниције (спознаје властитих процеса сазнавања), која произлази из широке, богате и продубљене базе знања. Према овом схватању, даровит је онај појединац коме високе способности и велика мотивација омогућавају настанак квалитетне и еластичне опште и специфичне базе знања, чији се елементи у одређеном тренутку могу употребити на нов, креативан начин.

Стернберг даровитост описује као изузетну и неувичајену интелектуалну способност (Sternberg, 1986), а њено објашњење и разумевање изводи из своје теорије интелигенције. Тријархијска теорија интелектуалне даровитости представља посебан случај његове тријархијске теорије људске интелигенције (Altaras, 2006). Стернберг је у првобитној верзији своје теорије интелектуалне даровитости издвојио три типа интелигенције, односно три субтеорије: компонентну, искуствену и контекстуалну (ситуацијску) субтеорију. Прва, компонентна субтеорија усмерена је на унутрашње аспекте интелигенције и односи се на менталне процесе који су укључени у размишљање (Letić, 2015). Спецификује три класе компоненти, односно елементарних процеса обраде информација који су у основи интелигентног понашања. То су: метакомпоненте (процеси вишег реда који се користе код планирања, препознавања и решавања проблема, контроле постигнутих резултата и доношења одлука), компоненте перформанси (процеси који се користе за извршавање задатака претходно одређених метакомпонентама) и компоненте потребне за стицање знања и прикупљање информација (процеси који се активирају код новог учења) (Милановић, 2017). Решавање проблема је, по Стернбергу (Sternberg, 1981), усмерена, планирана и контролисана обрада информација, при чему централно место у овом процесу припада метакомпонентама (процеси непрекидног унутрашњег праћења тока решавања проблема). Компонентна интелигенција је најближа традиционално схваћеним интелектуалним способностима (Čudina-Obradović, 1990). Долази до изражаја у проблемским ситуацијама и задацима у којима се захтева конвергентно и аналитичко мишљење, односно у задацима у којима је неопходно пронаћи

једно тачно решење (Kadum, 2013). У процесу решавања проблема најпре компоненте за стицање знања осигуравају настанак базе знања. У наредном кораку метакомпоненте проверавају ефикасност компоненти за стицање знања и оних везаних за оперисање знањем. Овај систем појединцу омогућава да компоненте употреби за учење на основу сопствених грешака и да их укључи у будуће понашање. На крају, повратна информација из компоненти за стицање знања у метакомпоненте пружа могућност појединцу да коригује и побољша резултат (Sternberg, 1981; Кадум, 2013). За квалитетно решавање проблемских ситуација важни су квалитетна база знања и развијен систем метакомпоненти које поспешују брзу и флексибилну примену те базе. Искуствена субтеорија односи се на две способности као кључне у процени интелигенције: способност сналажења са новим и непознатим задацима и способност аутоматизоване обраде информација. Интелигентни појединци се, по Стернбергу, боље сналазе када се суочавају са новинама и могу да побољшају способност аутоматизације обраде информација (Милановић, 2017). Овакво схватање интелигенције блиско је традиционалном схватању креативног мишљења. Искуствена интелигенција је карактеристична за ствараоце. Не долази до изражаја у задацима у којима је неопходно одредити тачно једно решење, већ код задатака у којима је неопходан увид у проблем. Контекстуална субтеорија разматра интелигенцију у односу на спољашњи свет индивидуе. Односи се на свакодневну, тзв. „практичну” интелигенцију и на три врсте мисаоних процеса који карактеришу интелигентно понашање у свакодневном животу: адаптација на постојећи амбијент, обликовање окружења и селекција окружења са релевантним оптималним условима за живот и рад. Свакодневна интелигенција омогућава појединцу да се прилагоди, одабере и обликује своје понашање у складу са својим окружењем и решава проблеме у различитим животним ситуацијама.

Поменуе компоненте су интерактивне и служе приликом прилагођавања, одабира и обликовања. Употреба сва три типа интелигенције омогућава индивидуи да повеже различите компоненте мисаоног функционисања (компонентне интелигенције) са претходним искуством (искуствена интелигенција) и употреби ове резултате како би се снашла у практичним задацима селекције или обликовања ситуације (контекстуална интелигенција) (Kadum, 2013). У каснијим верзијама теорије, поменута тројност се не односи само на тзв. лица интелигенције, већ и на типове интелектуалних способности (Letić, 2015). Стернберг разликује (меморијско-)аналитичке, креативне (синтетичке) и практичне (контекстуалне) способности које почивају на истим компонентама обраде информација, али подразумевају њихову примену у различитим контекстима и на задацима различитог нивоа познатости. Успешну интелигенцију

дефинише као „способност да се постигне успех у животу, у складу са сопственом дефиницијом успеха и у оквиру свог социокултурног контекста, коришћењем сопствених јаких страна и кориговањем и компензовањем слабих, са циљем прилагођавања средини, избора или обликовања средине, а комбиновањем аналитичких, креативних и практичних способности” (Sternberg, Grigorenko, 2002: 265).

Стернберг, у складу са описаном структуром интелигенције, разликује три типа интелектуалне даровитости. Аналитичка даровитост повезује се са компонентном субтеоријом. Ова даровитост подразумева изузетну способност анализирања, расуђивања, критичког процењивања, упоређивања, евалуирања и објашњавања. Појединци који су аналитички даровити постижу обично добре резултате у школи и на стандардизованим тестовима. Тестови интелигенције у великој мери мере аналитичке способности и способности меморије. Особе које имају ову врсту даровитости често се препознају као даровити у школском окружењу. Међутим, чињеница да имају развијену способност учења и анализе идеја не подразумева да су способни да произведу сопствене идеје или да примене научено у свакодневном животу.

Синтетичка или креативна даровитост односи се на високу способност стварања, откривања, изумевања, истраживања, имагинације и давања претпоставки. Стернберг је повезује са искуственом субтеоријом. Ова даровитост се не може мерити конвенционалним тестовима интелигенције. Креативност је способност генерисања идеја које су нове, изузетног квалитета и одговарају задатку, па би за њено мерење било прикладније користити задатке попут писања кратких прича, цртања слика, решавања неких нових научних проблема итд.

Практична даровитост подразумева способност да се аналитичке и синтетичке вештине примењују у свакодневним ситуацијама. Дефинише се као изразита способност да се нешто искористи, примени, имплементира у пракси. Особа са овом даровитошћу показује интелигенцију у високо контекстуалним ситуацијама. Мада могу остати непримећене када је у питању њихово формално знање, често се истичу када је у питању неформално, односно знање неопходно да би се успело у окружењу.

Стернберг (2000) је приметио да се даровитост ретко јавља као чист случај једне од наведених категорија даровитости, па уводи појам *образац* – уместо *тип* даровитости. Појединац не мора да буде ограничен на високо развијен само један од наведених видова даровитости. Тако, Стернберг, осим наведених, дефинише још четири вида интелектуалне даровитости који произлазе из специфичне комбинације високих способности: аналитичко-креативну, аналитичко-практичну, креативно-практичну

и „савршено избалансирану”, у којој су високо развијене све три врсте способности.

Стернбергова теорија много више од било које друге претходне теорије објашњава мисаоне процесе и карактеристике даровитог појединца (Kadum, 2013). Експериментална истраживања која су се бавила провером неких поставки Стернбергове теорије показала су да се даровити разликују од недаровитих у бољој употреби метакомпоненти (Sternberg, Davidson, 1985). Утврђено је и да база знања има важну улогу за специфичне стратегије понашања у одређеној области знања и вештина, док метакомпоненте омогућавају квалитетне опште стратегије. Стернберг и Дејвидсон (Sternberg, Davidson, 1986) описују следеће карактеристике интелектуалног функционисања даровитих:

- висок степен опште интелигенције и нарочито висок степен неке специфичне способности;
- високо развијена способност уочавања односа и то не само на нивоу конкретног (између два предмета или појаве), већ и за уочавање односа вишег реда (однос између два односа или између система односа);
- високо развијена способност проналажења проблема која се односи на то да су даровити способнији од осталих да у свом подручју рада пронађу проблеме који су важни и који се могу истражити;
- велика вештина коришћења комбинације оних способности у којима су најбољи;
- изражена способност мењања окружења која се огледа у веома активном односу према окружењу (даровити из свог окружења максимално користе све што им је потребно, ако окружење не задовољава њихове потребе, прилагођавају га себи).

Стернбергов модел даровитости омогућава проширену и кохерентну основу за развој идентификационих програма за рад са даровитима, али и обогаћивање образовних програма за даровите којима би се развијале метакомпоненте и њихова употреба.

1.3. ИДЕНТИФИКАЦИЈА ДАРОВИТИХ

О сложености појма даровитости сведочи постојање великог броја теорија, дефиниција и различитих приступа овом феномену. Због немогућности прецизног одређења појма даровитости појављују се и многобројне дилеме и проблеми, како у вези са идентификацијом потенцијално даровитих ученика тако и у вези са планирањем стратегија рада са

овом категоријом ученика и обезбеђивањем одговарајућих мера подршке. Идентификација даровитих појединаца и познавање начина на који они функционишу битни су због доношења одговарајућих одлука о томе шта треба за њих учинити. Међутим, поставља се питање на основу којих индикатора би требало извршити избор.

Под идентификацијом подразумева се процес чији је циљ да у укупној популацији издвоји даровите појединце како би се за њих планирао и организовао посебан програм и мере подршке (Дејић, Михајловић, 2014). Корен (1989) прави разлику између термина *ошкривање* и *идентификација*. По њему, *ошкриши* значи само препознати потенцијално даровитог појединца, док, са друге стране, *идентификовати* значи утврдити његов идентитет, скуп особина које га чине даровитим, као и одредити врсту и степен његове даровитости. Откривање и идентификација чине континуиран и стандардизован процес и требало би да обухвате целокупну популацију ученика. Другим речима, сваког ученика би требало сматрати потенцијалним кандидатом.

Постоје различите врсте и категорије даровитости у чијој основи се налазе различите способности и њихове комбинације. Из тог разлога, не постоји универзалан приступ идентификацији и јединствен тест даровитости, већ се морају изградити специфични поступци у складу са типом даровитости. У сваком програму идентификације, осим неопходних метода квантитативног утврђивања даровитости (употребе различитих стандардизованих тестова), требало би обезбедити и квалитативни приступ који би омогућио анализу менталних процеса испитаника (на пример, опажање реакција испитаника током индивидуалних тестирања, самопроцена и сл.). Структура одређеног облика идентификације зависи од календарског узраста испитаника, али с обзиром на то да постоје велике индивидуалне разлике у односу на узраст на којем се испољава даровитост, идентификација би морала да се организује као континуиран процес. Сви поступци и методе за откривање и идентификацију даровитих појединаца могу се сврстати у две категорије: *методе шестирања*, које се још описују и као објективне методе, и *методе процене*, односно субјективне методе (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016; Дејић, Михајловић, 2014).

Основна карактеристика свих метода процене јесте да се њима утврђују одређене особине потенцијално даровитих појединаца, а њихов главни инструмент јесте човек. Управо је ово разлог зашто су овакве процене окарактерисане као субјективне, а самим тим и подложне грешкама. Субјективне процене/номинације могу потицати од различитих особа, почевши од родитеља, преко наставника, вршњака, па и самог даровитог

ученика. С обзиром на то да је тешко обезбедити потпуно непристрасан суд, како би се повећала објективност често се у поступке процењивања истовремено укључује више процењивача. Процене се могу прикупљати у структурисаној или неструктурисаној форми. Структурисана форма подразумева да се процена врши уз помоћ чек-листе или рејтинг-скеале којима се процењивач упућује да посматра релевантне карактеристике. Неструктурисана форма се односи на то да процењивач именује ученике за које сматра да су потенцијално даровити и да би их требало укључити у одговарајући програм подршке.

Када су у питању процене родитеља, који сами по себи представљају важан извор информација о ученику, мишљења су подељена. Поједина истраживања показују да су се процене родитеља показале тачним и поклопиле се са резултатима тестова интелигенције у две трећине случајева, док нека друга упозоравају на то да су процене родитеља подложне полним стереотипима, због којих родитељи у већој мери као даровите номинују дечаке у односу на девојчице (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Оно што би могло да помогне да процене родитеља буду успешније јесте да им се учине доступним чек-листе релевантних понашања за одговарајућа предметна подручја.

С обзиром на то да наставници директно раде са ученицима и имају велику улогу у процесу стицања знања и вештина, њихове процене/номинације имају веома важну улогу у препознавању и идентификацији даровитих ученика. На основу континуираног опажања понашања могу препознати потенцијале ученика за његову касније манифестовану даровитост. Нека истраживања показују да су процене наставника прилично тачне, нарочито када се ради о проценама вербалних, математичких и спацијалних способности ученика (Chamorro-Premuzic et al., 2009), док друга указују да наставници праве значајне грешке у њиховој процени (Eckert et al., 2006). Ипак, наставници су у већини случајева успешни у препознавању даровитих ученика када су им доступни чек-листа или неки други образац за процену са карактеристикама ученика које треба посматрати, када имају довољно времена да упознају своје ученике и одређену обуку за препознавање даровитости (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Најчешћа грешка коју праве наставници јесте да ученике који показују неке пожељне аспекте понашања (постижу одличан успех, савесни су, уредни, вредни, сарадљиви итд.) препознају као даровите, а они то нису.

Вршњачке процене/номинације показују се такође важним и имају одређену предност у односу на наставничке јер обухватају шири распон понашања потенцијално даровитог ученика. Сматра се да ученици могу

да процењују знаке даровитости својих другова/другарица почевши од четвртог разреда основне школе.

Можемо разликовати два облика процене, процењивање развијености особина појединаца и процењивање квалитета њихових духовних и материјалних производа (Дејић, Михајловић, 2014). Процењивање развијености особина појединаца обично обављају, као што смо већ описали, наставници, родитељи, вршњаци, а могу то чинити и различити стручњаци у структурисаној или неструктурисаној форми.

Процењивање квалитета духовних и материјалних производа појединаца подразумева да се врши анализа конкретних производа ученика и процењује њихова вредност у односу на одређене стандарде. Ти производи могу бити различита материјална достигнућа (слике, патенти, проналасци итд.) или неки нематеријални, „духовни“ продукти (глумачко остварење, музичка интерпретација, чланство у тиму и сл.). Индиректни показатељи изванредних продуката даровитих ученика могу да буду награде и водећа места која су они постигли на разним такмичењима (нпр. математичка такмичења).

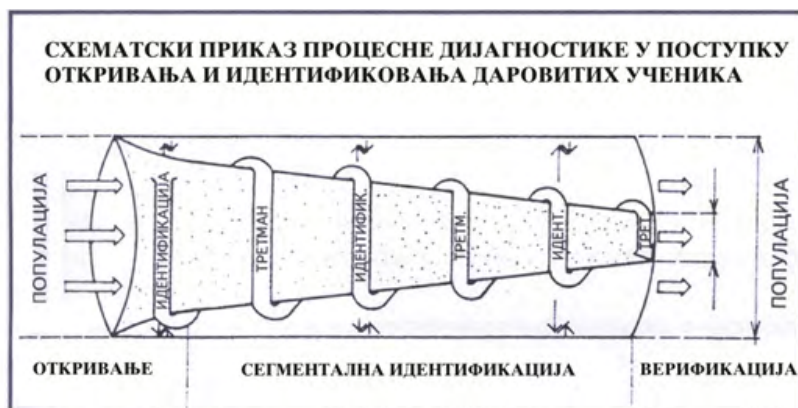
Објективне методе, тј. методе тестирања односе се на утврђивање изузетности у некој области у односу на постојеће норме и независно од тога ко врши процену. Према томе, под тестирањем се подразумева стручна примена стандардизованих мерних инструмената за утврђивање и мерење способности и осталих особина појединаца. За сваки такав стандардизован инструмент тачно знамо шта се њиме мери (валидност), колико је поуздан у ономе што мери (релијабилност), колико је осетљив у диференцирању различитих испитаника у односу на предмет мерења (дискриминативност) и колико су објективни подаци који се њиме прикупљају (објективност). Помоћу ових инструмената утврђујемо релативни положај сваког испитаника у популацији у односу на мерену способност или особину.

Данас је у употреби велики број различитих мерних инструмената за мерење степена развијености особина и способности појединаца. Углавном се користе тестови, а већина њих је стандардизована за школску популацију и примењују се у различите сврхе. На пример, то су тестови за утврђивање опште менталне развијености (интелигенције), тестови за утврђивање посебних интелектуалних способности (вербалних, перцептивних, нумеричких итд.), тестови за испитивање креативних способности, стандардизовани тестови знања или постигнућа, тестови интересовања, тестови личности итд. Требало би водити рачуна о неким ограничењима примене тестова. Резултати тестова интелигенције нису једнако валидни за све групе испитаника, на пример у случају када

њихове психодемографске особине не припадају популацији за коју је тај тест стандардизован (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Неки тестови (композитни тестови и обухватне батерије) могу указати на потенцијал за висок општи академски успех, али не дају информације у којој области је ученик даровит. За идентификацију ученика изузетних способности важну улогу имају тестови вербалног и квантитативног резоновања. При идентификацији математички даровитих требало би вршити процењивање способности квантитативног резоновања. Са друге стране, мада се вербална интелигенција углавном везује за друштвено-хуманистичко подручје, значајно предвиђа и постигнуће у математици. У пракси се често користе тестови фигуралног резоновања (на пример Равенове матрице) и невербални тестови спацијалних и перцептивних способности јер се сматра да су културно непристрасни. Међутим, сматра се да уопште представљају слабе предикторе академског постигнућа, па их не треба користити као основно или једино средство идентификације. Ипак, имају значај када је у питању препознавање даровитих ученика и предвиђање постигнућа у математици. Када су у питању тестови знања, од значаја су стандардизовани тестови образовних постигнућа. Успех и одличне оцене у школи могу, али не морају бити показатељи изузетних способности.

Осим тестирања, које свакако има незаобилазно место и високу дијагностичко-прогностичку вредност, требало би користити и друге методе и поступке процене. Како свака метода поред предности има и одређене недостатке, само добро осмишљеном комбинацијом метода и поступака у процесу идентификације можемо рачунати на добре резултате.

Поставља се питање критеријума даровитости: колики ниво одређене карактеристике значи даровитост и који ниво успеха на одређеном тесту указује на даровити потенцијал. О томе да ли је појединац даровит или није, и у којој мери, одлучује испитивач на основу одговарајућих критеријума. По С. Максић (1993), испитивачи морају знати да се даровитост не може сасвим поуздано утврдити у одређеном тренутку као једна константна величина, нарочито ако се ради о деци и младима. У току живота појединца дешавају се значајне промене. Нека деца која су идентификована као даровита, задржаће ово својство и развиће се у одрасле даровите ствараоце, док ће друга доживети неуспех у каснијем раду и неће створити дела која се од њих очекују. Међутим, могу се појавити и даровити ствараоци који нису били запажени и препознати као такви у детињству. Из тих разлога се препоручује да се на млађим узрастима већи проценат деце сматра даровитим и третира на тај начин, а са повећањем узраста критеријуме даровитости треба постепено пооштравати. Када је реч о проценту даровитих, процене се углавном крећу од 1% до 20% деце из генерације.



Слика 4. Схематски приказ процесне дијагностике (Максић, 1993: 36)

Свестрани приступ утврђивању даровитости, наводи С. Максић (1993), обухвата вишегодишње праћење популације деце и вишеструко испитивање на различитим узрастима, тзв. процесну дијагностику (Слика 4). Понављањем идентификационог поступка врши се провера налаза претходних испитивања и увећава тачност идентификације. На овај начин идентификација је обухватнија, динамичнија и поузданија и више деце улази у „први круг”. Омогућава и одређено „вођење” даровитих, јер би се плански и систематски подржавао њихов развој од првих, изузетних испољавања неке способности, па до значајних зрелих достигнућа (Ђорђевић, 1999).

Питања и задаци за самосталан рад

- 1.1. Опишите основне карактеристике Термановог схватања даровитости.
- 1.2. Које су сличности, а које разлике између Голтоновог и Термановог схватања даровитости?
- 1.3. Објасните укратко Таненбаумов петофакторски модел даровитости.
- 1.4. Објасните разлику између даровитости и талента по Гањеу.
- 1.5. Које су, по Рензулију, три групе карактеристика неопходне за даровито понашање?
- 1.6. Објасните разлику између школске и креативно-продуктивне даровитости по Рензулију.
- 1.7. Како Гарднер дефинише даровитост?
- 1.8. Опишите укратко карактеристике даровитих појединаца за сваку врсту интелигенције по Гарднеру. Која интелигенција је важна за математички даровите?
- 1.9. Како бисте могли да искористите то што ученик има развијену телесно-кинестетичку интелигенцију (или музичко-ритмичку) на часовима математике? Осмислите и опишите један пример.
- 1.10. Објасните укратко три типа интелигенције по Стернбергу: компонентну, искуствену и контекстуалну интелигенцију.
- 1.11. У чему је разлика између аналитички, синтетички и практично даровитог појединца? Објасните укратко и наведите њихове карактеристике.
- 1.12. У чему је разлика између старијих и новијих схватања, приступа и дефиниција даровитости?
- 1.13. Због чега је битно идентификовати даровите појединце?
- 1.14. Које методе се користе за откривање и идентификацију даровитих појединаца? Укратко опишите њихове карактеристике.

2. МАТЕМАТИЧКА ДАРОВИТОСТ

*У математици уметности постављања питања
вреднија је од њеновог решавања.*

Џорџ Кантор

Математика као наука има суштински значај за савремено друштво и његов напредак. Њена достигнућа представљају важну основу развоја и истраживања у области природних и медицинских, али и друштвених и техничко-технолошких наука, економије и информационо-комуникационих технологија. Узевши у обзир значај математичке науке и то да су носиоци њеног развоја кроз историју били даровити појединци, проистиче да је неопходно посветити посебну пажњу математички даровитима. Једини начин да се оствари напредак на пољу науке, у овом случају математике и математички оријентисаних дисциплина, јесте улагање у образовање високо способних појединаца. Високо развијене математичке способности представљају вредан друштвени ресурс, неопходан да би се ишло у корак са технолошким светом. Међутим, без обзира на витални значај образовања математички даровитих ученика, велики број њих похађа регуларну наставу и ради исте садржаје, на исти начин и истим темпом као и остали ученици. Настава намењена просечном ученику не подстиче и не развија у довољној мери потенцијале математички даровите деце. Све ово указује да би у образовању учитеља и наставника математике требало више пажње посветити теми математичке даровитости, као и начинима идентификације и рада са математички даровитим ученицима.

2.1. ПОЈАМ МАТЕМАТИЧКЕ ДАРОВИТОСТИ

Математичка даровитост је дуго била предмет образовних дебата. Слично као и када је у питању општа даровитост, вођене су бројне дискусије како дефинисати и мерити овај концепт, тако да још увек не постоји консензус о једној прецизној и јединственој дефиницији математичке даровитости (Yazgan-Sağ, 2022). Први покушаји бављења математичком даровитошћу фокусирали су се на анализу процеса математичког мишљења

кроз активности истакнутих математичара. Почетком двадесетог века, Поенкаре (1908/1952), француски математичар, филозоф, инжењер и физичар, изнео је анализу сопствене математичке мисли у обраћању Француском психолошком друштву (Leikin, 2018). Поенкаре је истакао значај анализе математичког мишљења и нагласио да су за математичку креацију потребне посебне способности, укључујући осећај математичког реда и математичку интуицију. Психологијом открића у пољу математике бавио се и Адамар (1945/1954), још један француски математичар. Адамар је проучавао креативне поступке највећих математичара и физичара свог раздобља и указао је на важност несвесне компоненте математичког открића. И Поенкаре и Адамар сматрали су да је математичко откриће примарни елемент математичке даровитости, а посебно место давали су и осећају за естетику у домену математике као карактеристици људи са изузетним математичким достигнућима. Сматрали су да истраживање природе и структуре математичког открића захтева примену комбинације математичких и психолошких алата.

Када је у питању образовање даровитих, математичка даровитост се често посматра као посебна врста даровитости која се разликује од опште даровитости. Истовремено, већина модела опште даровитости (о којима је било речи у претходном поглављу) може се применити и на математичку даровитост као даровитост која се повезује са математичким способностима и вештинама. Гарднерова теорија вишеструких интелигенција прави разлику између димензија које не морају бити нужно повезане, укључујући и вербално-лингвистичку, логичко-математичку и визуелно-спацијалну интелигенцију. Стернберг сматра да је даровитост функција аналитичких, креативних и практичних способности. Неки модели, попут Гањеовог и Рензулијевог, даровитост виде као резултат сложених интеракција између когнитивних, лично-социјалних и социокултурних особина и услова у окружењу. Ипак, систематских истраживања математичке даровитости нема много, а једно време ова тема била је у потпуности занемарена (Leikin, 2009). Свакако најутицајније истраживање математичке даровитости је револуционарна студија коју је спровео совјетски математичар Крутетски (1976) и чији резултати су објављени у књизи под називом *Психологија математичких способности школске деце*. Ова студија се и данас сматра јединственом због свог фокуса на специфичне карактеристике математичког расуђивања математички даровитих ученика. Обухватила је не само ученике, већ и њихове родитеље и наставнике, а бавила се проучавањем развојних путања математички даровитих ученика. Крутетски је применио квалитативне и квантитативне методе истраживања, а развио је и серију математичких тестова који интегришу различите компоненте математичког расуђивања професионалних

математичара. И након више од 50 година, ова студија остаје једна од најрелевантнијих, а нарочити значај има за проучавање високо развијених математичких способности.

Током последње две декаде све више пажње посвећује се истраживањима математичке даровитости међу децом, адолесцентима и одраслима, а 2010. године формирана је Међународна група за математичку креативност и даровитост. Истраживања су постала интердисциплинарна и превазиђен је расцеп између истраживања у области математичког образовања и истраживања опште даровитости. Све више увида у природу математичких способности долази из поља когнитивне психологије и образовне неуронауке (Myers, Carey, Szűcs, 2017).

Дефиниције математичке даровитости варирају од оних старијих, које математичку даровитост посматрају као нешто фиксно и статично, на шта се не може утицати, до оних новијих, које је виде као нешто динамично што се може даље подстицати и развијати. Прве доводе до погрешног схватања да ће математички даровити ученици успети без обзира на све, независно од образовних прилика. Поједини истраживачи као примарне истичу наследне, урођене факторе, док други сматрају да се висока математичка постигнућа могу повезати искључиво са напорним радом, односно уложеним временом и трудом да се развију одређене вештине (Petrill et al., 2009). Мада не постоје јасни истраживачки докази о генетској природи математичке даровитости, њено постојање се не може искључити (Leikin, 2021). Штавише, нека истраживања показују да на високе математичке способности утицај имају и генетски фактори и фактори окружења (Petrill et al., 2009; Tosto et al., 2014). Петрил и сарадници сматрају да се вештине неопходне за висока математичка постигнућа не могу учити у потпуном генетском вакууму (Petrill et al., 2009). Боровик и Гардинер (Borovik, Gardiner, 2007) говоре о математичким карактеристикама које су истовремено и наслеђене и могу се неговати и развијати до изузетних нивоа кроз стварање одговарајућег окружења за учење. Иако сама даровитост није нешто што се може стећи учењем и образовањем, облик у коме се она у неком тренутку приказује у великој мери представља израз процеса учења и вежбања, а не директан одраз генетски датих предиспозиција (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Циљ наставе је да се даровитим ученицима обезбеди одговарајући утицај фактора окружења. Само посебно дизајниран математички програм може да пружи математички даровитим ученицима одговарајуће активности и задатке који би требало да омогуће да се њихове природне способности максимално развију и остваре.

Математичка даровитост, примарно, имплицира постојање високо развијених математичких способности. Термини као *математички даровити*, *високо способни за математику* обично се користе за ученике чије математичке способности их смештају у 2% или 3% самог врха популације (Дејић, Михајловић, 2014). Често се у литератури као синоним за високе математичке способности користи и термин *високи математички потенцијал*. Лејкин (Leikin, 2018) наводи да је математички потенцијал комплексна функција математичких способности, афективних и личних карактеристика појединца. Математички потенцијал ученика се може развити у математички таленат ако му се обезбеде подстицајни услови за учење који узимају у обзир његове способности, особине личности и афективне карактеристике. Милграм и Хонг (Milgram, Hong, 2009) сматрају да ниво даровитости варира од минималног до изузетног, док реализација талента зависи од особина личности (нпр. мотивације, метакогниције, афективних и биолошких својстава) и фактора социјалног окружења (нпр. школа, породица, технологија, социокултурне карактеристике). Математичка даровитост се обично мери изузетно високим математичким резултатима. Често се доводи у везу и са креативношћу (Leikin, 2021). Милграм и Хонг (Milgram, Hong, 2009) праве разлику између два типа талента – експертског и креативног, и указују на опасност губљења талента уколико појединци не увиде свој потенцијал за изузетна постигнућа који су манифестовали у детињству.

Неоспорно је да се професионални математичари (математичари-научници, математичари-истраживачи), чија су математичка открића препозната од стране њихових колега (нпр. објављена у научноистраживачким часописима или награђена) безусловно сматрају математички талентованим (при чему математички таленат подразумева реализовану математичку даровитост). Он/она поставља питања, даје претпоставке, открива нове математичке теореме, креира нове математичке појмове и алате и доказује или оповргава претходно дате и недоказане математичке претпоставке. Креативност професионалних математичара усмерила је истраживаче на проучавање везе између математичког талента и математичке креативности (Hadamard, 1945; Leikin, 2021; Sriraman, 2005). Ервинк (Ervinck, 1991) сматра да је креативност витална компонента решавања проблема повезана са напредним математичким мишљењем које се може довести у везу са способношћу појединца да дође до неалгоритамског, оригиналног или решења на основу увида. Баланс између експертизе и креативности води ка продорним идејама које шире област математичке науке. Стога, можемо слободно рећи да су математичари креативни експерти. Математичка даровитост се може схватити као комбинација математичке експертизе и математичке креативности.

Међутим, дефиниција математичке даровитости ученика није тако очигледна као код остварених, истакнутих математичара. Код одраслих, критеријуми дефинисања математичке даровитости су знатно строжи. Експертиза и креативност код деце и адолесцената разликују се од оних код професионалних математичара. Ово повлачи за собом да и о експертизи и о креативности треба да говоримо као о апсолутној и релативној (Leikin, 2009). Док се термин *ајсолућна* односи на манифестацију на историјском нивоу и на изузетне резултате који су оставили траг на цивилизацију и друштво, термин *релативна* се односи на нешто што се испољава на знатно ужем плану, на пример у школској популацији. Узевши то у обзир, можемо да дефинишемо математички даровитог ученика на следећи начин: „Ученик је математички даровит ако испољава висок ниво математичких резултата у оквиру одговарајуће референтне групе и ако је способан да ствара математичке идеје које су нове у односу на његово образовно искуство” (Leikin, 2018: 3). Референтну групу могу чинити вршњаци из одељења, учесници математичког такмичења, итд. Изузетни математички резултати, који су манифестација релативне математичке експертизе, обично се повезују са способношћу решавања комплексних проблема у одговарајућој етапи учења математике. Способност ученика да даје нове математичке идеје повезана је са њиховом склоношћу да самостално постављају питања и дају претпоставке без подршке наставника. Односи се на способност ученика да решава сложене проблеме, примењује математичке алате у новим ситуацијама и открива математичка својства и чињенице са којима се раније није сусрео. Сматра се да су ове идеје релативно оригиналне уколико се разликују од идеја које дају други ученици и уколико се односе на нове математичке садржаје, односно на оне које ученици још увек нису учили.

Дејић, Егерић, Михајловић (2022) описују математички даровитог ученика као ученика који поседује изузетне, изнадпросечне способности и интересовање за математику. Математичка даровитост подразумева високу способност математичког мишљења и разумевања математичких идеја, а не само високу способност извођења аритметичких операција или постизање одличног успеха у школској математици. Често се као особине математички даровитих ученика помињу способности као што су брзина рачунања, добро памћење чињеница и научених поступака (Leikin, 2021). Истицање ових особина се пре свега заснива на ограниченом схватању математике. Математика је изузетно комплексан конструкт који кулминира логичком апстракцијом простора, облика, величине и количине (Davis, 1984). Конструкција смислених математичких појмова и односа не своди се само на учење и памћење математичких чињеница, вештина и правила (Parish, 2014). Математика је креативан подухват,

авантура (Sriraman, 2004). Укључује решавање и постављање проблема, генерализације, проширивање, креирање и изналажење нових начина да се приступи неком проблему (Davis, 1984), као и социјалну интеракцију, машту, хеуристику, интуицију, доказе (Sriraman, 2004). При томе, основни математички појмови попут броја, облика, простора, мерења итд. су полазне тачке, а вештине руковања њима су алати који нам омогућавају да се бавимо математиком, односно средства за постизање циља, а не циљ сам по себи.

По Крутетском (1976), математички даровита деца имају тенденцију да лако врше генерализацију, креирају и смишљају нове методе решавања математичких задатака, теже ка најчистијем, најједноставнијем, најкраћем, а тиме и најелегантнијем путу доласка до циља. Нажалост, многи наставници стављају нагласак на вештине рачунања или високе способности у понављању научених математичких садржаја и поступака. У том случају, *права* математичка даровитост се не опажа, а пажња се посвећује мање важним чињеницама. Највећи број математичких програма у школама посвећен је стицању знања и развоју вештина рачунања, док се веома мало простора даје демонстрацији комплексних типова закључивања који су карактеристични за истински даровите ученике (Дејић, Михајловић, 2014). Тестови, али и оцене које се дају у оквиру таквих програма рефлектују ту структуру. Може се десити да ученици који нису математички даровити али имају развијену вештину рачунања постижу исте резултате на тестовима као и истински даровити ученици. Ако се не води рачуна може се десити да се ови ученици идентификују као даровити. Важно је избећи овакву погрешну идентификацију, као што је важно и открити оне ученике који су заиста даровити. Не би требало занемарити ни то да неки математички даровити ученици не показују импресивно академско постигнуће, ни ентузијазам за школску математику. Ови ученици обично виде постојеће програме као незанимљиве, неодговарајуће и недовољно изазовне. Утврђено је да велики број даровите деце не демонстрира брзину у раду (Silverman, 1998). Веома често их одликује перфекционизам који подразумева обраћање пажње на детаље, што резултира спорим и мукотрпним радом. Такође, интровертност се показала много чешћом у популацији даровитих ученика него међу популацијом просечних ученика. Постоји опасност да интровертни математички даровити ученици остану непримећени. Историја нас учи да је већина великих математичара своју даровитост за математику испољавала веома рано, понекада чак и на предшколском узрасту. Њихова даровитост се огледала кроз лакоћу израде математичких задатака, способност за самостално учење, постизање одличног успеха у математици, али и у другим предметима, у постављању оригиналних питања или задатака, давању оригиналних решења итд.

Све ово упућује на потребу организованог рада на идентификацији и изналажењу најефикаснијег облика рада са даровитим ученицима. Ако се даровитост не испоји и не развија у оптималном узрасном периоду, може бити заувек изгубљена.

У даљем тексту најпре ћемо рећи нешто о математичким способностима и карактеристикама математички даровитих ученика, а затим ћемо приказати начине идентификације математички даровитих ученика и различите видове пружања образовне подршке.

2.2. МАТЕМАТИЧКЕ СПОСОБНОСТИ

Сваки ученик поседује одређене способности довољне за праћење, савлађивање и усвајање програмом прописаних математичких садржаја (Kurnik, 2001). Ове способности би требало да му омогуће да разуме основне математичке појмове, идеје, поступке и методе, као и да самостално решава стандардне, рутинске математичке задатке. Ипак, мада свако има способност да учи математику, постоје деца која брже и лакше уче и долазе до закључака од својих вршњака (Borovik, Gardiner, 2007). Колмогоров сматра да сваки човек просечних способности може савладати школску математику, али без обзира на то, никакав напоран рад не може заменити природну даровитост, даровитост у области математике. Рад може дати добре резултате у науци само ако је сједињен са даровитошћу и обрнуто, даровитост без упорног, систематског рада неће уродити плодом. Дешава се, неретко, да даровити ученици нису свесни својих математичких способности, али и да оне остају непримећене од стране наставника и учитеља. Ако се не открије и не подржи на одговарајући начин и у одговарајуће време, овај потенцијал може бити заувек изгубљен.

Циљ наставе математике у основној школи није пуко усвајање градива, односно стицање знања и вештина које се заснива на учењу правила, формула и решавању стандардних задатака. Уместо да се ученици преоптерећују памћењем великог броја чињеница, требало би подстрекивати развој њиховог мишљења кроз примену мисаоних операција (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, специјализација, конкретизација) и индуктивног и дедуктивног закључивања. Правилником о програму наставе и учења за први (2017: 10), други (2018: 72), трећи (2019: 34) и четврти разред (2019: 39) истиче се да је неопходно „да ученик, овладавајући математичким концептима, знањима и вештинама, развије основне апстрактног и критичког мишљења, позитивне ставове према математици, способност комуникације математичким језиком и писмом и примени стечена знања и вештине у даљем школовању и решавању проблема из свакодневног живота, као и да формира основ за даљи развој

математичких појмова". Стечено знање и вештине, као и усвојене чињенице и методе, према томе, постају само помоћна средства која се примењују у решавању проблема и стицању нових сазнања. У том процесу до изражаја долазе математичке способности ученика (Kurnik, 2001).

Велики број истраживача бавио се питањем математичких способности (Vilkomir, O'Donoghue, 2009). Међутим, психологија математике још увек нема апсолутно поуздан одговор на то како се могу утврдити и измерити способности ученика за математику, па можемо рећи да не постоји јединствен одговор на питање шта су то математичке способности. Постоје разилажења у схватању и дефинисању појма математичке способности и међу самим научницима. У овом поглављу приказаћемо неколико различитих схватања.

Један од првих покушаја разумевања суштине математичких способности везује се за Калкинс (Calkins, 1984; Szabo, Andrews, 2017; Vilkomir, O'Donoghue, 2009). Калкинс је покушала да открије које менталне операције су неопходне да би се неко бавио математиком. Анализира је одговоре студената Харварда и утврдила да студенти математике имају пре конкретно него вербално памћење, да нема разлике у лакоћи памћења између студената математике и осталих студената и да не постоји разлика између мушкараца и жена док раде математику (Calkins, 1984; Szabo, 2017). Такође, издвојила је идентификацију, компарацију, резонување и моћ мишљења као неопходне за математичко мишљење. Почетком 1900-их, због доминације психометријског приступа, покушаји истраживачке заједнице да се дефинишу математичке способности нису уродили плодом. Наиме, психометријски приступи су полазили од тога да су математичке способности не само урођене, већ и фиксне, статичне и да се не могу развијати. Изузетни истраживачи, као што су Бине, Пијаже и Виготски дали су важан допринос студијама математичких способности. Бине је био први који је препознао да математички ум претпоставља постојање једне посебне способности (Vilkomir, O'Donoghue, 2009). Пијаже и Виготски у оквиру својих теорија интелектуалног развоја дали су значајан допринос разумевању ове теме, указујући да способности нису урођене и статичне, већ представљају квалитете које појединац може да асимилује и развија током живота. Описијући етапе интелектуалног развоја, Пијаже је издвојио етапу конкретних и етапу формалних операција, које су веома важне управо за развој математичких способности. Социокултурна теорија Виготског и концепт зоне наредног развоја постали су основа будућих теорија о математичкој даровитости, које јој прилазе не као статичном конструкту, већ као нечему што се може развијати, што зависи од окружења, доступних математичких искустава и подршке. И неки познати математичари, као што су Поенкаре и Адамар, спровели су сопствена

истраживања карактеристика математичких способности. Адамар је приметио да добро развијено логичко мишљење и висока интелигенција нису довољни да неко постане математичар.

Најзначајнији допринос овој теми дао је већ поменути совјетски математичар Крутетски. Крутетски је у оквиру своје лонгитудиналне студије реализоване у периоду од 1955. до 1966. године пратио око 200 ученика различитих нивоа математичких постигнућа. На основу анализе активности решавања проблема ученика креирао је модел математичке способности, као једног динамичног и комплексног феномена. Овај модел се, по њему, састоји од четири компоненте:

а) способност да се пронађу и формализују математичке информације (нпр. формализована перцепција математичког материјала);

б) способност обраде математичких информација (нпр. логичко мишљење, способност да се размишља у математичким симболима, способност брзе и широке генерализације математичких објеката, релација и операција, способност скраћивања процеса математичког закључивања, флексибилност у менталним процесима током вршења математичких активности, стремљење ка јасноћи и једноставности решења, реверзибилност менталних операција у контексту математичког резоновања);

в) способност да се задрже математичке информације (тј. математичко памћење, које представља генерализовану меморију за математичке односе, аргументе, доказе, карактеристике, методе решавања проблема);

г) општа синтетичка компонента, тзв. „математички облик ума” (Крутетски, 1976: 350–351).

Студије показују да и ученици који нису даровити а имају висока математичка постигнућа могу манифестовати солидно развијене математичке способности (Szabo, 2015).

Н. В. Метельскиј (Метельский, 1989) разматра двадесет самосталних концепција о математичким способностима. Ове концепције истичу 30 различитих компоненти математичких способности, међу којима се најчешће помињу:

- 1) моћ апстраховања и оперисање апстракцијама,
- 2) просторни фактор или геометријска интуиција,
- 3) логичко расуђивање,
- 4) гипкост, проналазачко мишљење,
- 5) математичка интуиција,
- 6) нумерички фактор,
- 7) анализа и синтеза,
- 8) тежња ка рационалности у решавању задатака,
- 9) уопштавање, налажење сличности у различитом.

Међу компоненте важне за усвајање математичких знања спадају и: комбинаторно, дедуктивно и индуктивно мишљење, тачност симболике, умеће да се примени математичка схематизација, склоност и интересовање за математику, усвајање математичких појмова итд.

М. Дејић (1997) истиче да треба узети у обзир да постоје две врсте математичких способности: школске и научне. Школске способности огледају се у брзини, дубини и трајности усвајања знања. Математику, тако, са успехом могу радити и они ученици који нису природно даровити, али је систематски изучавају. За разлику од школских математичких способности, у основи научног стваралаштва лежи природна даровитост.

Важна компонента математичких способности јесте интуиција. Представља способност предвиђања, осећај правог пута који води до циља, до решења проблема, способност да се нешто предвиди без логичког расуђивања. Поенкаре је истакао да путем логике доказујемо, а путем интуиције проналазимо. Интуиција је од великог значаја у новим ситуацијама, тако да један од циљева изучавања математике мора бити и њено развијање.

Постоје спорења и око питања о постојању општих математичких способности.

А. Н. Колмогоров (1988) уочава три типа математичких способности: алгоритамску, геометријску и логичку математичку способност.

Под алгоритамским способностима подразумева способност примене познатих алгоритама и метода у конкретној ситуацији; способност да се задатак рашчлани на коначан број корака са елементарним операцијама које ће довести до решења задатка; способност да се до краја спроведе замишљен план решавања, примена аналитичких метода у области алгебре, тригонометрије, анализе.

Геометријске способности подразумевају способност да се извуку неопходне информације из задатог геометријског објекта; способност да се реши задатак помоћу цртежа или модела; способност за просторно представљање и коришћење геометрије у изучавању математичких истина.

Логичке способности огледају се у спровођењу доказа расуђивањем, налажењу контрапримера, коришћењу методе супротне претпоставке итд.

Кит Девлин (Devlin, 2000) сматра да математичка способност није само једна једина мисаона способност. „Радити математику” по њему укључује мноштво различитих мисаоних способности као што су: нумеричко мишљење, квантитативно мишљење, лингвистичко мишљење, мишљење које подразумева приказивање помоћу дијаграма или шема,

мишљење о каузалности, способности руковања апстракцијама. У књизи *Маџематички ѓен (The Math Gene)* Девлин се бави питањем како је људски мозак стекао способност да мисли математички. Сматра да у основи бављења математиком лежи девет основних способности које су још наши преци развили хиљадама, милионима година раније, како би преживели у природи. Тих девет мисаоних способности су следеће.

- 1) *Осећај за број (number sense)*. Укључује, на пример, способност да се препозна разлика између једног објекта, скупа од два и скупа од три објекта, и способност да се препозна да скуп од три објекта има више чланова од скупа од два објекта;
- 2) *Нумеричка способност*. Подразумева бројање и разумевање бројева као апстрактних творевина. Рани методи бројања, попут прављења зареза на штаповима или костима датирају још од пре 30.000 година. Први људи за које знамо да су користили апстрактне бројеве били су Сумери. Између 8000. и 3000. године п. н. е. они су урезивали бројевне симболе на глиненим таблицама;
- 3) *Способност сјацијалној мишљења*. Односи се на способност препознавања облика и процењивања растојања објеката;
- 4) *Осећај за узрок и последицу*. Много тога у математици се ослања на расуђивање облика „ако... онда...”. Ова способност представља апстрактан облик мишљења о узроцима и њиховим последицама;
- 5) *Способност трађења и схватања каузалној ланца чињеница или догађаја*. Математички доказ, на пример, представља високо апстрактну верзију каузалног ланца чињеница;
- 6) *Алоритамска способност*. Представља апстрактну верзију 5. способности;
- 7) *Способност руковања апстракцијама*. Људи су развили способност да мисле о апстрактним творевинама заједно са развојем језика, пре 75.000–200.000 година;
- 8) *Способност логичкој мишљења*. Подразумева способност изградње логичких аргумената корак-по-корак и њиховог схватања (друга апстрактна верзија 5. способности);
- 9) *Способност мишљења о релацијама*. Односи се на препознавање како су објекти (и људи) повезани једни са другима и на разумевање тих односа. Велики део математике бави се односима између апстрактних објеката.

Свих девет способности представљају основна мисаона својства која су веома важна за наш свакодневни живот.

Осећај за број, по Девлину, није нешто што учимо, већ нешто што нам је урођено. Дечји психолози су путем неких истраживања показали да су сви људи рођени са осећајем за број. Такође, постоји и урођен осећај за неке простије примере извођења аритметичких операција (као што је $1 + 1$, $1 + 2$). Девлин наглашава тесну везу између лингвистичке и математичке способности, односно способности служења језиком и способности бављења вишом математиком. На питање шта се прво развило, математичка или лингвистичка способност, Девлин одговара – математичка. Међутим, нису све математичке способности основне, базичне. Осећај за број (један, два, три и више) је урођен, али за разумевање било чега вишег нивоа потребна је развијена лингвистичка способност. Према Девлину, за развој језика потребне су неке од наведених способности (осећај за број, осећај за узрок и последицу, способност грађења и схватања каузалног ланца чињеница или догађаја, способност мишљења о релацијама, и способност спацијалног мишљења), док се остале способности развијају касније. У основи способности која се одређује као *дигитални добар математичар* лежи способност коришћења апстракција, која је предуслов за развој нумеричке, алгоритамске и способности логичког мишљења. Према Девлину, постоје четири нивоа апстракције. Четврти, највиши ниво, јесте онај на коме почиње „математичка мисао” која омогућава појединцу да рукује математичким објектима који су по својој природи апстрактни, и код којих не постоји проста и директна веза са реалним светом.

Б. Драшковић (1998) сматра да основу логичко-математичке способности представља баратање симболима. О предметима, њиховим својствима, односима и везама човек размишља на основу нечега што их замењује, на основу симбола који су апстрактни, тј. немају сличности с оним што представљају. Симболичке ознаке су најчешће појмови – речи и стилизоване визуелне шеме – слике. Математичка способност подразумева још и могућност вештог баратања нумеричким појмовима и ознакама.

Математичка способност се може замислити као резултат истовремене активности следећих ужих способности:

- 1) нумеричка способност: разумевање нумеричких симбола, значења, ознака за различите математичке операције, развијање појма количине, разумевање нумеричких операција, способности читања и писања математичких симбола, разумевање математичких односа;
- 2) способност памћења и планирања која је потребна за сукцесивно решавање корака у проблему као и ланаца закључака;
- 3) способност просторног представљања, разумевања геометрије и просторних односа;
- 4) способност логичког закључивања и уочавања веза.

Не можемо рећи да људи који брзо и напамет изводе рачунске операције, који имају развијену вештину памћења вишецифрених бројева поседују и високо развијене математичке способности (нпр. синдром саванта). Механичко памћење великог броја података и формула није од битног значаја за математичко стваралаштво. Добро памћење јесте корисно, али треба узети у обзир чињеницу да велики број математичара није поседовао изузетну меморију. Математичке способности се обично појављују у младости, у детињству или адолесценцији, и да би се развиле до свог максимума захтевају непрекидно вежбање. Многи познати математичари, кроз историју, у детињству и младости су показивали стваралачке способности. Сетимо се Карла Фридриха Гауса (1777–1855) који је у четвртом разреду основне школе пронашао формулу за збир коначног броја чланова аритметичког низа (Arslanagić, 2001). Ирски математичар Вилијам Хамилтон (1805–1865) такође је испољио даровитост у раном детињству. Са само једанаест година постао је студент, са тринаест година говорио је 12 језика, а са двадесет година постао је професор универзитета. Норберт Винер (1894–1964), амерички математичар и оснивач кибернетике, завршио је универзитет са 14 година, а са 18 година докторирао је у области математичке логике.

2.3. КАРАКТЕРИСТИКЕ МАТЕМАТИЧКИ ДАРОВИТИХ УЧЕНИКА

Без обзира на то да ли математички задаци захтевају вештине рачунања, стратегије решавања проблема, инференцијално мишљење, индуктивно или дедуктивно закључивање, математички даровити ученици често су у стању да дођу до одговора или решења неуобичајеном брзином и тачношћу. Способни су да „виде” везе између различитих садржаја, идеја, концепата чак и ако нису имали формалну наставу из те области (Heid, 1983). Због свог интуитивног разумевања математичких функција и процеса често прескачу кораке решавања проблема, па понекада чак не могу да објасне како су дошли до решења (Greenes, 1981).

Истраживања указују да можемо говорити о знацима, односно карактеристикама математичке даровитости који се испољавају и уочавају у две различите фазе развоја: у детињству, пре навршене осме године, и касније у адолесценцији.

Драшковић (1998) истиче да, у детињству, две карактеристике значајно разликују будуће велике математичаре од њихових вршњака: постављање сврсисходних питања и усамљена активност и сањарење. Сва деца од треће године почињу да постављају велики број питања о свему

што их окружује. Међутим, питања која постављају будућа математички даровита деца су смислена, те су често незадовољна уколико је добијени одговор површан и детињаст. Математички даровита деца памте одговоре, а затим их примењују у новим, другачијим ситуацијама. Још једна одлика ове деце јесте способност и потреба да дуга раздобља проведу сама, као и сањарење отворених очију. У почетку се то углавном манифестује кроз усамљену игру играчкама, а касније кроз самосталну активност „истраживања” и читања. Када се пробуде из сањарења, често одговарају да су размишљали о неком проблему или нешто замишљали (Čudina-Obradović, 1990). Ово је разлог због чега често избегавају друштво остале деце или одраслих и имају потребу да се издвоје из друштва. Способност размишљања и замишљања је специфична карактеристика коју математички даровити посебно развијају. Од најранијег детињства имају склоност да размишљају о опаженом, да замишљају и траже одговоре и од других и на основу властитог запажања и експериментисања. Ова способност је нешто што математичари користе и касније у зрелом добу, с обзиром на то да се велики део њиховог рада одвија управо „у глави”, а тек када дођу до решења посежу за оловком и папиром. Иако је у првој фази развоја дете инхибирано, мирних и контролисаних спољних реакција, карактеришу га дуготрајна пажња, дуга самостална активност и веома жива унутрашња активност (запажање спољне ситуације, односа, неравнотеже, мањкавости у односима ствари и појава у његовом окружењу) (Драшковић, 1998).

У периоду адолесценције математички даровити осим високе способности за математику показују и склоност ка самосталном учењу. Највећи део знања стичу самосталним учењем из књига и опонашањем других. Ретко су одушевљени школским учењем, а дешава се и да нису међу најбољим ученицима. Ипак, у оним областима које их занимају напредују веома брзо и не воле да траже помоћ од одраслих. Још једна важна карактеристика даровитих је да воле да буду у близини реномираних стручњака из области свога интересовања и да их посматрају док раде. За њих стручњаци представљају изузетно важан извор знања и узор. Посматрајући их док раде на решавању одређеног проблема, даровити запажају стратегије којима се ти стручњаци служе, опонашају њихове стратегије и поступке, технику и организацију рада. Битна промена до које долази у адолесценцији односи се и на социјално понашање. За разлику од периода детињства, даровити се више не усамљују и нису социјално изоловани. Сада се нарочито добро сналазе и напредују у друштву себи сличних. У овом периоду често се јавља тзв. „кристализирајуће” искуство. Под кристализирајућим искуством подразумева се мање или више случајан сусрет са подручјем проблема за који се буди интересовање. Овакво искуство код

даровитих побуђује снажну, концентрисану активност и велику упорност у самосталном учењу, откривању и решавању проблема.

У развоју даровитости математичара можемо уочити три раздобља (Дејић, Михајловић, 2014). Међутим, само у средњем раздобљу, које се налази између адолесценције и зрелости, наилазимо на способност проналажења, односно постављања проблема и висок степен увиђања односа између система идеја. Ово раздобље представља најпродуктивније раздобље научног мишљења даровитог математичара. У периоду детињства, мада је присутна знатнижеља и осетљивост за проблеме, дете још увек не барата довољно мисаоним операцијама и знањима помоћу којих би те проблеме могло јасно да формулише и да тражи одговоре и решења. У зрелој фази, са друге стране, знања има превише, тешко је истовремено узети у обзир, упоређивати и манипулисати великим бројем чињеница, па се осетљивост за проблеме гаси.

Драшковић (1998: 149) наводи знаке логичко-математичке даровитости који се јављају у раном детињству:

- интересовање за бројање предмета
- интересовање за мерење предмета
- интересовање за слагање по величини
- лако сналажење у математичким операцијама
- интересовање и разумевање за појмове у вези са временом (сатови, календари) или новцем
- разумевање и памћење математичких симбола (+, -, ·, :)
- интересовање или нарочита вештина у класификовању предмета
- дуготрајна пажња за све што је у вези са природним наукама и техником
- разумевање и интересовање за узроке и последице
- пажљиво посматрање збивања.

Када је у питању школски узраст, неки од типичних знакова математичке даровитости који се уочавају код ученика су:

- креирање нових речи, симбола и цртежа
- самостално трагање за проблемима уместо чекања на њих
- фантазирање
- приликом суочавања са проблемом не задржавају се и не инсистирају на детаљима, већ „виде”, препознају главну идеју
- склоност ка систематизацији и уопштавању идеја

- задивљују их чињенице и формуле које други ученици прихватају као аксиоме или теореме, а из чега произлази запиткивање о разлозима и доказивању.

Павлековић (2009) наводи да је математички даровит ученик онај који је брз, домишљат, тачан, који прихвата пречице у рачунању, али их и сам осмишљава, увежбава, процењује резултате рачунања, спреман је за ново. Ауторка сматра да према ученичкој даровитости за математику можемо разликовати потенцијално даровите ученике и ученике изнадпросечних математичких способности. Потенцијално даровити ученици брже уче од својих вршњака и разликују се од њих у дубини разумевања и нивоу апстракције. Показују истрајност у раду, уче активно, критички анализирају сопствена постигнућа, мотивисани су и имају подршку окружења, а због свог мишљења могу доћи у сукоб са вршњацима или наставником. Ученици изнадпросечних математичких способности су обично они које наставници називају бистром децом. Надмашују своје вршњаке у математичким знањима, вештинама и њиховој примени у решавању проблема из свакодневног живота. Марљивошћу и мотивацијом често засењују своје другове у одељењу. Остале ученике Павлековић сврстава у једну од следеће две групе: ученици са просечним математичким способностима и ученици са недовољно развијеним способностима за математику. Ученици просечних математичких способности не показују посебно интересовање за математику, постигнућа су им у оквирима очекиваних, и могу да најелементарнија збивања из свог окружења повежу са својим математичким знањима и вештинама.

Као значајне индикаторе математичке даровитости Степанек (Stepanek, 1999: 8) наводи следеће особине:

- необична знатижеља о бројевима и математичким информацијама
- способност брзог разумевања и примене нових идеја
- висока способност увиђања зависности, образаца и правила, и способност апстрактног мишљења
- употреба флексибилних и креативних стратегија и решења
- способност трансфера математичких идеја на непознате ситуације
- истрајност у решавању тешких и сложених проблема
- употреба аналитичког, дедуктивног и индуктивног закључивања.

Математички даровити ученици се од својих вршњака разликују према способностима као што су: спонтано и лако формулисање проблема, флексибилност у руковању подацима, ментална агилност флуентности

идеја или „хитар ум”, способност организације података, оригиналност у интерпретацији, способност трансфера идеја и способност генерализације (Greenes, 1981; Ракић, Лазић, 2019). Када се сусретне са неком проблемском ситуацијом, даровити ученик генерише питања везана за њу, на која затим одговара, решава их. Ови ученици имају тенденцију да користе различите нестандартне приступе и стратегије у решавању проблема. Ослањајући се на претходно стечена знања, даровити ученици често „виде” једноставнију или алтернативну стратегију решавања неког задатка. Често скрећу са уобичајених, утабаних путева, сагледавају проблем из различитих перспектива. Како имају развијено дивергентно мишљење и стварају јединствене асоцијације, често одгађају давање одговора или саопштавање решења за постављено питање, те размишљају о могућим другим и алтернативним решењима. Пажљиво и темељно истражују ствари, посматрају односе и врше њихову генерализацију и са лакоћом преносе и примењују стечена знања у новим ситуацијама.

Поједине карактеристике високо даровите деце за математику могу се описати на начин који је карактеристичан за математички даровите одрасле особе (Michael, 1977, према Arslanagić, 2001). Већ између седме и осме године високо даровита деца показују способност „математизације” своје околине, обраћају пажњу на математичке карактеристике и функционалну зависност у различитим ситуацијама, односно посматрају свет „математичким очима” (Krutetskii, 1976). Запажено је да се оваква деца скоро никада не умарају радећи математику, имају изузетно памћење за математичке садржаје, односе, доказе и методе решавања, показују способност брзог и широког уопштавања математичких односа и операција и флексибилност мисаоног процеса. Крутетски сматра да математичка даровитост представља јединствен спој математичких способности који отвара могућност за успешна постигнућа у математичким активностима. По њему постоје три групе или типа математички даровитих: аналитички тип, геометријски тип и хармонијски тип.

Аналитички тип математички даровитог ученика одликује математички апстрактна улога ума. У мишљењу даровитих овог типа преовладавају високо развијене вербално-логичке компоненте над слабије развијеним визуелно-сликовним компонентама које користе приликом учења нових математичких идеја и решавања математичких задатака (Mainali, 2021). Ови ученици брзо и лако функционишу када су у питању вербално-апстрактни модели и немају потребу за визуелним ослонцима када размишљају о математичким релацијама (Дејић, Михајловић, 2014). Вербално-апстрактне методе решавања подразумевају примену аналитичког расуђивања приликом решавања математичких задатака. Аналитичко расуђивање имплицира коришћење математичких формула,

правила, постулата, аксиома, аритметике и алгебре. Чак и у ситуацијама када визуелни приступ омогућава много једноставнија решења, склони су да користе компликоване аналитичке методе у решавању проблема. Више воле и боље се сналазе у апстрактним ситуацијама и кад год је могуће теже да преведу конкретне проблеме у апстрактне форме. Може се десити да имају слабије развијену визуелну способност, нарочито за тродимензионални простор. Крутетски је уочио да постоји веза између овог типа даровитих ученика и успеха у учењу алгебарских садржаја (Mainali, 2021). У школи обично више надмашују остале ученике у области аритметике и алгебре него у геометрији.

Геометријски тип даровитог ученика испољава математичко-сликовни начин размишљања, односно ови ученици користе визуелно-сликовни модел мишљења приликом решавања задатака и учења нових идеја (Дејић, Михајловић, 2014). Визуелна компонента, која је високо развијена, подстиче их да користе визуелне методе решавања задатака и да математичке односе интерпретирају визуелно користећи различите графичке репрезентације (геометријске фигуре, дијаграме, слике итд.). Мада могу имати и добро развијену вербално-логичку способност, ипак ће превагнути коришћење визуелних метода решавања, чак и када је за решавање проблема прикладније и згодније користити аналитичко мишљење. Овај тип даровитог ученика боље схвата функционалне релације и аналитичке формуле када им се да визуелна интерпретација.

Хармонијски тип даровитог ученика испољава релативну равнотежу између два екстрема – аналитичког и геометријског типа ученика. То су ученици који поседују добро развијене и вербално-логичке и визуелно-сликовне способности што им омогућава да када се сретну са неким проблемом до решења лако дођу на оба начина (Дејић, Михајловић, 2014; Mainali, 2021). Крутетски разликује два подтипа хармонијског типа даровитих: апстрактно-хармонијски тип (они који су склонији коришћењу мисаоних операција без употребе визуелних компоненти) и сликовно-хармонијски тип (они који су склонији коришћењу мисаоних операција са употребом визуелних компоненти).

Ш. Арсланагић (2001: 12) на основу рада Крутетског идентификује следеће значајне карактеристике математички даровитих ученика: обликована перцепција математичке грађе и способност схватања формалне структуре проблема; логичка способност мишљења о карактеристичним и просторним односима те способност доброг проницања у математичке симболе; брза и широка генерализација математичких објеката, релација и операција; скраћивање математичких расуђивања и способност проницања у сажете структуре; флексибилност мисаоних процеса; тежња

ка јасноћи, једноставности, економичности, рационалности и разноврсности решења као и побољшању добијених резултата; брза и слободна реконструкција мисаоног процеса као и могућност промене смера математичког расуђивања; генерализована меморија за математичке односе, карактеристике, аргументе, доказе, методе и принципе решавања проблема; математички начин размишљања; енергија и истрајност у решавању проблема.

Ученици који имају висока постигнућа у математици не морају нужно бити даровити. Такође, математички даровити ученици не морају постизати високе резултате у школској математици, а често могу бити и немотивисани. Бурјан (1991) разликује два типа математички даровитих ученика.

Тип решаваача проблема је, по њему, изузетно увежбан и успешан у решавању различитих стандардних и нестандартних проблема. Способан је да се оптимално искаже у временски ограниченим окружењу, на пример на тестовима и разним такмичењима, а главно интересовање му је трагање за решењем проблема који је поставио неко други.

Тип истраживача је заинтересован и успешан у истраживањима нерешених проблема, али са друге стране може бити спор и неспособан да се успешно истакне у ограниченом временском периоду. Предност даје дуготрајним истраживањима неког проблема, сконцентрисан је на властита питања и одговоре, тражење властитог концепта, методе или алгорита за решење проблема.

2.4. ИДЕНТИФИКАЦИЈА МАТЕМАТИЧКИ ДАРОВИТИХ УЧЕНИКА

Први знаци потенцијалне даровитости за математику могу се јавити веома рано, чак и на предшколском узрасту (Ђурић, 1999). Карл Фридрих Гаус, немачки математичар и један од највећих математичара свих времена, своју даровитост за математику испољио је са три године, исправљајући оцу погрешне рачуне. Бернارد Риман, такође немачки математичар, испољио је исту врсту даровитости на узрасту од шест година када је почео да учи аритметику. Не само да је решавао математичке проблеме, већ их је и сам смишљао (Дејић, Михајловић, 2014). Норберт Винер, амерички математичар, са шест година је без проблема читао и разумео уџбенике намењене ученицима гимназија (Almira, 2022). Други су дар за математику манифестовали на школском узрасту (Блез Паскал са 11–12 година, Еварист Галоа са 12 година, Леонард Ојлер са 13 година, Вилијам Хамилтон са 14 година, Готфрид Лајбниц и Нилс Абел са 15 година итд.). Оно што

је свима њима заједничко јесте то да је неко препознао и на време учео и подржао њихов математички потенцијал, било да су то били родитељи, рођаци, наставници или други већ афирмисани даровити математичари.

Први проблем када су питању математички даровити ученици јесте свакако њихова идентификација. Како препознати даровитост за математику? Велику улогу у овом процесу имају родитељи, наставници и школа коју ученици похађају. Међутим, треба имати на уму да нису сва деца која постижу високе резултате у школи и на школским тестовима обавезно даровита. Чињеница је да су школски тестови углавном усмерени на проверу вештина рачунања и коришћења научених правила и стратегија решавања задатака, а не на способности математичког мишљења, те стога треба бити обазрив.

У поглављу у коме је било речи о идентификацији даровитих видели смо да је најбоље користити тзв. мултидимензионалне приступе како би се грешке у идентификацији свеле на минимум (Nolte, 2024). Мултидимензионални приступ подразумева да се користи више различитих метода идентификације – номинације родитеља, наставника, вршњака, резултати тестова интелигенције, посебних способности и постигнућа. Такође, и неке личне карактеристике ученика као што су истрајност, мотивација, повећано интересовање могу да сугеришу да се ради о високом потенцијалу. У претходном поглављу писали смо доста о карактеристикама математички даровитих ученика које такође могу указати на потенцијалну даровитост.

Специјални математички тестови

Сматра се да би специјални математички тестови требало да испитују вештине математичког мишљења вишег реда и да садрже комплексне математичке проблеме које карактеришу постављање и доказивање хипотеза, прављење генерализација и флексибилност. Навешћемо пример таквог математичког проблема са једног специјалног математичког теста (Nolte, 2024). Задатак је осмишљен тако да представља изазов за ученике млађих разреда основне школе, конкретно узраста 8 година.

Пример. Сузин комшија је сломио ногу па је замолио Сузи да сваког дана шета његовог пса док се он не опорави. Рекао јој је да ће јој плаћати за то и понудио јој је да одабере једну од две опције:

- (1) првог дана платиће јој 1 динар, а сваког наредног дана даваће јој дуго више новца него претходног дана;
- (2) плаћаће јој сваког дана по 100 динара.

Сузин брат мисли да би требало да прихвати другу опцију. Да ли је у праву? Шта ти мислиш? Објасни то.

Примери као што је овај задатак сматрају се веома сложеним за наведени узраст деце. Ученицима пружају могућност да их реше на различите начине, због чега их је теже вредновати. Међутим, њихова вредност огледа се у томе што дају богате информације о математичком потенцијалу ученика. Ученици који уоче да је у првом случају сума новца коју Сузи заради за неколико дана увек за 1 мања од суме која је двоструко већа од оне коју добије текућег дана користе структуру која у великој мери скраћује процес решавања. Овакав приступ решавању датог задатка сугерише постојање изузетних математичких способности. Са друге стране, до ове суме може се доћи и једноставним сабирањем појединачних вредности које је Сузи добила сваког дана. Такође, требало би уочити и извесну некомплетност датог проблема која се огледа у чињеници да решење проблема зависи податка који није експлицитно дат у задатку – број дана. За ученике објашњавање поступка решавања оваквих проблема представља додатни изазов на овом узрасту. Из тих разлога, важно је да наставник разговара са њима о поступку решавања који су применили. Дешава се да ученици осим поступка који су користили и приказали знају да исте задатке реше и на други начин. Све ово имплицира да тестове са оваквим типом задатака није тако лако оценити. Без обзира на то, представљају веома важан алат у идентификационом процесу. Овакви математички проблеми у којима ученици могу да дају претпоставке и тестирају их омогућавају им да заправо користе процесе који су карактеристични за истраживачки рад математичара.

Један од често примењиваних тестова математичких способности је тзв. ТОМАГС тест (*Test of Mathematical Abilitites for Gifted Students* – TOMAGS). ТОМАГС је стандардизован тест који се користи у идентификацији ученика даровитих за математику узраста од 6 до 12 година. Овај тест се базира на процени способности решавања математичких проблема и резоновања. Састоји се од 47 задатака отвореног типа и мери способност ученика да пренесу своје математичко знање у нове и другачије ситуације или да произведу нове стратегије решавања постојећих проблемских ситуација (Özdemir, Işıksal, 2021). Наводимо пример два задатка из овог теста, при чему је превод у примеру 2 усклађен са новчаним јединицама које се користе у нашој земљи.

Пример 1. На линији испод напиши два броја чији је производ једнак 0,5.

Пример 2. Имам укупно 10 новчића. Имам новчиће од 1, 5 и 10 динара. Укупна сума новца који имам је 63 динара.

Број новчића од 10 динара које имам једнак је укупном броју новчића од 1 и 5 динара. Колико имам новчића од 1, 5 и 10 динара?

У нашој земљи стандардизовани тестови математичких способности користе се за селекцију ученика седмих разреда за упис у специјализована одељења математичке гимназије. Када су у питању ученици млађих разреда основне школе, наводимо један тест математичких способности намењен ученицима четвртог разреда основне школе који је креирала А. Михајловић (2006). Тест математичких способности састоји се од 12 задатака који су разврстани у четири категорије на основу тога које компоненте математичких способности доминирају приликом њиховог решавања: 1. задаци који захтевају развијену аритметичко-нумеричку компоненту, 2. задаци који захтевају способност апстракције и генерализације, 3. задаци који захтевају геометријску компоненту математичке способности и 4. задаци који захтевају развијену логичко-комбинаторну компоненту. Задаци нису усмерени на испитивање знања чињеница, већ на способности решавања проблема и расуђивања. Формулисани су тако да поседују и одређену дозу занимљивости чији је циљ да ученика привуче да их решава и испољи своју способност (Михајловић, Дејић, 2014). Укупан број бодова је 24, а по свакој категорији појединачно 6 бодова. На основу бодова остварених на тесту ученици се разврставају на три нивоа: високе математичке способности (од 18 до 24 бода), повишене (од 12 до 17 бодова) и просечне (од 6 до 11 бодова). На крају уџбеника у Апендиксу дат је овај тест математичких способности.

Тестови интелигенције

Тестови интелигенције се често узимају као идентификатор и мера даровитости. Међутим, поставља се питање колико су ови тестови применљиви у предвиђању високих математичких способности. У процесу решавања математичких проблема неопходне су исте когнитивне компоненте које се процењују и на тестовима интелигенције. Већина истраживача је сагласна да су апстрактно и логичко мишљење, способност решавања проблема и способност стицања нових знања базични елементи интелигенције. Сетимо се да су тестови интелигенције дуго времена коришћени као најважнији инструменти мерења даровитости. Тестови интелигенције, када је у питању процена математичких способности, нису тако поуздани јер се њихови резултати односе на скуп више различитих способности и могућности, од којих се само неке повезују са математичком даровитошћу. Рецимо, замислимо два ученика са истим резултатом на тесту интелигенције. Један од њих има бољи резултат у математичким компонентама, а слабији у вербалним, а други обрнуто, бољи резултат у вербалним, а слабији у математичким. Ово сугерише да деца са високим коефицијентом интелигенције не морају обавезно бити и математички даровита. Ипак, истраживања показују да математички даровити

остварују изнадпросечне резултате на тестовима интелигенције (Krüger et al., 2019). Неки аутори указују на још једну „мањкавост” тестова интелигенције (Nolte, 2004), која се односи на превиђање неочекиваних решења у задацима у којима је неопходно наставити неки низ. Гледано из математичке перспективе, низови са истим почетним елементима могу се настављати на различите начине. Са друге стране, креатори тестова обично предвиђају само један начин као коректан.

Успех у математици не зависи само од интелигенције. Високи потенцијал за математику је мултидимензионални конструкт (Nolte, 2024), па се у обзир узимају резултати не само тестова интелигенције, већ и креативности, постигнућа. Ту су и друге битне варијабле попут карактеристика личности, интересовања и мотивације, фактора окружења (Gagne, 2004).

Тестови постигнућа

Тестови постигнућа су углавном усмерени на проверу способности рачунања, те њихове резултате треба прихватати са одређеном резервом. Високо постигнуће може се сматрати само индикацијом високог потенцијала и битно је разликовати ученике са високим постигнућима од оних истински даровитих. Један од најпознатијих тестова постигнућа у математици је тзв. CAT-M (*Scholastic Aptitude Test* – SAT) који се користи у Сједињеним Америчким Државама и намењен је ученицима седмог и осмог разреда. По националној норми, сматра се да ученици који освоје преко 95% укупног броја бодова на овим тестовима могу поседовати високе математичке способности. Такође, ученици млађег узраста (12 и мање година) који остваре добре резултате на овом тесту сматрају се математички даровитим (Stanley, 1988). Ово ипак не значи да међу онима са мање бодова нема стварно даровитих, већ да у идентификовању тих ученика треба узети у обзир и неке друге чињенице. Специјални математички тестови су много кориснији у овом процесу, јер је њихов нагласак на способности математичког мишљења, а не на вештини рачунања.

Математичка такмичења

Математичка такмичења имају важну улогу не само када је у питању образовна подршка даровитим ученицима и њихово мотивисање, већ и у њиховој идентификацији (Bicknell, Riley, 2012; Vulović, Mihajlović, Milikić, 2022). У многим земљама користе се као један аспект идентификационог процеса ученика изузетних математичких способности. Уочено је да је значајан број учесника који су били успешни на математичким такмичења касније стекао статус познатих научника (Kenderov, 2022). Такмичења омогућавају ученицима да испоље своје таленте и високе способности.

Ипак, требало би узети у обзир да не воле сви ученици да се такмиче, а и да постоје они којима не одговарају временска ограничења. Овај други тип даровитих, који преферирају да се проблемом баве дубље и у дужем временском периоду, сугерише да постоји потреба за другачијим типовима такмичења. Таква такмичења би требало да рефлектују праву природу истраживања, да садрже фазе које има истраживачки процес и да омогућавају ученицима да резултате до којих дођу презентују својим вршњацима. Оваква такмичења већ постоје у неким земљама, као што су Немачка и Швајцарска (Омладински изазови – *Jugend Forscht*), Сједињене Америчке Државе (Научни сајмови – *Science Fairs*), Бугарска.

Номинације наставника и чек-листe

Наставници и учитељи углавном немају одговарајуће компетенције да идентификују математички даровите ученике. Обично као даровите препознају оне ученике који постижу одличан успех у математици или брзо и тачно изводе рачунске операције. Међутим, не треба занемарити то да управо наставници и учитељи имају непосредан увид у понашање ученика у учионици. Највећи део наставе математике реализује се путем решавања математичких задатака. Уколико својим ученицима дају одговарајуће математичке задатке који су изазовни и захтевају више нове мишљења, наставници могу проценити њихове математичке потенцијале пажљиво посматрајући њихово понашање док раде на тим задацима (Nolte, Kießwetter, 1996). При томе, од помоћи могу бити чек-листе које садрже индикаторе специфичних вештина мишљења које могу да укажу на постојање изузетних математичких способности (Nolte, 2004).

Дејић и Михајловић (2014: 58–60) дају листу питања и смерница које могу бити од помоћи учитељима и наставницима. Уколико посматрајући ученике у неком дужем временском периоду на већину питања можемо да одговоримо са *да*, постоји могућност да се ради о математичкој даровитости. Наводимо нека од тих питања.

- Да ли је ученик решио задатак на више начина?
- Да ли је употребио ново правило или закон?
- Да ли је увео нове ознаке?
- Да ли је уочио немогуће случајеве?
- Да ли самостално попуњава празнине у знању приликом решавања математичких задатака?
- Тражи ли помоћ приликом решавања задатака?
- Да ли је истрајан у решавању задатака?
- Да ли даје нестандартна решења?

- Примењује ли раније стечена знања, која му помажу да одступи од шаблонског решавања задатака?
- Да ли користи широку лепезу идеја стечених у ранијим решавањима задатака?
- Може ли сам да поставља проблеме?
- Има ли изражену досетљивост приликом решавања задатака?
- Има ли осећај задовољства при решавању тежих задатака?
- Да ли брзо уочава нове односе?
- Уме ли да издвоји битне елементе од небитних у задатку?
- Да ли брзо схвата задатак и поставља план решавања?
- Да ли даје необичне идеје и решења?
- Има ли изражену љубав према решавању тежих и нестандартних задатака?
- Да ли показује отпор према решавању рутинских задатака?

Метељскиј (Метельский, 1989), руски математичар, даје једну једноставну методу за приближну процену математичких способности која полази од претпоставке да је један од кључних показатеља способности за учење математике однос ученика према тешким, нестандартним математичким задацима. По овој методи, ученицима би требало поставити следећа три питања: Волиш ли да решаваш математичке задатке? Тражиш ли помоћ приликом решавања тешких математичких задатака? Ако не успеш да решиш тежак математички задатак данас, да ли се враћаш његовом решавању сутра? Ученици на постављена питања одговарају са *да* и *не*. Одговори се сакупљају или путем анкетног листића или кроз индивидуални разговор са ученицима. Метељскиј, на основу добијених одговора, разликује три нивоа математичких способности ученика, и то: високе математичке способности (уколико су одговори ученика редом на питања *да-не-да*); просечне (уколико су одговори *не-не-не* или *не-да-не*); повећане (сви остали одговори).

* * *

Поставља се питање који систематски и мултидимензионални приступи се могу користити у идентификацији математички даровитих ученика. Прецизно идентификовати математички даровите ученике није једноставан задатак и постоји више начина да се ово уради. Неки уобичајени поступци успешног идентификационог процеса који се углавном спроводе у САД су комбиновани у моделу који ћемо описати у кратким цртама (Дејић, Михајловић, 2003). За сваког потенцијално даровитог

ученика прави се идентификациона чек-листа у коју се затим уписују резултати на тестовима постигнућа, способности, креативности, као и коментари наставника и родитеља. Узима се у обзир и то да ли ученици показују повећано интересовање за математику. Након упоређивања свих ових информација врши се одабир ученика, којима се уз сагласност родитеља даје тест постигнућа са градивом које се изучава у вишим разредима. Ученик је приморан да сам изналази путеве решавања задатака, при томе користећи неке нове стратегије које до тада није учио. Ови тестови због тежине задатака представљају изазов и за најспособније ученике, пружајући могућност за издвајање оних истински даровитих од оних који су једноставно само јако добри у математици. Резултати овог теста се упоређују са идентификационом чек-листом, и у већини случајева могу указати на степен математичке даровитости. Они који освоје преко 74% бодова налазе се међу 1% популације која поседује високе математичке способности. Они са преко 64% освојених бодова се налазе међу 3% популације. Ученици из ове две групе идентификују се као математички даровити.

Наведени модел идентификације је прилично флексибилан у примени како би омогућио да се математички даровитим ученицима пружи свака шанса да буду откривени. Ово може бити нарочито од значаја када се потрага за даровитима врши у мањинској и сиромашнијој популацији. Користи се успешно већ неколико деценија у трагању за математички даровитим ученицима и у остваривању математичких програма у основним и средњим школама у САД.

2.5. РАД СА МАТЕМАТИЧКИ ДАРОВИТИМ УЧЕНИЦИМА

Математичко образовање има за циљ да свим ученицима обезбеди једнаке образовне прилике које ће им омогућити да своје математичке потенцијале развију до максимума. Јасно је да се ученици разликују међусобно у односу на своје математичке потенцијале – развијеност математичких способности, ниво мотивације за учење математике и самопоуздање (Leikin, 2018). Настава би требало да сваког ученика ангажује сразмерно његовим могућностима. Усмеравање даровитих не би смело да се препусти емпатији за њихове индивидуалне особине. Треба дефинисати циљеве и принципе усмеравања којима би се одговорило на специфичне потребе математички даровитих. У обзир се морају узети: разумевање природе математичке даровитости, сазнања о карактеристикама и потребама даровитих и о процесу развоја даровитости и о развоју специфичних компоненти даровитости, сазнања о прикладним и оптималним облицима организованог рада са математички даровитим ученицима.

Школским законима и програмима предвиђена су два основна начина обраћања пажње на даровите ученике: кроз редовну наставу и кроз ваннаставне активности. У оквиру редовне наставе, препоручује се таква организација наставе и рад који ће омогућити ученицима изузетних способности да буду укључени и ангажовани у довољној мери. Ови ученици би требало да добију већу количину информација и знања на вишим нивоима, теже задатке који ће за њих бити изазов. Међу ваннаставним активностима постоје још веће могућности за уважавање способности ученика и њихових предзнања, јер се ради у изабраним групама. Најчешће заступљени облици су додатни рад и слободне активности.

На основу прегледа релевантне литературе могу се издвојити три основна начина рада, односно три организациона облика подршке даровитима: груписање (код неких аутора сегрегација или издвајање), акцелерација (убрзавање) и обогаћивање. Ови облици образовне подршке даровитима увођени су у наш образовни систем од седамдесетих година двадесетог века и заступљени су и у актуелној законској регулативи (Алатарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016).

Груписање

Хомогено груписање (или сегрегација) представља окупљање ученика сличних способности и интересовања на једном месту и у исто време (Kadum, Hozjan, 2015; Максић, 1998), односно подразумева да ученик учи у посебном окружењу у групи ученика који имају једнаке способности (Blanuša, Barzut, 2020). На овај начин омогућава се задовољавање индивидуалних потреба даровитих за истраживањем, откривањем, трагањем (Kadum, Hozjan, 2015). Максић (1998) наводи да се у основној школи груписање може организовати на следеће начине: груписање у облику посебних одељења, програми са узимањем ученика из редовне наставе и кластер груписање по активностима. У старијим разредима основне школе и у средњој школи постоје и додатне могућности као што су специјализоване школе, кластер планирање језгра курса, посебни наградни часови за одличне ученике и семинари. За груписање ученика употребљавају се центри са посебним изворима, специјални часови изван свакодневних школских обавеза, летње институције, летње експедиције итд.

Груписање, односно издвајање даровитих ученика у *поседна одељења* и школе ради задовољења њихових специфичних образовних потреба представља један од првих начина рада са даровитима који се појавио тридесетих година прошлог века у Сједињеним Америчким Државама и Европи. Међутим, већ тада почело се говорити о нежељеним ефектима

издвајања и оправданости оваквог облика рада. Овакве расправе постоје и данас. Добра страна груписања огледа се у томе што издвојене групе даровитих могу обрађивати веће и сложеније садржаје, уз брже прелажење појединих области. Даровити ученици су подстицани у свим предметима у току дана и стимулирани од стране друге деце истог нивоа интелектуалних способности. Са друге стране, као једна од негативних страна, посебним одељењима се замера то да подстичу елитизам, као и да даровите не припремају довољно за стварни живот. Неки истраживачи сматрају да заједничко груписање даровитих штети не само онима који се не налазе у тој скупини, већ и самим даровитима. Ту је и чињеница да групе даровитих нису тако хомогене као што се веровало. У нашој земљи, издвајање даровитих ученика у посебна одељења препознато је у Закону о основама система образовања и васпитања (ЗОСОВ) у члану 6 (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Та законска могућност се по правилу реализује тек на нивоу средњошколског образовања. Ипак, математички даровити ученици старијих разреда основне школе имају могућност издвајања из редовног система и преласка у математичку гимназију (Правилник о наставном плану и програму за ученике 7. и 8. разреда основног образовања и васпитања обдарене за математку, 2019).

Програми узимања ученика из редовне наставе, односно обичног одељења, подразумевају да се даровити ученици окупљају извесно време, у току сваког наставног дана или једним даном недељно. Предност издвајања ученика на цео дан огледа се у могућности континуираног и продубљеног рада на посебном пројекту. Овакви програми захтевају постојање сарадње између наставника редовне наставе и наставника који изводе посебан програм.

Класићер груписање представља груписање даровитих ученика из више одељења истог разреда за обављање неке активности. Обично се користи у мањим школама и срединама у којима није могуће формирати посебна одељења за даровите ученике.

Драшковић (1998) наводи да се хомогено груписање може вршити са ученицима из више одељења или у оквиру једног одељења. Ауторка сматра да се формирање посебних група у оквиру једног одељења углавном примењује у школама и школским регионима у којима постоји мали број ученика високих интелектуалних способности. Када се ови ученици налазе у хетерогеним разредима, наставници мењају постојеће програме, диференцирају их, прилагођавају и мењају у складу са специфичним потребама ученика и тако стварају одговарајуће подстицаје и изазове за њих. Предност оваквог облика организовања састоји се у томе што се изабрана група ученика налази у истом разреду са својим вршњацима,

учествује у свим наставним и другим активностима и може да изазове и подстакне такмичење међу свим члановима разреда. Такође, број даровитих ученика није толико велики да би могао да изазове фрустрације међу осталом децом у разреду.

Акцелерација

Акцелерација (убрзавање) представља један од уобичајених начина рада са даровитим ученицима. Под акцелерацијом (Драшковић, 1998) подразумевају се различити наставни и административни поступци и процедуре који омогућавају брже напредовање ученика, завршавање предвиђених програма за краће време или на ранијем узрасту него што је то предвиђено. Овај начин рада омогућава даровитим ученицима да иду кроз школу или програмске садржаје темпом који им одговара. Онда када поседују већа знања, када већ знају то што би требало да уче кроз редовно школовање са својим вршњацима, уместо да се досађују и губе време, омогућава им се да за краће време од предвиђеног заврше основну или средњу школу, па и да се нешто раније упишу на студије.

Може се остварити ранијим уласком у одређену школу (или вртић), паралелним похађањем две школе или два нивоа школовања, компактирањем курикулума (изостављањем делова градива које је ученик већ савладао), убрзавањем у појединим предметима, телескопирањем (убрзано излагање делова градива), прескакањем разреда, организовањем посебних курсева на којима се брже и раније савладава одређена наставна материја или тако што ће делови програма из средње школе бити савладани у основној школи, организовањем напредних летњих програма (Blanuša, Barzut, 2020; Максић, 1998). За ранији полазак у школу или вртић неопходно је извршити процену степена у којем је дете испред својих вршњака, одредити број области у којима показује напредније постигнуће и испитати његово мишљење о себи. Прескакање разреда подразумева да се ученици пребацују у виши разред од оног у коме би требало да буду на основу свог календарског узраста. Овај вид акцелерације може да задовољи потребе изузетно даровитих ученика који су значајно испред својих вршњака. Убрзавање у појединим предметима или делимично прескакање разреда се односи на то да ученици један део дана проводе у старијим разредима слушајући наставу једног или више предмета. Примењује се онда када су ученици испред својих вршњака у неким областима. Телескопирање подразумева скраћивање времена потребног за савладавање предвиђеног програма. Даровитим ученицима није потребан исти интензитет утврђивања и понављања градива као њиховим вршњацима, па

програм могу прећи у краћем времену. Телескопирање омогућава ученику да напредује својим темпом, те је могуће градиво које је предвиђено за једну школску годину урадити за пола године. На средњошколском нивоу даровитим ученицима се омогућава да неке курсеве (предмете) похађају на вишем (нпр. на факултету, колеџу), а неке на нижем нивоу школовања.

Међутим, без обзира на то што омогућава да се уштеди време када је у питању непотребно понављање градива, акцелерација сама по себи не подразумева да се врши продубљивање садржаја у односу на предвиђени наставни програм, што је обично оно што је потребно даровитим ученицима. Такође, пребацивање деце из једног одељења у друго, из једног разреда у други наишло је на озбиљне и аргументоване критике. Поједина истраживања указују да у неким случајевима акцелерација може имати негативне социјалне и емотивне ефекте на даровите. Даровита деца издвајају се из групе својих вршњака и придружују се групама знатно старије деце. Овакво пребацивање требало би да елиминише непотребно понављање већ познатог градива, и да дозволи ученику да се укључи у процес учења од нивоа на коме се налази без обзира на његове вршњаке. Проблем је то што се након придруживања старијој групи ученика може појавити отежана адаптација. Нека даровита деца се тешко сналазе у новим групама, не налазе праве другове који су им потребни ради нормалног социјалног развоја, неретко постају предмет подсмеха због својих физичких и других карактеристика (мањи растом, слабији, мање спретни итд.).

Без обзира на наведене негативне ефекте, за већину даровите деце акцелерација није повезана са негативним последицама, па се препоручује као једна од најефективнијих образовних интервенција (Rogers, 2015). Убрзано школовање је оправдано у пажљиво проученим индивидуалним случајевима. Онда када је ученик већ значајно испред својих вршњака по знањима, а уз то и социјално зрео и емоционално стабилан, акцелерација ће имати више позитивних него негативних последица због премештања и удаљавања даровитог ученика од његових вршњака. Сматра се да акцелерација има предности за изузетно даровите ученике, а да њен степен, односно мера у којој се примењује, треба да буде у складу са потребама индивидуалног ученика (Wu, 2013). Највише користи од прескакања једног или два разреда имају умерено даровити ученици (Kadum, Hozjan, 2015), док је за ученике који су пет или шест година испред својих вршњака неопходно да тај „скок“ буде већи (Jung, Gross, 2015). Студије указују да даровита деца која су прескочила два или више разреда остварују веће академско постигнуће од својих вршњака, показују већу мотивацију, успешни су у социјализацији и не испољавају емоционалну неприлагођеност (Blanuša, Barzut, 2020).

Акцелерација је једно време била веома популарна мера – у нашој земљи седамдесетих година прошлог века, а у неким другим земљама, попут Сједињених Америчких Држава, честа је и данас. Наша законска регулатива дозвољава следеће облике акцелерације за даровите ученике: ранији полазак у основну и средњу школу (ЗОСОВ, члан 18; ЗООВ, члан 55; ЗСОВ, члан 33), завршавање школовања у року краћем од предвиђеног тако што се у току једне школске године заврше два разреда (ЗООВ, члан 67; ЗСОВ, члан 51), паралелно похађање две средње школе (ЗСОВ, члан 42). Док амерички модели промовишу акцелерацију као примарни модел подршке даровитима након идентификације, у неким скандинавским земљама и Јапану акцелерација се или примењује у малој мери или не примењује уопште. У Кини се акцелерација примењује, али само ако је пропраћена обогаћивањем. У Француској се примењује тзв. усмерена акцелерација. Темпо предавања је прилагођен ритму децјег развоја, уз уважавање несклада који се често јавља између емоционалног, мотивационог и интелектуалног развоја код даровитих. У Швајцарској се користи „извесна” акцелерација која представља убрзавање раније сазрелих ученика који су по својим способностима испред својих вршњака. Убрзавање се ради у оквиру предмета који се уче у мешовитим одељењима (деца различитих способности). Сви ученици могу да почну са учењем од нивоа на коме су и да уче темпом који им одговара.

Обогаћивање

Обогаћивање подразумева додатно ангажовање ученика у редовној настави и ван ње (Максић, 1998). Основна карактеристика овог облика је да се ученици не издвајају из редовне школске средине и групе којој припадају већ им се дају додатни наставни садржаји, активности и поступци са циљем проширења основа знања, продубљивања разумевања, повећања нивоа вештина, развијања пожељних метода учења и мишљења, развијања љубави према учењу, подстицања иницијативе и развијања креативности (Драшковић, 1998: 57). Дакле, обогаћивање подразумева да даровити ученици уче по посебном проширеном програму који би требало да обезбеди додатна, сложенија, когнитивно провокативнија образовна искуства (Babić-Kekez, Farbaš, 2019). Код обогаћивања приступ садржајима је дубљи, индивидуално је вођен, интерактиван је и често се врши повезивање са другим предметним подручјима (Kadum, 2013). Б. Драшковић (1998) наводи следеће опште циљеве обогаћивања: проширење основа знања; продубљивање разумевања; повећање степена вештине; развијање љубави према учењу; развијање пожељне методе учења и мишљења; подстицање иницијативе; развијање креативности.

У оквиру редовне наставе, обично се врши диференцијација обавезних програма и индивидуализација учења са циљем да се обезбеде шири и сложенији садржаји на одговарајућем и вишем нивоу. У складу са тим, доминантни оквир за подстицање даровитих ученика, или изузетних ученика по нашој законској регулативи, јесте концепт индивидуалног образовног плана (тзв. ИОП). Индивидуални образовни план представља документ којим се планира и према ком се спроводи додатна подршка у образовању и васпитању детета, који у случају ученика са изузетним способностима подразумева „обогаћен и проширен програм” школовања (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Изван редовне наставе даровитима се најчешће нуде могућности као што су додатни рад, слободне активности (нпр. рад у секцијама), учешће на такмичењима, рад са ментором, самостални рад, истраживачке станице итд. Приликом обогаћивања програма требало би водити рачуна да садржаји буду шири од оних датих у програму наставе и учења, да циљеви и садржаји којима се обогаћује програм имају висок ниво сложености и да предвиђене методе наставе и учења буду релевантне. Наставу би требало организовати тако да ученицима пружи могућност да примењују методе учења попут решавања проблема, израде пројеката, истраживања, кооперативног учења итд. Садржаји којима се обогаћује програм требало би да буду довољно изазовни и разноврсни како би подстакли ангажовање виших мисаоних процеса. Акценат би требало ставити на стицање темељних, а не чињеничних знања, односно на квалитативни развој способности мишљења, а не квантитативно акумулирање чињеница (George, 2005). Темпо рада би требало да буде флексибилан и да одговара брзини напредовања сваког даровитог ученика. Садржаји би, такође, требало да буду примерени интересовањима ученика како би подстакли њихову мотивацију за рад и даљи развој њихових потенцијала. Уколико се са ученицима ради у оквиру редовне наставе, требало би им омогућити индивидуалан рад или рад у групи на задацима и пројектима уз стручно вођење учитеља и наставника. Учитељи и наставници би требало да користе интердисциплинарни приступ настави који се темељи на интеграцији проблема различитих поља науке. На тај начин подстицаће се жеља даровитих ученика за проширивањем и продубљивањем знања, и развијаће способности да реагују на различите појаве.

Обогаћивање у оквиру рејуларној програма, односно редовне наставе и одељења основне школе, може се реализовати као: извођење самосталне студије, могућност брзог прелажења и проверавања наставних јединица, примена мисаоних процеса вишег нивоа, ангажовање гостујућих предавача, рад уз помоћ ментора и коришћење материјала на вишем нивоу (нпр. напреднијих ученика) (Kitano, Kirby, 1986; Maksić, 1998). Да би

ученици успешно извели *самосталну студију*, односно самостални истраживачки пројекат, неопходно је да пре тога успешно савладају вештине коришћења библиотеке и неке истраживачке методе. Наставници су ти који помажу ученицима у планирању и све време надгледају њихов рад. *Брже њрелажење насјавних јединица и њроверавање делова ѡрадива* пружа ученицима могућност да се ангажују у учењу новог градива и да избегну понављање наученог, а самим тим и досаду. Давањем већег броја активности за одређене делове наставног програма ученицима се омогућава да учествују на оном нивоу који одговара њиховим интелектуалним способностима – ученици који поседују више способности имају могућност да примене *мисаоне ѡроцесе вишеѡ рега*. Позивање *ѡсѡујућеѡ ѡрегавача* представља одлично решење када су у питању садржаји и теме за које наставник није довољно стручан или није упознат са најновијим информацијама. *Менѡор* представља стручњака који се сусреће са учеником, ради дискусије и рада у области заједничког интересовања. Ментор може и да укључи ученика у неке стручне активности у датој области. Када је у питању *креирање и коришћење маѡеријала на вишем нивоу* требало би да постоји сарадња између наставника који изводе наставу на различитим нивоима школовања. Само тако ће употреба овог материјала имати смила и избећи ће се непотребна понављања.

Када је у питању рад са даровитим ученицима ван редовне наставе, *догаѡни рад* представља један од најзаступљенијих облика рада у нашим школама. Реализација додатне наставе предвиђена је и законском регулативом у основним и средњим школама (ЗООВ, члан 32; ЗСОВ, члан 31). Учитељи и наставници часове додатне наставе углавном користе за припрему ученика за учешће на разним математичким такмичењима и смотрама, али ни у ком случају не би требало да се сведе само на то. Такмичење је само један од могућих начина испољавања и потврђивања даровитости. Такође, постоје и деца која немају такмичарске аспирације без обзира на способности које имају, али би се радо укључила у додатни рад. Садржаји додатног рада полазе од редовног плана и програма, али се према интересовањима и потребама ученика проширују, продубљују и допуњују садржајима одређених наука. Према школским прописима, додатним радом би требало обухватити ученике који постижу изузетне резултате у савладавању садржаја програма, показују интересовање за проширивање и продубљивање знања и вештина и даровити су за одређене области и предмете. Основни циљ додатног рада јесте да омогући одабраним и даровитим ученицима да прошире и продубе своја знања и вештине из неких наставних области и предмета у складу са својим способностима, интересовањима, као и да подстиче ученике на самосталан рад, развој логичког, стваралачког и критичког мишљења.

Слободне активности такође представљају важан облик рада са математички даровитим ученицима и предвиђене су одговарајућим законима (ЗООВ, члан 42; ЗСОВ, члан 14). Имају другачију концепцију од додатног рада и представљају ваннаставни, факултативни облик рада, а ученици их похађају по сопственом избору. Циљеви организовања и извођења слободних активности су у школској регулативи одређени као: стицање, проширивање и продубљивање нових знања и вештина у складу са интересовањима ученика; задовољавање специфичних интересовања ученика, уз активно усмеравање њихових склоности, способности, исказаног интересовања и подстицање професионалног развоја; мотивисање и оспособљавање ученика за самосталан и креативан рад; омогућавање ученицима да, као облик забаве и рекреације, самостално користе слободно време и организују духовни, културни и друштвени живот у средишњици у којој живе и раде.

Зависно од могућности, слободне активности се могу организовати у виду рада у секцијама (клубовима), часова занимљиве математике, математичког кутића, математичких вечери, конкурса, олимпијада, математичких квизова, екскурзија итд.

Кадум (2013) разликује обогаћивање и проширивање наставних програма. Обогаћивање наставних програма представља хоризонтално прилагођавање унутар целокупног курикулума. Односи се на врсту учења које је изван основног програма, тј. означава додатак општем курикулуму, али га не мења. Може се реализовати са групом ученика који раде заједно на неком додатном садржају унутар курикулума. Проширивање наставног програма подразумева вертикално прилагођавање које ученицима омогућава брже напредовање кроз курикулум. Врши се обогаћивање садржаја општег курикулума тако да постану комплекснији, што омогућава ученицима дубље упознавање појединих садржаја док напредују сопственим темпом. Проширивање може садржати и акцелерацију, рецимо када ученици имају могућност да прескоче неке делове градива.

Предност обогаћивања као начина рада са даровитима огледа се у његовој инклузивности. Ученици су део хетерогене групе, односно одељења, а обогаћивање се или реализује у склопу редовне наставе или преко ваннаставних активности. Мада постоје истраживања која показују да постоји висока прихваћеност даровитих ученика у друштву просечних ученика, постоје и она која имплицирају да интелектуално даровити због свог напредног когнитивног развоја имају потешкоће у проналажењу пријатеља, постају жртве негативних ставова и стереотипа других ученика, што се може одразити на њихово самопоштовање и мотивацију (Erdeš Babić, Miroslavić, 2021). Као још једна од слабости обогаћивања истиче

се да се учитељи и наставници најчешће одлучују за његову реализацију у склопу редовне наставе применом диференцијације и индивидуализације, али је углавном своде на давање веће количине садржаја која има сврху да попуни време на часу и окупира даровите ученике док они раде са осталим ученицима.

* * *

Данас се више не врши строго раздвајање ова три начина рада. Постоје значајне сличности и преклапања када је у питању њихово функционисање. Приметна је тенденција да сви именовани облици, методе и садржаји треба да представљају интегрални део укупне образовне понуде школе и њеног непосредног окружења.

РАЗВИЈАЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ДАРОВИТОСТИ У РЕДОВНОЈ НАСТАВИ

Даровити ученици који се школују у редовним школама као најчешће замерке истичу незадовољство градивом које уче, начином рада на часу, могућностима да следе своја интересовања, недостатком прилика за експериментисање и самостално истраживање, односом са наставницима и вршњацима, недовољном понудом додатних ваннаставних активности (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016; Jin, Moon, 2006). Редовна настава се види као недовољно изазовна, нуди већ познате садржаје и не захтева интелектуално напрезање. Бројна истраживања показују да школовање интелектуално даровитих карактерише искуство учења „нечега што се већ зна, непотребног понављања већ утврђених, аутоматизованих знања и вештина, што, природно, води појави досаде, незаинтересованости, искључивања из активности, апатичности, па и конфликтима с наставницима или другим актерима образовног процеса“ (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016: 43–44). Уколико током дужег временског периода настава не обезбеђује довољно изазова за ученике, постоји опасност да ће постићи много мање него што могу. Даровите ученике би требало стављати у ситуације да истражују, откривају, решавају проблеме. Дјуи истиче „да је свако мишљење истраживање, а свако истраживање лично постигнуће онога који га спроводи, чак и онда када је оно што проучавамо и тражимо већ познато осталима“ (према Ђорђевић, Ђорђевић, 2016: 225). У настави је далеко битније научити ученике да мисле, расуђују, закључују него им саопштавати готова знања. Виготски наводи да наставници греше мислећи да је неопходно максимално поједноставити градиво и користити у што већој мери очигледност (Исто: 226). Мишљење се јавља када постоје извесне потешкоће, па је потребно стварати

такве ситуације за ученике на часовима. Међутим, неће у свакој наставној ситуацији доћи до жељених активности и мисаоних процеса. Истраживања указују да је сазнајна активност ученика приликом решавања задатака истраживачког и проблемског типа знатно интензивнија него када се решавају стандардизовани задаци по неком раније наученом шаблону или поступку.

Све ово упућује да је у оквиру редовне наставе неопходно тако организовати процес наставе и учења да се ученицима са изузетним способностима омогући да буду укључени и ангажовани у довољној мери (Дејић, Михајловић, 2014). У ове сврхе планира се извођење и коришћење диференциране, индивидуализоване, проблемске и пројектне наставе¹.

Проблемска настава

Проблемска настава спада у наставне системе чији је примарни задатак развијање мишљења код ученика. Акценат се ставља на умни рад кроз постављање проблема и његово решавање. Стевановић (2003) проблемску наставу дефинише као веома комплексан ментални процес у коме учествују сви мисаони процеси у различитим комбинацијама, па ученици знања стичу на креативан начин. Основне дидактичке одреднице проблемске наставе јесу *проблем* и *проблемска ситуација*. Говорећи о одређењу појма *проблем*, Стевановић (1979) истиче да је неопходно да га карактеришу тешкоће, јер уколико се до циља може стићи лако, онда то није проблем. Дејић, Егерић и Михајловић (2022) наводе да се проблем јавља када појединац наиђе на одређену тешкоћу или препреку у постизању својих циљева. Ученик не може да реши постављени проблем на уобичајен начин, већ је принуђен да тражи неки нови пут решавања. Како би се ученици заинтересовали, мисаоно активирали и укључили у решавање проблема, наставник би претходно требало да осмисли и постави проблем, и да га самом формулацијом приближи сазнајним могућностима ученика (Гвозденовић, 2011). Ученике би требало довести у стање упитаности, неизвесности, збуњености, радозналости, очекивања, тензије, сазнајне потешкоће и потребе да оно наизглед нејасно учине за себе јасним. Другим речима, требало би створити одговарајућу проблемску ситуацију. Сматра се да је проблемска ситуација једна од најважнијих карика проблемске наставе и да је мисаоно активирање ученика важна претпоставка за њихово активно учешће у решавању проблема. Она настаје из извесне противуречности која је садржана у проблему и код

¹ О пројектној настави биће више речи у поглављу о развијању и подстицању креативности.

ученика побуђује жељу и интересовање да се разреши (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). Проблемску ситуацију чине три компоненте: непознато знање или начин решавања; сазнајна потреба која побуђује мисаону активност и интелектуалне могућности, укључујући стваралачке способности и претходно искуство (Мартиновић, 2019). Можемо констатовати да проблемска ситуација има у себи не само предметно-садржинску, већ и мотивациону компоненту. Ученик је у ситуацији да треба да открива нова, до тог тренутка непозната знања и начине деловања, а излаз јесте – успешно решење проблема. Математика, због природе својих садржаја и грађе, садржи мноштво проблема које ученици могу проучавати и решавати и на тај начин увећати свој фонд знања и примењивати научни начин мишљења. Већина математичких садржаја носи у себи основу неког проблема, што пружа наставнику могућност да, и при обради новог и при утврђивању претходно ученог градива, осмисли и створи одговарајућу проблемску ситуацију и пред ученике стави неки проблем.

Решавање проблема представља низ сложених интелектуалних активности (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). Током решавања проблема мисаоне процесе карактеришу четири етапе (Марковић, 2006):

- 1) упознавање проблема: ученик се упознаје са елементима проблема, настоји да схвати и разуме њихове међусобне везе и односе;
- 2) сужавање – реформулација проблема: на основу анализе онога што је дато, ученик увиђа шта недостаје, у чему је празнина, шта је спорно, у чему је тешкоћа и тражи начин решавања;
- 3) постављање хипотезе: на основу сагледавања и локализовања тешкоће ученик поставља хипотезу за решење проблема;
- 4) проверавање хипотезе – ученик проверава хипотезу, односно решење, потврђивањем хипотезе „затвара” се празнина која је постојала у датим подацима.

Веома је битно да учитељ, односно наставник, не намеће ученику свој пут решавања проблема. Ученику би требало омогућити, уз минималну помоћ, да сам открива. Поступак решавања проблема представља процес учења.

У раду са даровитим ученицима требало би им омогућити не само да самостално решавају математичке проблеме, већ и да на основу створене проблемске ситуације самостално формулишу проблеме. После трагања за решењем и предлагања нађеног решења врши се дискусија у којој учествује и наставник, сучељавају се аргументи и врше анализе.

Организација часа проблемске наставе разликује се од традиционално организоване наставе математике. Припремање ученика за рад,

изазивање радозналости, побуђивање интересовања врши се у фази стварања проблемске ситуације. Учење новог градива везује се за фазе формулисања проблема, постављања хипотеза и решавања проблема. Понављање, вежбање, проверавање градива може се јавити у свим фазама часа проблемске наставе. Структура часа одговара логици научног истраживања, односно има фазе кроз које пролази процес стицања знања (Арсих, 2000). Дејић, Егерић и Михајловић (2022: 326) наводе да би, са више или мање модификација, час проблемске наставе требало да има следеће фазе:

- 1) стварање проблемске ситуације
- 2) формулисање проблема
- 3) декомпозиција проблема
- 4) решавање проблема
- 5) анализа резултата, извођење закључака и генерализација
- 6) практична примена нових знања у решавању посебно изабраних задатака.²

Не мора целокупан час да буде посвећен решавању проблема, већ се проблемски начин рада и мишљења може користити у појединим фазама класичне наставе.

Диференцирана настава

Диференцијација се може схватити као принцип организације наставе и школског учења по коме се налаже да се са различитим ученицима ради различито (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Ово значи да уколико у одељењу има даровитих ученика требало би посегнути за одговарајућим видовима обогаћивања, груписања и убрзавања и применити их у редовној настави.

Свако дете је индивидуа за себе, са својим способностима, интересовањима, личним особинама. У настави математике, као и у настави других предмета, требало би обезбедити такве услове рада који ће допринети максималном мисаоном ангажовању ученика, уз уважавање његових индивидуалних могућности као што су способност посматрања, запажања, расуђивања, закључивања, темпо и начин учења, брзина и трајност памћења, развој мисаоних способности, темперамент, мотивисаност,

² Видети детаљније у Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2022). *Методика математике у разредној настави*. Јагодина: Факултет педагошких наука, стр. 323–331.

емотивна сфера (Симић, Милинковић, 2022). То се може постићи само уколико се сваком ученику омогући да напредује и развија се у складу са својим способностима, што у великој мери обезбеђује диференцирана настава. Суштина диференциране наставе је управо у схватању да се ученици у образовном смислу веома разликују и намери да се ове разлике уваже у процесу наставе и учења (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Дејић, Егерић и Михајловић (2022: 337) истичу да „диференцирана настава подразумева организациона и методичка настојања да се уваже разлике међу ученицима и на основу тих разлика изврши груписање ученика по неким сличним особинама”. Вилотијевић и Вилотијевић (2016: 53) под диференцијацијом наставе подразумевају класификовање ученика по неким њиховим сличним или идентичним обележјима као што су способности, претходна знања, темпо учења, искуство, интересовања, ставови према учењу и спремност за учење.

Диференцијацији су доступни сви аспекти наставе, што значи да се могу диференцирати садржаји, процеси и продукти учења (Stepanek, 1999). Ово значи да је могуће диференцирати шта ученици уче, начин на који то уче, односно како их наставници подучавају (укључујући и брзину учења), као и начин на који треба да покажу да су нешто научили, на основу чега се врши процена њиховог знања (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Диференцирана настава је свеобухватан приступ настави који води наставнике у свим аспектима њиховог рада. Примењивати диференцијацију не значи само давати даровитим ученицима додатне садржаје како би се испунило време или захтевати више приликом оцењивања (Stepanek, 1999). Диференцијација је континуиран процес учења о ученицима, њиховим потребама и интересовањима и коришћење тог знања да се припрема и води настава. На основу тих сазнања наставници одређују како ће неки садржај бити презентован, које наставне активности су одговарајуће и како водити ученике да покажу шта су научили.

Диференцијација или прилагођавање садржаја је један од начина да се за даровите ученике обезбеди подстицајно и изазовно окружење за учење. У математици то може значити да се ученицима омогућава да уче напредније садржаје на нижим нивоима школовања. Садржаје би требало организовати по главним наставним темама и кључним идејама, а фокус не сме бити на рачунању, памћењу чињеница и правила. Требало би повећати степен апстракције и комплексности садржаја (Maker, Nielsen, 1996). Такође, требало би омогућити разноликост садржаја кроз коришћење нових и другачијих материјала (напредније збирке, математички часописи, наставна средства итд.) и рад на темама које нису део регуларних програмских садржаја. Ученици могу радити на пројектима у којима истражују историју неке математичке идеје, појма или правила.

Даровити ученици старијих разреда могу се упознати и са неким гранама математике које се не изучавају на том нивоу школовања. Наставницима од нарочите помоћи приликом дизајнирања садржаја за математички даровите ученике може бити Блумова таксономија образовних циљева (Bloom, 1981). У оквиру когнитивног подручја које обухвата знања и развој интелектуалних вештина циљеви су подељени у шест нивоа: памћење, разумевање, примена, анализа, синтеза и вредновање. Последња три нивоа су најпогоднија када је у питању рад са математички даровитим ученицима. Наставницима омогућавају да идентификују одговарајуће начине рада ученика са садржајима на напреднији и изазовнији начин (Stepanek, 1999). Анализа се односи на коришћење садржаја за истраживање, упоређивање, уочавање сличности и разлика, класификацију, општавање чињеница и идеја. Синтеза захтева од ученика да користе идеје и знања за креирање (за њих) оригиналних радова, да проналазе, дизајнирају, планирају, да дају претпоставке о некој математичкој идеји или правилу. Вредновање захтева од ученика да интерпретирају, верификују, критикују, бране и процењују идеје и информације.

Сажимање програмских садржаја је још једна могућност диференцирања садржаја. Овај поступак захтева да се најпре провери да ли даровити ученици већ поседују одговарајућа знања и вештине. Уколико је одговор потврдан, онда нема потребе да их изучавају од почетка и на исти начин као остали ученици, већ се за њих осмишљавају и припремају неке друге активности. Једна од добрих стратегија, нарочито у настави математике, јесте „најтеже прво” (Winebrenner, 1992). Ова стратегија претпоставља да се даровитим ученицима омогућава да, уместо да раде редом задатке као остали ученици, одмах раде пет најтежих математичких задатака. Уколико их успешно ураде, онда након тога или сами бирају активност по жељи или им је даје наставник.

Диференцијација процеса се односи на различите начине организације рада ученика, од самосталног рада, преко рада у мањим до рада у већим групама. Учешће ученика у одлучивању о наведеним облицима рада је веома битно те би им, ако узраст то допушта, требало пружити могућност избора. Основни циљ је да ученици раде у складу са својим преференцијама, односно да бирају темпо рада, ниво интеракције са осталим ученицима.

Самосталност се често наводи као једна од карактеристика даровитих. Међутим, то не значи да сви даровити ученици имају развијене вештине за саморегулисано учење. Ученицима треба обезбедити ситуације у којима ће имати прилику да преузму одговорност за своје учење, а наставник треба да води ученике постепено ка осамостаљивању. Саморегулисано

учење не значи да ученици раде потпуно у изолацији, већ да су способни да донесу одлуке засноване на сопственом знању, преузму одговорност за свој рад, да могу да траже, формулишу проблеме и одреде одговарајући начин за њихово решавање и евалуирају сопствени рад (Stepanek, 1999).

Диференцирање наставе може се вршити и у области вредновања знања (диференцијација продуката). Један од начина може бити да ученику пружимо прилику да у складу са својим преференцијама одабере да ли ће бити усмено или писмено испитиван. Међутим, ово се може односити и на то да је продукт помоћу ког ученик демонстрира овладаност знањима и вештинама усклађен са његовим посебним способностима и стиливима учења. Продукти који од ученика захтевају да прошире своја знања и способности пружају аутентична искуства учења, те самим тим дају смисла процесу вредновања.

Као што смо већ напоменули, диференцијација не представља посебну, додатну меру образовања даровитих, већ саставни део планирања наставе и часа који је могуће реализовати кроз различите типове обогаћивања, убрзавања и груписања на часовима редовне наставе. У нашим школама и редовној настави најчешће се примењује унутрашња диференцијација, и то садржајна (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022)³. Ово је условљено чињеницом да су одељења састављена од ученика свих способности, просечних, исподпросечних и даровитих. Садржајна диференцијација подразумева да циљеви наставе математике не подлежу диференцијацији, али подлежу обим, дубина, степен сложености, тежине и апстрактности наставног садржаја, као и темпо и начини његовог усвајања. Углавном се користи тзв. *флексибилно груписање*, које подразумева да ученици истог или сличног нивоа компетенција, профила интересовања или стила учења добијају исте или сличне активности/задатке. Ученици се могу упутити на самосталан рад или рад у групи (уколико има више ученика изузетних способности). Флексибилно груписање не подразумева да је ученик трајно разврстан у одређену групу према нивоу способности. Треба имати на уму да се може десити да поједини ученици не буду одмах препознати као даровити, већ да своје способности испољавају касније.

Диференцијација представља важан механизам за реализацију инклузивног образовања даровитих ученика. Међутим, без обзира на позитивне ефекте диференциране наставе када је у питању академски напредак и задовољство ученика, она се недовољно примењује у раду са даровитим ученицима. Алтарас Димитријевић и Татић Јаневски (2016) наводе

³ Видети детаљније у Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2022). *Методика математике у разредној настави*. Јагодина: Факултет педагошких наука, стр. 337–349.

да чак и наставници који имају искуство са подучавањем даровитих ученика избегавају одређене диференциране стратегије као што су сажимање програма, односно избацивање градива којим је ученик већ овладао, и обогаћивање увођењем садржаја који излазе ван оквира уџбеника. Један од разлога недовољне примене диференцијације јесте чињеница да је овај вид наставе веома захтеван и да подразумева да наставници имају одговарајуће компетенције и да су спремни да се у већој мери ангажују. Наставник мора, пре свега, добро да познаје област коју подучава (стручне компетенције), мора редовно да врши процену предзнања, способности, интересовања и других одлика ученика (дијагностичке компетенције). Осим тога, мора да познаје различите методе, начине и стратегије наставног рада како би ученицима приближио одговарајуће садржаје и проверио у којој мери су овладали њима (дидактичке компетенције), као и да наставу организује тако да различити ученици раде различите ствари у истом тренутку (компетенције управљања одељењем).

Индивидуализована настава

Чињеница је да у једном истом одељењу не постоје два ученика која уче на исти начин, истом брзином и ефикасношћу (Поровић, 2005). Дешава се да разлике у менталним способностима између појединих ученика износе и по неколико година (Квашчев, Милинковић, 1984). Чак и када је у питању група ученика изузетних способности, постоје велике разлике у предзнањима, могућностима, потребама и интересовањима. Квашчев (1981) је, у свом истраживању, утврдио да се разлике у степену развијености појединих способности ученика са истим количником интелигенције крећу у распону од 4 до 6 година. Наведене индивидуалне разлике међу ученицима истог календарског узраста захтевају индивидуализовани приступ у процесу стицања знања и развијања способности, а нарочито када су у питању даровити ученици (Арсих, Вучинић, 2013).

Индивидуализована настава представља наставни систем у ком се наставни захтеви усклађују са индивидуалним карактеристикама и могућностима ученика. Примењује се када је наставни рад прилагођен појединим ученицима или када се користи облик рада тако да одговара потребама, могућностима, начину мишљења, жељама и интересовањима појединаца који у њему учествују (Ђорђевић, Ђорђевић, 2016). Индивидуализована настава има за циљ „да ученике усмери и активира према њиховим способностима и могућностима, као и да подстакне и усмери развијање њихових способности у односу на облике, ритам и сопствене снаге и оригиналности” (Исто: 201). На тај начин лична активност и

залагање ученика могу да дођу до пуног изражаја. О успешности индивидуализације можемо говорити када омогућава ученицима да својим радом и сопственом активношћу успеју да задовоље одговарајуће когнитивне и радне потребе и развију способности.

Организује се на начин да ученици самостално решавају задатке, и то не само из оних области које познају, већ тако да уче ново, али под руководством наставника. Наставник од ученика који поседују високе способности тражи више него од осталих, с тим што су тежина и темпо учења усклађени са могућностима појединаца. Сваки ученик учи за себе, не размењују међусобно информације. Циљ сваког наставника треба да буде да из сваког ученика извуче његов максимум. При томе, требало би се водити стварним могућностима сваког појединачног ученика, а не својствима која су претпостављена за просечног ученика одређеног узраста.

Индивидуализована настава подразумева разноврсност прилаза у наставном процесу и различит приступ у избору материјала који одговарају појединим ученицима или групи (Арсић, Вучинић, 2013). Поповић (2010) истиче да наставник може да индивидуализује три аспекта курикулума: (1) програмске садржаје; (2) процес и (3) продукт. Даровити ученици имају константну потребу за добијањем информација и за стицањем ширих и дубљих знања у областима које их интересују. Ово им се може омогућити коришћењем комплекснијих математичких садржаја и материјала на вишем нивоу апстракције, радом на истраживачким пројектима индивидуалног или групног карактера (у овом случају ученик може добити посебан задатак у оквиру групе), прескакањем градива које је ученик већ савладао, избегавањем непотребног понављања и утврђивања итд. Циљеви су исти, али се разликују обим, дубина и ширина. Такође, не врши се мењање утврђених образовних стандарда, односно компетенција које ученик треба да има на крају одговарајућег нивоа и циклуса образовања. Индивидуализација процеса односи се на различите сегменте наставе који ученику помажу да самостално дође до разумевања подучаваних идеја и вештина и које наставник може обликовати како би ученицима омогућио да напредују у складу са сопственим темпом и когнитивном спремношћу. Ово се односи на одабране методе и облике рада, активности, проверавање, оцењивање итд. Продукти представљају све оне резултате који омогућавају ученицима да демонстрирају оно што су научили (нпр. то може бити завршни продукт неког ученичког пројекта).

Наставници би требало да стварају такве услове и окружење за учење у ком ће даровити моћи да открију, ослободе и развију потенцијалне способности (Ђорђевић, 1997). Управо ово и јесте највиши циљ који би требало постићи индивидуализованом наставом (Исто: 395). За успешну

реализацију индивидуализоване наставе са даровитим ученицима неопходно је обезбедити стручан, педагошко-психолошки и дидактичко-методички оспособљен наставни кадар и створити одговарајуће материјално-техничке услове (припремљени материјали за самосталан рад, савремена наставна средства, школска библиотека са одговарајућим фондом уџбеничке и приручничке литературе, функционалне наставне просторије и слично). Ипак, кључни и најбитнији фактор јесте наставник. Он мора добро познавати своје ученике, наставне садржаје, наставне методе и стратегије, технике и поступке идентификације даровитих и начине праћења и вредновања њиховог рада (Арсић, Вучинић, 2013).

Поједини аутори поистовећују појам диференцијације и индивидуализације. Међутим, у њиховом значењу постоје разлике. Диференцијација, како је било речи у претходном поглављу, значи да настава уопштено излази у сусрет разликама између ученика. Са друге стране, индивидуализација подразумева прилагођавање наставе профилу појединачног ученика (Алтарас Димитријевић, Татић Јаневски, 2016). Ипак, у наставној пракси диференцијација и индивидуализација су готово нераздвојиве. Ако узмемо у обзир да је проценат ученика са изузетним способностима у одељењу мали (један или неколико ученика), успешно диференцирање наставе ће свакако укључити и индивидуализовани облик рада са тим учеником/ученицима. „Индивидуализацију можемо сагледати као посебан 'крaк' диференцијације којим ова успева да досегне и оптимално укључи у наставу све ученике, па и оне изузетних способности” (Исто: 90).

У нашим школама доминантни оквир за подстицање ученика изузетних способности представља концепт индивидуалног образовног плана (ИОП). Право на ИОП препознаје наша законска регулатива (ЗОСОВ, ЗООВ, правилник о ИОП-у). ИОП представља документ којим се планира и у складу са којим се реализује додатна подршка у образовању и васпитању детета. За ученике изузетних способности то је обогаћен и проширен програм школовања, тзв. ИОП-3. Концепт ИОП-а пружа наставнику и стручном сараднику слободу да у сарадњи са учеником и његовим родитељима осмисли одговарајућу и оптималну комбинацију обогаћивања, убрзавања и хомогеног груписања. Елементи ИОП-а су: педагошки профил ученика (опис његових јаких страна и потребе за подршком), план индивидуализованог начина рада (предлажу се одговарајући видови прилагођавања наставе од простора и услова, преко метода, материјала и средстава) и план активности (операционализација облика додатне подршке у низ конкретних задатака и корака, спецификација распореда, трајања активности, исхода, реализатора).

У даљем тексту дајемо пример попуњеног обрасца ИОП-3 за ученицу потенцијално даровиту за математику (слике 5, 6 и 7). Наведени описи педагошког профила ученице, као и плана индивидуализованог начина рада и плана активности требало би да послуже као илустрација шта ови елементи могу садржати. У зависности од различитих ученика формулације ће бити различите. Требало би избегавати типизирање профила, односно да се ученицима приписују типичне карактеристике уколико их они не поседују. Такође, веома је битно да се добро промисли приликом прављења плана индивидуализације и да се одаберу мере подршке које су најприкладније за ученика у односу на област у којој ученик демонстрира изузетне способности, смер у ком жели/треба да се развија, ниво и врсту компетенција које треба развити. Још један битан сегмент је и навођење циља/сврхе одређене мере подршке, односно навођење чему она служи. План активности би требало да садржи прецизне описе циљева и задатака на којима ученик и реализатор/наставник намерава да ради. Активности не би требало планирати само као део додатне, већ и као саставни део редовне наставе. Требало би да постоји логична и систематска веза између планираних активности, да оне буду надовезане једна на другу и да се међусобно прожимају.⁴

⁴ Детаљније о ИОП-3 студенти могу прочитати у монографији *Образовање ученика изузетних способности: научне основе и смернице за школску праксу* ауторки Ане Алтарас Димитријевић и Сање Татић Јаневски.

Б. Педагошки профил ученика/ученице	
Јакe стране и интересовања ученика/це	Потребе за подршком
Б.1 Учење и како учи (издвојити важне чињенице о досадашњим образовним постигнућима, стиливима учења, ставовима према школи, мотивацији за учење, интересовањима, областима и специфичним и како се ови аспекти понашања испољавају у различитим ситуацијама)	
Пстиже одличан успех у школи у свим предметима. Истиче се као ученица чија знања и вештине у математици превазилазе захтеве редовног програма. Са лакоћом и брзо учи, закључује, врши генерализације и уочава математичка правила. Задатке решава на више начина, користи нешаблонске методе решавања. Добитница је награде на општинском такмичењу из математике за ученике трећег разреда основне школе. Има развијене радне навике, показује висок степен мотивације, тежи самосталном раду, али се добро сналази и у тиму. Воли да решава занимљиве и изазовне математичке задатке. Такође, воли природне науке и показује склоност ка учењу страних језика.	Прилагодити темпо и организацију рада у настави математике способностима и предзнању ученице; омогућити да фокус обогаћивања и продубљивања знања буде и на редовној и на додатној настави; Подржати заинтересованост за природне науке и стране језике.
Б.2 Социјалне вештине (издвојити важне чињенице о односима са другима, одраслима и вршњацима, поштовању правила и и реаговању у социјалним ситуацијама)	
Лако успоставља комуникацију. Остали ученици у одељењу је добро прихватају. Изражава спремност да помогне другима у учењу.	/
Б.3 Комуникацијске вештине (издвојити важне чињенице о начинима размене информација са другима, укључујући и степен познавања језика на коме се школује, као и сметње у коришћењу вербалних, визуелних и симболичких средстава комуникације)	
Одлично се вербално изражава. У писменој комуникацији приликом решавања задатака често прескаче поједине кораке решавања и само записује коначан резултат.	Радити на разумевању важности писмене комуникације и записивања свих корака решавања задатака.
Б.4 Самосталност и брига о себи (издвојити важне чињенице о способности да се сам стара о себи и испуњава свакодневне обавезе код куће и у школи)	

Веома је савесна и одговорна. Школске обавезе и задатке ради самостално.	/
Б.5 Утицај спољашњег окружења на учење (издвојити важне чињенице о породичним и другим условима који могу да утичу на учење и напредовање ученика)	
Родитељи обезбеђују стимулативно окружење за учење и развој. Адекватно је подстичу за учење математике.	/
Идентификоване приоритетне области и потребе за подршком у образовању	Додатна подршка за коју је потребно одобрење Интерресорне комисије за додатном подршком:
Математика: омогућити брже прелажење градива и продубљивање знања у редовној и додатној настави.	/

Слика 5. Пример попуњеног обрасца ИОП-3 – Педагошки профил ученице

План индивидуализације			
Процена потреба за подршком			
Мере/врста подршке	Потребне мере/врсте подршке (за које активности, односно предмете/области)	Кратак опис мере/врсте подршке и сврха тј. циљ пружања подршке	Реализује и прати (ко, када)
Прилагођавање метода, материјала и учила (мере индивидуализације)	Математика	Коришћење задатака из напреднијих збирки са циљем да се обезбеди довољно нових садржаја и одговарајући ниво изазова; Учење кроз истраживачке задатке са циљем повезивања садржаја различитих области; Уважавање ученичких продуката (решења, метода решавања) у вредновању њиховог напредовања како би се одржала и учврстила мотивација за учење.	Учитель, континуирано (кад год постоје услови за то), у редовној и додатној настави. Прати: ППП служба.
Прилагођавање простора/услова у којима се активности односно учење одвија (нпр. отклањање физичких баријера, специфична организација и распоред активности и сл.)	Математика	Убрзано прелажење/прескакање делова програма како би се темпо рада ускладио са способностима ученика, отварање простора за обогаћивање унутар редовне наставе.	Учитель, континуирано (кад год постоје услови за то), у редовној и додатној настави. Прати: ППП служба.
Измена садржаја активности и исхода у васпитној групи, односно садржаја учења и стандарда постигнућа образовања	Математика	Проширивање и продубљивање програма одабраним садржајима и задацима како би се обезбедио одговарајући ниво изазова и задовољила потреба за сазнавањем.	Учитель, континуирано (кад год постоје услови за то), у редовној и додатној настави. Прати: ППП служба.
Остале мере подршке (уколико их има, навести)	/	/	/

Слика 6. Пример попуњеног обрасца ИОП-3 – План индивидуализације

План активности – школа			
Предмет/област: Математика	Циљ (очекивана промена): Оспособљавање за решавање логичко-комбинаторних задатака у области бројева и геометрије, оспособљавање за решавање сложенијих текстуалних задатака применом директних и индиректних метода; подстицање самосталне и оригиналне примене наученог Укупно трајање: три месеца		
Кораци/Активности:	Реализатори	Учесталост и трајање	Исход / очекивана промена и како ће се она проценити
1. Решавање логичко-комбинаторних задатака у области бројева	ученик и наставник	Часови утврђивања последње недеље септембра, додатна настава током септембра	Уме да решава логичко-комбинаторне задатке различитих типова (пребројавања, нумерације, дешифровања, итд.). Процена се врши увидом у начин решавања задатака.
2. Решавање сложенијих текстуалних задатака применом директних метода	ученик и наставник	Часови утврђивања током прве и треће недеље октобра, домаћи рад, додатна настава током октобра	Примењује директне методе решавања проблемских задатака, успешно на основу текста задатка саставља одговарајући израз или једначину и решава их. Процена се врши увидом у начин решавања задатака.
3. Решавање сложенијих текстуалних задатака применом индиректних метода	ученик и наставник	Часови утврђивања током друге половине новембра, домаћи рад, додатна настава током новембра	Користи индиректне методе решавања проблемских задатака, користи успешно различите начине графичког представљања односа између датих и непознатих података, саставља одговарајућу једначину и решава је. Процена се врши увидом у начин решавања задатака.
4. Решавање логичко-комбинаторних задатака у области геометрије		Додатна настава и домаћи рад током децембра	Уме да решава логичко-комбинаторне задатке различитих типова. Процена се врши увидом у начин решавања задатака.

Слика 7. Пример попуњеног обрасца ИОП-3 – План активности

Питања и задаци за самосталан рад

2.1. Да ли је математичка даровитост нешто што је урођено, фиксно и статично, на шта се не може утицати или је нешто што се може развијати код шире школске популације? Објасните.

2.2. Опишите разлике између апсолутне и релативне математичке даровитости.

2.3. У чему је разлика у даровитости професионалних математичара и даровитости ученика?

2.4. Опишите укратко компоненте модела математичке способности који даје Крутетски.

2.5. У чему је разлика између школских и научних математичких способности?

2.6. Која три типа математичких способности постоје по Колмогорову? Објасните их.

2.7. Девлин наводи девет мисаоних способности за које сматра да су битне за бављење математиком. Опишите их укратко.

2.8. Наведите карактеристике математички даровите деце:

а) у раном детињству

б) на школском узрасту.

2.9. Које раздобље у развоју даровитости се сматра најпродуктивнијим? Због чега?

2.10. Крутетски разликује три типа математички даровитих ученика. Опишите карактеристике сваког од њих.

2.11. Због чега је битно вршити идентификацију математички даровитих ученика?

2.12. Наведите и објасните методе идентификације математички даровитих ученика.

2.13. Која се три основна организациона облика подршке даровитима примењују? Опишите их. Објасните њихове предности и недостатке.

2.14. а) Шта је проблемска настава? б) Због чега има важну улогу када је у питању рад са математички даровитим ученицима?

2.15. а) Шта је диференцирана настава? б) Како се диференцијација може користити у програмирању рада са математички даровитим ученицима? Шта све подлеже диференцијацији?

2.16. а) Шта је индивидуализована настава? б) Објасните улогу индивидуализоване наставе у раду са математички даровитим ученицима.

2.17. а) Шта је ИОП-3? б) Интервјуишите неког учитеља о карактеристикама ученика/це који/која испољава високе математичке способности. На основу тога, попуните образац ИОП-3 користећи модел приказан у уџбенику.

3. МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ

*Боље је решити један проблем на њих различитих начина,
неко решити њих проблема на исти начин.*

Ћерђ Поља

Решавање проблема је фундаментални сегмент математичког курикулума у многим земљама широм света (Törner et al., 2007) и представља један од најважнијих циљева математичког образовања (Barczi, 2013). Не само да је централни аспект школске математике, већ представља и једну од кључних компетенција савременог друштва (Foster, 2019). По Пехконену (Pehkonen, 2007), основна сврха школског образовања у свакој земљи је, у већој или мањој мери, развијање независне, самоуверене, мотивисане и мултиталентоване личности способне да критички мисли и да успешно одговори на различите изазове условљене друштвеним условима током свог живота. Опште је прихваћено мишљење да решавање проблема представља снажно средство развијања мисаоних способности вишег реда. Решавање проблема не представља само циљ, већ и средство учења математике. Ученике би требало оспособити да решавају различите типове математичких задатака, а то је могуће постићи само решавањем система математичких задатака (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). Развијена способност решавања математичких проблема доноси велике предности и у свакодневном животу и на будућем радном месту. Решавање проблема представља важан интегрални део целокупног учења математике.

3.1. МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЦИ, МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ И ЊИХОВО РЕШАВАЊЕ

Проучавајући математичку литературу о решавању проблема, Пехконен издваја неколико разлога због којих се решавању проблема у настави математике даје централна позиција и ове разлоге сврстава у четири главне категорије: 1. решавање проблема развија опште когнитивне способности; 2. решавање проблема подстиче креативност; 3. решавање проблема је део процеса примене математике; 4. решавање проблема мотивише ученике за учење математике (Pehkonen, 1997с: 64). „Знање да се

реши математички задатак представља најбољу карактеристику математичког мишљења ученика” (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022: 279) и често се између знања да се реши задатак и математичких способности ставља знак једнакости.

Термин *загађак* у најширем смислу те речи можемо схватити као захтев неком појединцу да испуни одређену радњу. У настави то је обично захтев који учитељ или наставник упућује ученику. Шта је то математички задатак? У чему је разлика између математичког задатка и математичког проблема? Ово су нека од питања на која ћемо одговорити у наставку.

Рутински и нерутински математички задаци

Под математичким задатком подразумева се било који захтев у коме се тражи од ученика да нешто уради примењујући математичка знања и вештине (Foster, 2023). Дакле, то је захтев или питање на које треба дати одговор ослањајући се на услове задате у њему. Курник (2000: 51) наводи да је задатак „сложен математички објекат”. По њему, можемо издвојити пет основних елемената математичког задатка. То су:

а) услови: саставни део сваког задатка су познате и непознате величине, односно дати и тражени подаци, као и односи међу њима описани у задатку; за решавање задатка неопходно је разумети услове;

б) циљ: у неким задацима циљ је налажење резултата, одређивање непознатих величина, својстава и веза између њих, код других циљ може бити извођење закључака, оправдавање (доказивање) неких датих тврдњи;

в) теоријска основа: да би се решио било који задатак неопходно је извесно знање које је у вези са условом и циљем задатка; до њих се долази анализом задатка; проучавањем услова, датих и тражених података и применом претходних знања уочавају се и успостављају односи између познатих и непознатих елемената задатка и на тај начин се открива начин решавања;

г) решавање: решавање задатка представља начин постизања циља, односно прелаз од услова до резултата; изводи се након детаљне анализе задатка;

д) осврт: у пракси се често дешава да се након налажења резултата одмах прелази на наредни задатак, чиме се занемарују неки аспекти образовно-васпитне функције задатака; након решавања требало би проверити добијена решења, испитати неке нове идеје за решавање задатка и даље усмерити мишљење ученика (Може ли се задатак решити на други начин? Може ли се поједноставити поступак решавања? Јесмо ли

користили сличан поступак решавања код неког другог задатка? Можемо ли да извучемо општи закључак како се овакви задаци решавају? Може ли саставити сличан задатак? итд.). Оваква питања подстичу примену мисаоних операција.

Математички задаци могу бити већ познати ученицима и засновани на примени добро научених рутина или непознати и нови и тражити од њих да откривају које чињенице, вештине и процедуре је неходно комбиновати како би се дошло до решења (Schoenfeld, 1983). У првом случају ради се о тзв. рутинским или стандардним задацима, а у другом о нерутинским или нестандартним математичким задацима.

Поједини аутори *рутинске (стандардне) задатке* називају и вежбама јер представљају захтев ученицима да користе и имитирају раније научене поступке и методе решавања (Foster, 2023). Дакле, то су задаци код којих нема непознатих елемената: услови су прецизно и јасно постављени, циљ задатка је очигледан, теоријска основа се лако уочава и без дубље анализе, начин решавања је познат, тече природно и према очекивањима (Курник, 2000). Мада не доприносе у великој мери развоју мисаоних способности вишег реда и креативности ученика, важни су као средство за боље разумевање и брже усвајање новог градива. Гилфедер и Регато (Gilfeather, Regato, 1999) описују рутинске проблеме као задатке који подразумевају коришћење одговарајућих корака решавања ради лакше примене већ познатих процедура. Ови задаци се још описују и као *добро структурирани* јер су јасно формулисани и по правилу захтевају примену стандардних алгоритама. Под алгоритмима подразумевају се нпр. поступци извођења рачунских операција, правила рачунања, обрасци, формуле и слично. Следећи примери представљају рутинске задатке јер се за њихово решавање користе раније научени поступци рачунања, израчунавања обима правоугаоника и решавања једначина.

а) Израчунај вредност израза $2 \cdot (34 + 78)$.

б) Колики је обим правоугаоника чије су странице дужина 12 cm и 24 cm?

в) Реши једначину $4 \cdot x - 9 = 35$.

Поља (Polya, 1957: 172) истиче да се рутински задаци формирају додавањем различитих података већ решеним задацима. Решавају се без коришћења нових ствари, односно само применом познатих алгоритама и то корак по корак. Рутински задаци играју важну улогу у развијању вештина рачунања (Avci, Avci, 2010). Обично се могу решити коришћењем неког наученог алгоритма и захтевају један, два или више корака

у решавању. Мејер и Хегерти (Mayer, Hegarty, 1996) истичу да рутински задатак постоји онда када онај који га решава зна начин налажења тачног решења и зна да је тај начин решавања одговарајући за дати проблем. Развијање флуентности у рутинским задацима је веома важно јер они представљају базу неопходну да би се ученици бавили сложенијим математичким задацима.

Нерутински (несхематични) математички задаци су задаци у којима је барем један елемент услова непознат, односно није директно дат у задатку. Ако су непозната два или више елемената услова, онда се овакви задаци називају и проблемским задацима или једноставно математичким проблемима. Нерутински задатак или проблем је задатак у коме метода решавања није унапред позната и очигледна, код кога не познајемо поступак или алгоритам решавања (каже се још и несхематски тип задатка) и у коме постоји нека тешкоћа са којом се ученик суочава. За разлику од рутинских, нерутински математички задаци, поред развијања вештина рачунања, захтевају да се изврши организација датих података, њихово класификовање, да се уоче и успоставе одговарајуће везе (Avci, Avci, 2010). Осим тога, нерутински проблем постоји онда када онај који га решава не зна како да га реши и не може одмах да види решење јер није очигледно (Mayer, Hegarty, 1996). Решавање проблемских задатака је вишеструко корисно. Омогућава развијање логичког мишљења, као и спровођење одређених самосталних истраживања (Kurnik, 2000). Захтева појачан умни напор, већу концентрацију, дубљу анализу, истрајност, досетљивост.

У математичкој литератури под проблемом подразумевамо дату ситуацију или задатак када је појединац приморан да повезује познате информације на за њега нов начин како би дати задатак извршио (Kantowski, 1980). Ако појединац одмах препозна акције које су потребне да би урадио задатак, онда ће за њега то бити рутински задатак. Стога је појам *проблем* детерминисан временом и појединцем, односно да ли ће нешто бити проблем или рутински задатак зависи од особе која га решава и њеног претходног знања (Foster, 2021). На пример, множење два двоцифрена броја је рутина за неког ко је научио и увежбао поступак множења двоцифрених бројева, али за некога ко нема никаквог знања о томе биће нерутински задатак, јер је у тој ситуацији приморан да сам изналази приступе и методе долажења до решења.

Не би требало мешати поделу на рутинске и нерутинске задатке са поделом на задатке са високим и ниским когнитивним захтевима. Задатак може бити рутински, а тежак за ученика. На пример, множење два петодигрена броја је рутински задатак за неког ко познаје алгоритам множења вишецифрених бројева. Са друге стране, за тог истог појединца

задатак је изазован у смислу времена потребног за рачунање и могућности прављења грешака у рачуну. Решавање рутинског задатка може трајати дуго и захтевати више корака, али ако појединац познаје алгоритам, макар он био и захтеван, тај задатак је рутински.

И начин на који појединац прилази проблему може одредити дистинкцију рутинског и нерутинског задатка. На пример, погледајмо следећи пример: *Израчунај производ бројева 11 111 и 11 111*. Уколико ученик изабере да га уради користећи научени алгоритам множења, задатак је рутински. Али ако крене другим путем, да, рецимо, испитује како може искористити чињеницу да се цифре у оба броја понављају и да је у питању цифра 1, да нађе неки ефикаснији, мање „пешачки“ пут до решења, задатак постаје нерутински. У овом случају, с обзиром на то да је $1 \cdot 1 = 1$ и једино рачунање се своди на једноставна сабирања ($0 + 1$, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ итд.), ученик би могао да без примене целокупног алгоритма множења дође до закључка да ће резултат бити палиндромски број 123454321.

Такође, текстуални математички задатак не значи нужно да је у питању нерутински проблем. Погледајмо следећи пример текстуалног задатка: *Ивона има 15 бојица, а Јелена 20. Колико бојица имају укупно?* Очигледно је реч о рутинском текстуалном задатку. Сви неопходни подаци су дати експлицитно у задатку, не постоје сувишни подаци, ни они који недостају, а реч *укупно* сугерише да је потребно применити рачунску операцију сабирања.

Нерутински проблеми су они за које не постоји предодређени алгоритам решавања. Ови проблеми се решавају применом хеуристичких метода и стратегија решавања, а не алгоритама. Хеуристичке методе не дају гаранцију да ће проблем бити решен, али дају вероватнији метод за откривање његових решења. На пример, коришћење индиректних модела решавања или цртање слика представљају неке основне хеуристике решавања проблема (Gilfeather, Regato, 1999).

Дјуи (Dewey, 1933, према Avcu, Avcu, 2010: 1282) проблем дефинише као све оно што изазива забуну код појединца, ствара изазовну ситуацију за њега и чини његова досадашња уверења несигурним. Крол и Милер (Kroll, Miller, 1993) сматрају да је неки задатак проблем ако садржи корак који представља препреку у даљем поступку решавања. Да би нека ситуација представљала проблем, појединац мора бити свестан те ситуације и заинтересован за њено решавање, али и немоћан у проналажењу решења (Lester, 1980). Дакле, да би нека ситуација представљала проблем, потребно је да буде изазовна, нова, да изазове збуњеност код решавача и да решавач буде спреман и мотивисан да је реши.

Решавање математичких проблема

Свакако најутицајније име у пољу математичког образовања које се везује за појам решавања проблема јесте име Ђерђа Поље. Овај амерички математичар и методичар мађарског порекла сматра се пиониром када су у питању истраживања у области решавања математичких проблема. Оставио је дубок траг на математичку образовну заједницу својом књигом *Како решити математички задатак?* у којој је увео термин „савремена хеуристика” да би описао вештину решавања проблема (Schoenfeld, 2016). Поља је сматрао да фокус наставе математике мора бити решавање проблема. Сам поступак решавања проблема Поља дефинише као покушај налажења погодног поступка да се достигне жељена тачка, али немогућност да се достигне очекивани циљ. Питање налажења што општије методе решавања проблема није новијег датума. Познати и велики француски математичар и филозоф Рене Декарт (1596–1650) трагао је у својим истраживањима за једном универзалном методом решавања проблема. У основи његових трагања била је идеја да се било који проблем сведе на решавање одговарајућих једначина (Курник, 2000). Мада је Декартова замисао остварена за велики број проблема у различитим математичким областима, па чак и у неким сегментима школске математике (нпр. решавање неких текстуалних задатака, као и појединих задатака у геометрији), универзална метода решавања свих математичких проблема ипак не постоји. За неке шире класе проблема уводе се и развијају посебне методе њиховог решавања, али за многе друге математичке проблеме ово није могуће.

Иако не постоји универзална метода решавања проблемских задатака, Поља (Polya, 1957) даје један општи приступ решавању задатака са низом корисних упутстава, усмеравајућих питања и логичких расуђивања. Његов четвороетапни модел (разумевање проблема, стварање плана, извршење плана и осврт на проблем) решавања проблема прати и листа хеуристика, односно стратегија решавања проблема које су представљене као природне, једноставне, очигледне, здраворазумске, опште. Ипак, ове стратегије не треба схватити као покушај да се процедурализује процес решавања проблема и претвори у пуко праћење низа датих корака. По Пољу, то су општа правила за успешно решавање проблема у смислу сугестија које би требало да помогну појединцу да разуме проблем боље или да напредује ка налажењу његовог решења (Schoenfeld, 1985).

Разумевање проблема. Мада ова етапа делује тривијално и као нешто што је очигледно и подразумева се, за неке ученике није тако. Наставници се често сусрећу са ситуацијом да ученик покушава да реши задатак, а да

га или није претходно пажљиво прочитао или не разуме шта се у задатку тражи. Сваки задатак требало би пажљиво прочитати са разумевањем и препознати основне елементе задатка (дате податке, непознате податке, услов). Ова етапа укључује и примену неких техника за разумевање текста задатка, на пример – идентификовати непознате речи, реформулисати проблем, размислити о слици или дијаграму који могу помоћи да се разуме контекст проблема и релације између датих и непознатих података (Polya, 1957). Наставник може помоћи ученицима постављајући им питања попут: *Да ли разумеш све речи које се користе у тексту задатка? Шта се од вас тражи да нађеш или покажеш? Шта је непознато? Шта је дато, познато? Како гласи услов задатка? Можеш ли да својим речима поновиш/преишчаш проблем? Да ли је могуће задовољити услов? Има ли довољно информација да можеш да нађеш решење? Да ли је услов довољан да одредимо оно што је непознато? Можеш ли да смислиш слику или дијаграм који вам могу помоћи да разумеш проблем?*

Сиварање плана. Након што су ученици разумели услов задатка требало би осмислити план његовог решавања. Поља истиче да постоји много различитих начина да се реши неки проблем. Вештина бирања одговарајуће стратегије најбоље се учи кроз искуство, односно кроз решавање мноштва проблема. Ученик који редовно самостално решава задатке брже ће открити и доћи до стратегије решавања проблема. Код једноставнијих задатака обично се лако може уочити нека законитост која повезује познате и непознате податке (нпр. неко правило, образац и сл.). Када су у питању сложенији, тежи задаци, понекада је неопходно рашчланити их на више лакших подзадатака. Дешава се да се ученику план решавања изненада јави као „одлична идеја”, а у случају да се то не догоди требало би му помоћи да дође до ње. У том случају, наставник може ученику поставити следећа питања и смернице: *Да ли си раније већ видели сличан задатак? Погледајте шта је непознато и шта се тражи. Покушајте да се сећате некој вама познатој задатку који има исту или сличну непознату величину. Јесте ли искористили све што је дато у задатку? Јесте ли искористили цео услов? Можда бисмо могли да уведемо неки помоћни елемент?*

Неке стратегије решавања које ученици могу користити су: *погоди и провери*; направи уређену листу; елиминиши поједине могућности; потражи законитост/образак; нацртај слику; реши лакши проблем; користи индиректни модел; размотри посебне случајеве; ради уназад (користи инверзију); користи директно расуђивање; користи формулу; реши једначину.

Извршење плана. Ова етапа је обично лакша од претходне, а од ученика захтева стрпљење и примену поступака и правила рачунања. Ученик

би требало да води рачуна о тачности сваког корака, да контролише свој рад и проверава да није направио грешку и добио погрешно решење. Уколико одабрана стратегија решавања не функционише, онда се враћа на претходну етапу и смишља нови план.

Осврћ на проблем. Последња етапа никако не би требало да се занемари. Поља наводи да одвајање додатног времена за рефлексiju и детаљни осврт на урађени задатак има велики педагошки и образовни значај. Ученицима ово може помоћи да предвиде стратегије приликом решавања будућих проблема. Ова етапа је битна и из разлога што се може десити да добијено решење није тачно. Ученике би требало упућивати да проверавају добијене резултате: *Можеће ли да извршиће проверу резултата? Можеће ли да добијеће резултат на друачији начин? Да ли можеће да уочиће резултат на први поглед? Има ли добијени резултат смисла? Не би требало занемарити ни чињеницу да се из већ решеног задатка може доста тога научити. Наставник би требало да подстакне ученике да уче да су математички проблеми повезани и да имају везе и са проблемима из других наставних предмета или из свакодневног живота (Можеће ли добијени резултат или коришћену методу решавања да уишребите за неки други задатак?).*

С обзиром на велики значај који решавање проблема има у нашем свакодневном животу, неспорно је рећи да представља камен темељац школске математике, и да би без способности решавања проблема корисност и снага математичких идеја, знања и вештина били озбиљно ограничени (NCTM, 2000). Математичка образовна заједница је сагласна да ученике треба подучавати решавању и рутинских и нерутинских проблема. Бројна литература о решавању математичких проблема показује да су нерутински проблеми врста проблема који су најпогоднији за развијање вештина решавања математичких проблема и расуђивања, и развијање способности да се ове вештине примене у реалним животним ситуацијама (Yazgan, 2016). Постоји неколико различитих приступа у настави математике која је усмерена на решавање математичких проблема. Најпознатију поделу дао је Хатфилд (Hatfield, 1978), и по њој постоје три основна приступа: настава путем решавања проблема, настава за решавање проблема и настава о решавању проблема. У настави путем решавања проблема математичке теме се уводе, износе ученицима тако што им се презентује одговарајући проблем, односно проблеми су средство којим се уводе и подучавају математички садржаји и поступци. Могу се користити и да покрену дискусију о одговарајућој теми или да мотивишу ученике да уче и савладају одређене садржаје. Према томе, у настави путем решавања проблема, проблеми се првенствено користе као средство за учење математике. Осим што могу служити као средство за увежбавање основних

рачунских вештина, проблеми се често користе да би показали каква је веза између математичких садржаја и реалног света (Baroody, Coslick, 1998). У настави за решавање проблема, да би решили проблеме, ученици примењују знање које су претходно стекли на часовима математике. Другим речима, математички садржаји се уче да би ученици могли да науче да решавају проблеме. Од ученика се очекује да решавају и рутинске и нерутинске проблеме док уче математику. Наставници упознају ученике са стратегијама помоћу задатака и вежби који укључују неке реалне животне ситуације. У настави о решавању проблема, уче се опште стратегије решавања проблема. Проблеми служе за увежбавање стратегија решавања. Ово обично подразумева да наставници објашњавају и илуструју поменути Пољин четвороетапни модел решавања проблема или њему сличан и посебне хеуристике за извршавање ових етапа. У пракси се ова три приступа често преклапају и користи се интегрисани приступ.

3.2. МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ ЗАТВОРЕНОГ И ОТВОРЕНОГ ТИПА

Решавање математичких проблема, као што смо већ писали у претходном одељку, има велики потенцијал за учење и продубљивање математичких знања. Оно што ученици уче у великој мери је условљено задацима које им дајемо (Hiebert, Wearne, 1993). Математички задаци и решавање проблема одређују ниво мишљења ученика. Учење ће достићи свој максимум само уколико ученицима омогућимо да доносе одлуке о избору стратегије решавања задатка или о процесу његовог решавања. Задаци би требало да буду такви да обезбеде одређени ниво изазова, да обухвате важне математичке идеје и да подстичу расуђивање и комуникацију. Само задаци са таквим карактеристикама могу заиста подстаћи ученике да се максимално ангажују у креирању сопствених знања (Sullivan, 2011). Ако учитељ или наставник све време води ученике корак по корак кроз процес решавања проблема док не дођу до коначног и тачног решења, ово не значи да ће ученици овладати одговарајућим математичким садржајима. Уколико им се не омогућава да дискутују о решењима до којих су дошли, онда неће бити у ситуацији да користе математички језик, да упоређују стратегије решавања које су користили и да сами бирају најефективнији начин решавања задатка. Решавање рутинских проблема има важну улогу у учењу, али ако се ученици ограничавају само на решавање оваквих задатака, њихово креативно мишљење и оригиналност биће потиснути. Сматра се да велику образовну и педагошку вредност имају тзв. отворени проблеми или проблеми отвореног типа.

У литератури, *проблем отвореног типа* се најопштије описује као проблем који је отворен за многа различита решења (Becker, Shimada, 1997; Nohda, 2000; Kwon, Park, Park, 2007). Ипак, дефинисање проблема отвореног типа варира и разликује се од аутора до аутора (Bingölbali, Bingölbali, 2021). Силвер (Silver, 1995) истиче да термин „отворени проблем” или „проблем отвореног типа” може имати различита значења у математици. Може се користити да означи још увек нерешена питања и проблеме у историји математике (нпр. Фермаова последња теорема била је недоказана до 1993. године, па је представљала отворени проблем). Остала значења су усмерена на наставу и учење математике, па тако Силвер наводи да се проблем отвореног типа може односити на математичке проблеме који омогућавају различите интерпретације или различите прихватљиве одговоре (проблеми са више различитих одговора/решења), или на оне који омогућавају различите методе решавања. Проблеми отвореног типа могу бити и тзв. продуктивни проблеми који пружају могућност проширења, односно да се на основу њих постављају нови или са њима повезани проблеми (Bingölbali, Bingölbali, 2021). Такахаши (Takahashi, 2001 према Yan, Fong, 2005) проблеме отвореног типа дели на две врсте: проблеме са једним решењем, али са више разноврсних приступа решавању проблема и проблеме са више тачних решења, односно одговора. Пехконен и Фунг (Pehkonen, 1997а; Foong, 2000, 2002) сматрају да је потребно најпре дефинисати проблеме затвореног типа. *Проблем затвореног типа* је добро структуриран проблем у смислу да су захтеви у њему јасно формулисани и постоји један јединствен и тачан одговор који се увек може пронаћи на одређен, фиксиран начин. Другим речима, проблем је затворен ако су почетна и циљна ситуација (почетни услови и циљ) затворени, тј. јасно објашњени, задати. Овакав проблем не пружа могућност примене дивергентног мишљења. Затворени проблеми обухватају рутинске задатке који се користе за увежбавање правила и поступака, али и нерутинске проблеме који су засновани на коришћењу хеуристичких метода решавања проблема. Ако су почетна и/или циљна ситуација у задатку отворени, односно нису затворени, онда имамо проблем отвореног типа (Табела 1). Стога, проблем који је „отворен”, било у погледу својих почетних услова било када је реч о циљевима, и који је по исходу отворен за дивергентно мишљење, може се сматрати проблемом отвореног типа. Проблеми отвореног типа се у литератури још називају и некомплетним (Kwon, Park, Park, 2006), неструктурираним или „лоше” структурираним проблемима (Leung, 1997). Према овој дефиницији, Пехконен (Pehkonen, 1997а: 8) у односу на „отвореност” почетне и/или циљне ситуације издваја три врсте проблема отвореног типа (Табела 1). То су (1) проблеми код којих су и почетна и циљна ситуација отворене, (2) проблеми код којих је почетна

ситуација отворена, а циљна затворена и (3) проблеми код којих је почетна ситуација затворена, а циљна отворена.

		Циљна ситуација	
		Затворена (тј. јасно задата)	Отворена
Почетна ситуација	Затворена (тј. јасно задата)	• затворени проблеми	• проблеми са отвореним исходом (<i>open-ended</i>) • реалне животне ситуације • истраживања • проблемска поља • проблем-варијације
	Отворена	• реалне животне ситуације • проблем-варијације	• реалне животне ситуације • проблем-варијације • пројекти • постављање проблема

Табела 1. Класификација проблема у зависности од њихове полазне и циљне ситуације (Pehkonen, 1997а: 9)

Погледајмо следећа два примера задатака који су намењени ученицима трећег или четвртог разреда основне школе.

Пример 1. Израчунати обим правоугаоника чије су странице дужина 3 cm и 5 cm.

Пример 2. Ако је обим правоугаоника 16 cm, колике могу бити његове странице?

У првом примеру се очигледно ради о рутинском задатку затвореног типа. Коришћењем обрасца за израчунавање обима правоугаоника ученици у пар корака долазе до решења. Начин доласка до решења је унапред одређен и познат, и постоји само једно решење. И почетна и циљна ситуација су јасно задате.

Други пример није типичан школски задатак. Не постоји унапред одређен начин решавања. Почетни услови нису комплетни, јер нам је познат само обим правоугаоника, не и дужина једне од страница. Ученици сами морају да осмисле на који начин ће покушати да реше задатак, при томе користећи претходна знања и комбинујући их на нов начин. Неки ученици могу уочити да збир двеју суседних страница правоугаоника

мора бити 8 cm, па покушати да нађу све могуће парове природних бројева чији је збир једнак овом броју. Неки ученици ће пронаћи сва могућа решења, а неки само нека. На пример, једно од решења је и квадрат чије су странице дужине 4 cm. Ученици који знају да је квадрат правоугаоник са једнаким страницама уочиће и ово решење. Слабији ученици могу покушати да реше задатак користећи дидактички материјал, нпр. штапиће, палидрвца. Сви ученици имају могућност да на овај проблем отвореног типа одговоре на начин који њима одговара и у складу са претходним знањима.

Лондон (London, 1993) издваја три карактеристике проблема отвореног типа. По њему, проблеми отвореног типа подразумевају три фазе: упознавање проблема, испитивање проблема и упорност у његовом решавању. Потребно је да проблеми ученицима пружају прилику за дивергентна решења и да им омогућавају да врше евалуацију. Такође, морају бити приступачни за сваког ученика и морају подразумевати извесно време за решавање. Квон и др. (Kwon, Park, Park, 2006) под проблемима отвореног типа сматрају проблеме који имају следеће три карактеристике: прво, почетна тачка проблема је релативно јасна, али решења за његов циљ могу варирати; друго, ученик може бирати сопствени одговарајући приступ проблему и објаснити разлог његовог избора; треће, то су проблеми у којима ученик може користити вишедимензионалне мисаоне вештине и ангажовати дивергентно мишљење у потрази за сопственим решењем.

Предности примене проблема отвореног типа у настави математике су бројне. Савада (Sawada, 1997) наводи пет разлога зашто би требало користити проблеме отвореног типа: ученици активније учествују на часу и могу да изражавају своје идеје слободније и чешће; ученици имају прилику да боље и у већој мери користе своје математичко знање и вештине; сви ученици могу дати одговор на питање на свој и за себе значајан начин; часови са проблемима отвореног типа пружају ученицима сврсисходно и важно искуство расуђивања и закључивања; ученицима је пружена шанса да искусе испуњење и задовољство када дођу до открића и да доживе потврду код својих вршњака.

Главна предност примене проблема отвореног типа је то што деци различитих математичких способности нуде могућност да напредују сопственим темпом и искусе успех радећи математику. Чињеница да су то задаци са више различитих решења и/или начина решавања пружа одличну основу за богате математичке дискусије и рефлексију. Истражујући и трагајући за решењима ученици конструишу сопствена знања, упоређују добијене резултате са осталим ученицима и дискутују о њима. Решавање

оваквих проблема код ученика повећава потребу за образлагањем и доказивањем идеја до којих долазе током решавања проблема, омогућава им да се врате на оригинални проблем и сагледају га из различитих перспектива. Ученици су много активнији када се ангажују у решавању отворених проблема и имају више слободе да презентују своје идеје. С обзиром на то да су доступни свим ученицима јер им омогућавају да им приђу на сопствени начин, ствара се окружење за учење које је слободно, без рестрикција и пуно подршке за ученика. По Такахашиију (Takahashi, 2000), у оваквом окружењу ученици су активни и радознали и желе да пронађу и друга решења и/или методе решавања проблема. То ствара могућност за вођење интересантног и богатог дијалога у учионици. Пошто постоји много различитих решења/стратегија решавања датог отвореног проблема, ученици бирају за њих најбољи начин долажења до одговора и стварају оригинална решења. Кроз упоређивање и дискусију у разреду ученици су интринзички мотивисани да другим ученицима образлажу своја решења. Све ово представља значајну прилику за развијање математичког мишљења. У обзир треба узети чињеницу да у одељењима имамо ученике различитих способности, могућности и интересовања. Стога треба водити рачуна да у активностима на часу учествују сви ученици, односно час мора бити разумљив сваком ученику. Док је традиционална настава углавном усмерена на учење чињеница, приступ настави који користи проблеме отвореног типа усмерен је на процес решавања проблема, самостална истраживања ученика и трагање за решењима, што доприноси бољем разумевању кључних принципа и појмова. Отворени проблеми омогућавају и повезивање са реалним животним ситуацијама. Самкова и сарадници (Samkova et al., 2015) наводе да решавање проблема отвореног типа помаже ученицима да схвате природу саме науке. Ако бисмо користили само готове резултате до којих су дошли математичари, онда се губи смисао схватања математике као науке. Ученици кроз могућност да истражују, откривају, дају претпоставке, тестирају их, дискутују о њима, заправо имају могућност да искусе оно кроз шта пролазе математичари као научници.

Оно што проблеме отвореног типа чини нарочито атрактивним приступом у настави и учењу јесте њихова отворена природа која нуди својеврстан изазов за мисаоно ангажовање ученика. Верује се да ефективна употреба проблема отвореног типа подстиче и поспешује мишљење вишег реда и ствара основу за дубоко мишљење (Dyer, Moynihan, 2000). Када ученик учи математику путем оваквог проблемског приступа, он се решавајући проблем „бори” са тешкоћама, а не ослања се само на пуку репродукцију поступака или правила да би нашао решења. На овај начин поспешује се дубље разумевање математичких садржаја.

Проблеми отвореног типа могу ученицима приуштити осећај постигнућа и испуњења јер чак и ученици са слабијим математичким способностима могу да изнесу своја мишљења у складу са сопственим способностима. Штавише, ученицима се нуди могућност да осете како је то бити прави и активни ученик математике у самосталном креирању проблема. Оно што је овде битно јесте да и наставник и ученик препознају допринос ученика у свим процесима учења и да сваки ученик има поверење у своју способност да пронађе сопствено решење. Могућност да ученици раде заједно једна је од кључних ставки у решавању проблема отвореног типа. Користећи међусобно искуство и дискутујући о проблему, ученици се ангажују у рефлектовању, давању претпоставки и образлагању. Хиберт и сарадници (Hiebert et al., 1996) сматрају да су ученици који праве рефлексију о оном што раде и комуницирају једни са другима о томе, у најбољој позицији да изграде корисне везе у математици.

Упркос предностима проблема отвореног типа, није лако пронаћи одговарајуће математичке садржаје на основу којих се могу креирати и осмислити различите категорије ових проблема. Проблеми који преовлађују у настави математике у школама обично су затвореног типа и не остављају много простора за креативно мишљење.

Пехконен (Pehkonen, 1997a) у три горе описане врсте проблеме отвореног типа (Табела 1) убраја следеће типове задатака и активности: истраживања, постављање или генерисање проблема, реалне животне ситуације, пројекте, проблемска поља (или низове проблема), проблеме без експлицитно постављених питања и тзв. проблем-варијације (тзв. метод „шта-ако-је“). У даљем тексту описаћемо неке од њих.

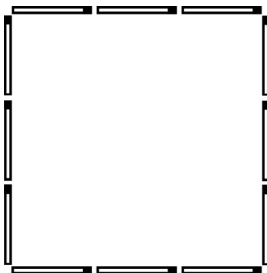
Постављање (генерисање, формулисање) проблема представља креирање нових проблема или реформулацију постојећих (Silver, 1994). Може се јавити пре процеса решавања неког проблема или након њега. У првом случају ученици креирају проблеме на основу неке дате ситуације, која може да буде намерно креирана или природна. На пример, наставник чита ученицима неки новински чланак и онда тражи од ученика да осмисле математичке проблеме на основу података у том чланку. Или, ученици одлучују да уреде своју учионицу. Да би купили нека средства и материјале морају да прикупе и уштеде новац. Из ове природно наметнуте ситуације проистичу одређени проблеми који се могу превести на математички језик, на пример: *Колико новца морају дневно штедећи и колико дана да би купили оно што желе?* У другом случају проблеми се генеришу на основу искуства решавања једног или низа проблема. На пример, након решавања рутинских задатака у којима се од ученика тражи да на основу текстуалног задатка формирају одговарајући израз и израчунају његову вредност, наставник им може поставити обрнути задатак – да ако

је познат израз, саставе текстуални задатак који му одговара. Постављање проблема уопште представља веома важан аспект бављења математиком и лежи у основи развоја математике као науке. Због тога је битно омогућити ученицима да кроз одговарајуће и аутентичне образовне ситуације постављања проблема искусе делић активности које карактеришу професионалне математичаре. И Поља даје значај постављању проблема у свом четвороетапном моделу решавања проблема усмеравајући ученике да размишљају о повезаним проблемима који се могу решити на сличан начин. Постављање проблема представља само по себи тип отвореног проблема, јер је циљна ситуација (односно решење) отворена, пошто се може поставити, генерисати много проблема.

Проблемска поља. Под проблемским пољем, Пехконен подразумева низ математичких проблема који су повезани једни са другима. На основу било ког математичког проблема може се генерисати проблемско поље тако што ће се мењати услови дати у задатку (Pehkonen, 1997b). Оно што је битно јесте да се нови проблеми повезани са почетним дају постепено ученицима, идући од лакших ка тежим. Како ће гласити нови проблем и на ком ће нивоу бити зависи од одговора које дају ученици. Илустроваћемо како ово изгледа на једном примеру који користи Пехконен (Pehkonen, 1997b: 76).

Пример. Да бисмо конкретизовали и представили ученицима проблем, потребно нам је 12 палидрваца. Крећемо од следеће ситуације.

Користећи 12 палидрваца направили смо квадрат као на Слици 8. Површина овог квадрата је једнака површини 9 јединичних квадрата (јединични квадрат је квадрат чија је страница дужине једног палидрвца, при чему смо дужину једног палидрвца узели као јединицу мере за дужину).



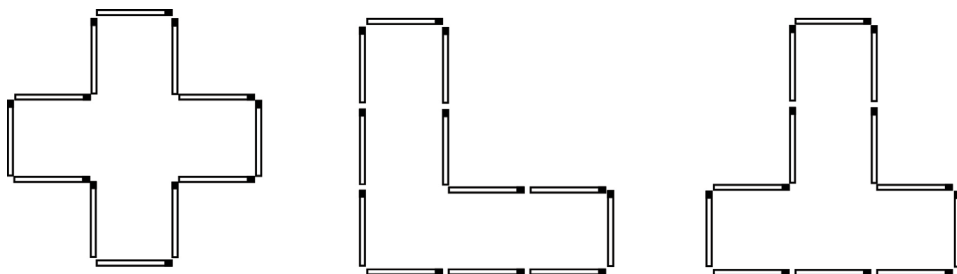
Слика 8. Квадрат површине 9 јединичних квадрата

На основу ове ситуације развићемо низ нових повезаних проблема (проблемско поље). За почетак, узећемо да је обим фигуре константан и да

износи 12 палидрваца, а површина је величина коју ћемо варирати. Поста-
вљамо ученицима следећи проблем:

Можеће ли да користиће свих 12 ђалидрваца најравиће фиџуру чија је ђовршина 5 јединичних квадратиа?

Нека од решења ученика могу бити:



Слика 9. Примери решења

Као наредни корак, можемо да ученицима поставимо питање о броју различитих решења:

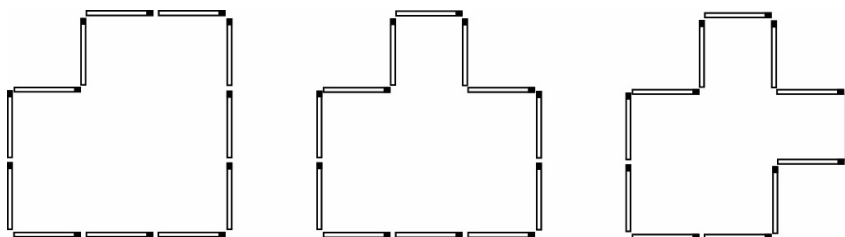
Колико различитиџх фиџура ђовршине 5 јединичних квадратиа можеће најравићи са 12 ђалидрваца? Може ли их бићи више од 10?

Ученици ће сигурно пронаћи више различитих решења, али ће само неки пронаћи она најкомпликованија.

Још једна (једноставнија) могућност варирања неких елемената про-
блема може бити да променимо дату вредност површине:

Да ли је моџуће користиће 12 ђалидрваца најравићи фиџуру ђовршине 6 (или 7, 8) јединичних квадратиа?

Ученици могу релативно лако да дођу до решења приказаних на Слици 10. Посџоје ли још нека решења за сваку од даџиџх ђовршина? Колико има различитиџх решења?

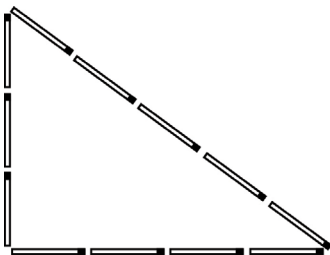


Слика 10. Фигуре површине 6, 7 и 8 јединичних квадрата

Решења на сликама 9 и 10 добијена су методом „исечања” јединичних квадрата у угловима почетног квадрата величине 3×3 . Међутим, добијање фигура мањих површина од 5 је доста сложенији захтев за ученике, нарочито оне млађег школског узраста. На пример, ово може бити проширење задатка за оне ученике који су бржи и показују високе способности за математику:

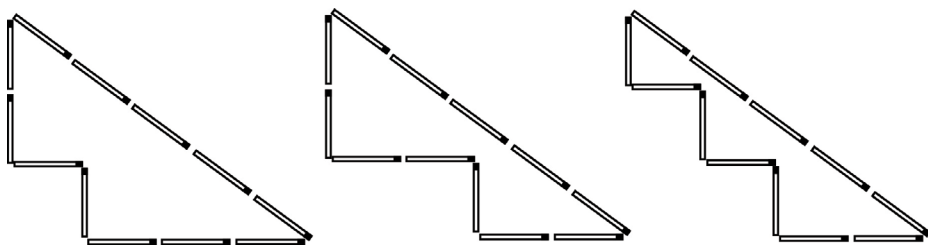
Да ли је могуће користећи 12 палидрваца добити фигуру површине 4 (или $3, 2, 1$) јединична квадрата?

Поједини ученици могу да уоче да је од 12 палидрваца могуће саставити троугао страница 3, 4 и 5 палидрваца (на старијем узрасту ученици могу да се ослоне и на примену Питагорине теореме). Тај троугао представља половину правоугаоника страница 3 и 4 палидрваца (Слика 11). Како је површина тог правоугаоника $12 (3 \cdot 4)$ јединичних квадрата, површина троугла биће 6.



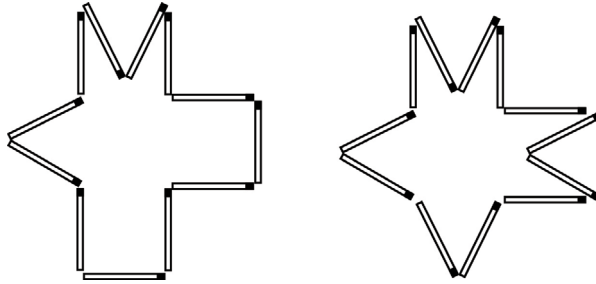
Слика 11. Троугао чије су странице дужине 3, 4 и 5 палидрваца

Користећи методу исецања јединичних квадрата могу добити фигуре површине 5, 4, 3 као што је приказано на Сlici 12.



Слика 12. Фигуре површине 5, 4 и 3 јединична квадрата

Ученици млађег узраста могу доћи до неких решења и интуитивно. На пример, погледајмо наредну слику.



Слика 13. Примери решења до којих ученици могу доћи интуитивно

Ученик је кренуо од фигуре површине 5 јединичних квадрата (у облику крста, као прва фигура на Слици 9), а затим уклонио један од квадрата. До прве фигуре на слици дошао је користећи особину да ако неком броју (у овом случају 4) додамо и одузмемо исту количину, он се неће променити.

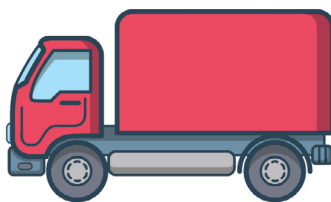
Ново проширење проблема, односно проблем који се надовезује на постојећи може бити захтев да се нађу фигуре површине веће од 9 јединичних квадрата. Наравно, наставник осмишљава нове надовезане проблеме пратећи одговоре ученика.

Проблем-варијације представљају наставни приступ који се односи на генерисање нових проблема из претходно решених тако што се варирају или услови или циљеви оригиналног проблема. Овај приступ је познат још и као „Шта-ако-је?” и „Шта-ако-није?” (“What-if?”, “What-if-not?”) који су развили Браун и Волтер (Brown, Walter, 1983). Илуструјемо његову примену на једном задатку за ученике петог разреда. Наставник даје ученицима следећи задатак: *Покажиће да је производ било која четири природна броја дељив бројем 24*. Након решавања задатка, могућа варијација услова би могла бити: *А шта ако имамо производ три или четири узастопних бројева? Или: А шта ако нису у производу узастопни природни бројеви, већ узастопни непарни бројеви?* У почетку наставник може бити тај који ће варирати услове проблема, а касније то могу радити и сами ученици.

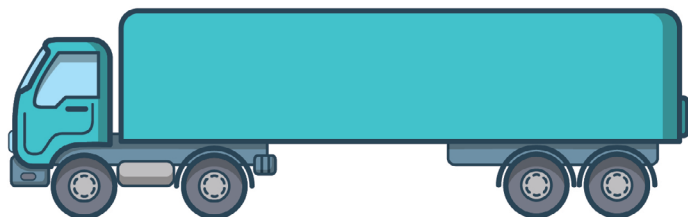
Реалне животно ситуације могу обухватити различите врсте отворених проблема. Најчешће, наставник припрема и презентује ученицима неку ситуацију из реалног живота која обезбеђује богат контекст не само за решавање проблема отвореног типа, већ и за њихово постављање. Један такав пример приказан је на Слици 14. Наставник може од ученика тражити да процене који камион је исплативије унајмити за превоз робе (проблем отвореног типа) или да сами осмисле, формулишу математичке задатке на основу датих података (постављање проблема).



Носивост: 3500 kg
Потрошња горива на 100 km: 15 l
Максимална брзина: 100 km на час
Дужина: 7 m



Носивост: 11 000 kg
Потрошња горива на 100 km: 24 l
Максимална брзина: 85 km на час
Дужина: 10 m



Носивост: 24 000 kg
Потрошња горива на 100 km: 35 l
Максимална брзина: 80 km на час
Дужина: 14 m

Слика 14. Пример једне реалне животне ситуације као извора за постављање проблема⁵

Ученици морају да најпре разумеју дату ситуацију, да организују доступне информације, уоче оне које су релевантне и открију везе између њих (Christou et al., 2005). Овакве ситуације развијају код ученика и способност математичког моделовања, односно способност решавања проблема из реалног света уз помоћ математике (Hartman, Krawitz, Schukajlow, 2021).

У Поглављу 6 приказашемо неке стратегије које учитељи и наставници могу користити за креирање проблема отвореног типа.

⁵ Извор: freepik.com

Питања и задаци за самосталан рад

3.1. а) Шта је то математички задатак? б) Опишите пет основних елемената сваког математичког задатка.

3.2. а) У чему је разлика између рутинских и нерутинских математичких задатака? Опишите укратко њихове карактеристике; б) Од чега зависи да ли ће неки математички задатак бити рутински или нерутински за ученика?

3.3. Проучите један математички уџбеник (разред и издавач по избору) и математичке задатке у њему. Каква је заступљеност рутинских и нерутинских задатака у том уџбенику?

3.4. Наведите предности примене нерутинских задатака у настави математике.

3.5. Због чега је важно оспособити ученике да решавају математичке задатке? Објасните.

3.6. а) Опишите Пољин четвороетапни модел решавања проблема у настави математике; б) На примеру једног нерутинског математичког задатка опишите примену Пољиног четвороетапног модела. Наведите питања која учитељ може постављати ученику, као и могуће одговоре.

3.7. Шта су то а) математички проблеми отвореног; б) математички проблеми затвореног типа?

3.8. а) Наведите три проблема затвореног типа из различитих области математике; б) За сваки од наведених проблема затвореног типа, осмислите њему одговарајући проблем отвореног типа.

3.9. Наведите позитивне стране примене проблема отвореног типа у настави математике.

3.10. Одаберите један математички задатак. Варирањем услова креирајте низ надовезаних математичких задатака (проблемско поље). Прикажите могућа решења сваког од креираних задатака.

3.11. Осмислите један математички задатак. Користећи „Шта-ако-је?” и „Шта-ако-није?” стратегију креирајте по један њему надовезани задатак.

3.12. Осмислите пример неке реалне животне ситуације која би могла да послужи ученицима као богат извор за креирање и постављање различитих математичких задатака. Наведите неколико математичких задатака који се могу формулисати на основу те ситуације.

4. КРЕАТИВНОСТ

*Креативност је видети оно што су други видели,
али мислити оно што нико други није мислио.*

Алберт Ајнштајн

Креативност се данас препознаје као суштинска животна вештина и вредан људски капитал која има потенцијал да помогне у решавању бројних социјалних, економских и политичких проблема савременог друштва (Aish, 2014). Проучавање и истраживање креативности има дугу историју. Многи значајни мислиоци су размишљали и писали о креативности. Платон је сматрао да је креативност повезана са божанском интервенцијом и оним што нам муза диктира. Ајнштајн је често говорио о машти и креативности, истичући да је „машта важнија од знања”. Првобитно, креативност се везивала искључиво за област уметности, да би се почетком 20. века на Западу повеле дискусије и о креативности у науци и неким другим областима. Целокупна историја истраживања о креативности може се поделити на период до и после 1950. године (Kaufman, 2009: 9). У периоду до 1950. године постојао је мали број озбиљних истраживања која су се бавила креативношћу. Преломни тренутак и почетак систематског истраживања и проучавања креативности представља предавање Џ. П. Гилфорда на Пенсилванијском државном колеџу 1950. године под називом „Креативност”. На предавању се дискутовало о томе да се актуелне мере постигнућа (првенствено када су у питању школски тестови) заснивају на питањима и задацима који усмеравају мишљење према једном тачно одређеном одговору. Насупрот овом конвергентном мишљењу, Гилфорд је сматрао да пажњу треба усмерити на до тада занемаривано дивергентно мишљење. Истакао је важност развоја креативних потенцијала школске деце и позвао истраживаче да усмере пажњу у својим истраживањима на креативност (Aish, 2014). Психологија је почела да се бави питањем разумевања, употребе и развоја људских креативних потенцијала.

4.1. РАЗЛИЧИТА СХВАТАЊА И ДЕФИНИЦИЈЕ КРЕАТИВНОСТИ

Схватања о креативности кретала су се од гледишта да се креативност може научити као и било шта друго, па до мистичног става да се она граничи са нечим абнормалним. Недостатак одговарајућег научног модела за проучавање креативности спречавао је развој ове дисциплине. До прекретнице у истраживању креативности дошло је педесетих година прошлог века. Постоје велика неслагања када је у питању схватање креативности, па самим тим и велики број различитих дефиниција. Неке од њих се усредсређују на индивидуалне карактеристике појединаца чији се рад или дело сматрају креативним. Друге узимају у обзир сам производ, односно дело, док се неке фокусирају на креативни процес. Ипак, заједничко за већину ових дефиниција су два битна критеријума за процену креативности, а то су новина (оригиналност) и сврсисходност (прикладност, примереност). Перкинс (Perkins, 1988: 311), на пример, дефинише креативност на следећи начин:

- креативни резултат је онај који је оригиналан и прикладан;
- креативна личност је личност која у потпуности вешто и рутински ствара креативне резултате.

По Барону (Barron, 1988), креативност представља способност стварања дела које је ново, оригинално и прикладно. Већина истраживача се слаже у томе да је креативност процес производње нечега што је и оригинално и вредно (Sternberg, 1996; Arar, Rački, 2003). Одувек је било спорно питање како дефинисати креативност као јединствени конструкт који подједнако добро објашњава рад многих великих научника, уметника, музичара, писаца, али и обичних људи. Врхунски ниво креативности подразумева прављење великог искорака у односу на претходна постигнућа. Да би се постигла креативност, идеје и производи морају бити нови. Поставља се питање: *За кога морају бити нови?* Да ли је, на пример, вишегодишњи напоран рад неког научника креативан ако је он дошао до неког великог открића, а затим сазнао да га је потпуно независно од њега открио неки други научник неколико недеља раније? Са друге стране, већина деце млађих разреда основне школе ствара идеје које су јединствене у свету и то пре него што се њихови покушаји почну сматрати креативним. Драшковић (1998) истиче да можемо разликовати два основна приступа који се условно могу свести на схватање креативности у ужем и ширем смислу. На основу првог приступа, креативност се ограничава само на ретке изабранике у уметности и науци и сматра се да се о оригиналности, најважнијој карактеристици стваралачког производа или процеса, може

говорити само када добијамо непоновљиве идеје и производе (креативност у ужем смислу или тзв. креативност са великим словом „К”). Други приступ креативност одређује као особину појединца која долази до изражаја при решавању свакодневних проблема у било којој области активности и живота (креативност у ширем смислу или креативност са малим словом „к”). Старко (Starko, 2010) полази од следећег становишта: да би се сматрали креативним, производ или идеја морају бити оригинални или необични за индивидуалног ствараоца. Друга битна карактеристика креативности је сврсисходност, односно прикладност. Нешто може бити оригинално и необично, али не и прикладно. Прикладност зависи и од времена и од културе, али и од области у којој посматрамо креативност. Радови многих познатих сликара попут Ван Гога и Манеа нису били прихваћени од стране њихових савременика, али данас представљају дела врхунске уметности. Скептичност и отпор према новим идејама може спречити њихову употребу јер друге особе, због новине и оригиналности тих идеја, понекада тешко могу схватити њихову корисност и вредност (Купас, 2015). Стога је битно умети те идеје добро представити друштву, односно за коначну креативну реализацију и прихваћеност идеје важну улогу има и моћ убеђивања. Такође, многе културе се међусобно разликују у схватању природе саме креативности. Док је у западној култури феномен креативности оријентисан према продукту и заснован на оригиналности, у неким источним и традиционалним културама схвата се као индивидуални развој, духовно путовање или еволуција у општој култури заједнице (Михајловић, 2012). Неки аутори сматрају да креативност није само једна карактеристика личности или општа способност, већ карактеристика понашања које је производ посебне конфигурације карактеристика личности, когнитивних способности и социјалног окружења (Amabile, 1983). У процену креативности потребно је укључити и социјални консензус.

4.2. ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ НА РАЗЛИЧИТЕ ПРИСТУПЕ У ПРОУЧАВАЊУ ФЕНОМЕНА КРЕАТИВНОСТИ

Када говоримо о томе шта је креативност нема једнозначних одговора, првенствено јер се проучавању феномена креативности приступа на различите начине. Стернберг (Sternberg, 1999) наводи да се сва истраживања у области креативности на основу приступа могу поделити у шест категорија: мистични, прагматични, психодинамички, психометријски, когнитивни и социоперсонални.

Мистични приступ проучавању креативности полази од тога да је креативност резултат божанске инспирације, односно „дар од Бога” или

духовни процес. Креативна особа се види као празан суд који божанско биће испуњава инспирацијом. Појединац би затим „исипао” добијене идеје, стварајући производ из другог света (Sternberg, Lubart, Kaufman, 2005: 352). Ако бисмо се, на пример, осврнули на историјски развој математике, Блез Паскал је тврдио да су многа од његових размишљања дошла директно од Бога. Чувени алгебриста 19. века Леополд Кронекер рекао је: „Бог је створио целе бројеве, све остало је створио човек” (Sriraman, 2004: 22). Кронекер је веровао да све остале бројеве, које је човек створио, треба избегавати. Овакво схватање креативности као духовног процеса научницима је стварало потешкоће у проучавању и истраживању овог феномена. Будући да се веровало како је креативност резултат нечега што није са овога света, сматрало се да ту нема места за науку.

Прајмаићни приступ био је усмерен првенствено на развијање и употребу креативности, не на њено разумевање, а још мање на проверавање ваљаности претпоставки и идеја о њој. Неки аутори сматрају да је овакав став био подједнако штетан за научно проучавање креативности као и мистични приступ (Sternberg, Lubart, 1999). Најпознатији представници и заговорници овог приступа су Едвард де Боно, Алекс Озборн и Вилијам Гордон (Sternberg, Lubart, Kaufman, 2005: 353). Они су се бавили праксом, а не теоријом креативности. Предложили су употребу неких техника и алата који треба да охрабре људе да мисле креативно и да поспеше креативну продуктивност (међу најпознатијим су Де Бонових „шест шешира за размишљање”, Озборнова „олуја идеја”, Гордонова „синектика”).

„Техника *шесџ шешира* за размишљање има за циљ да се људи подстакну да ствари, појаве и проблеме посматрају и сагледају из више различитих углова. Постоји шест метафоричких шешира и сваки од њих представља одређени тип размишљања. Када ставимо шешир одређене боје користимо одговарајући тип размишљања. На пример, бели шешир се фокусира на чињенице којима располажемо, црвени представља емоције, интуицију, зелени се односи на креативност, могућности, алтернативе и нове идеје, итд. (Sternberg, Lubart, 1999). *Олуја идеја* (енгл. *brainstorming*) је вероватно једна од највише коришћених техника чија је сврха креативно решавање проблема и трагање за великим бројем решења у подстицајном и неспутаном окружењу. У реализацији олује идеја учествује већи број људи који слободно и неограничено износе своје идеје. При томе, битно је да изнесене идеје не смеју бити критиковане, односно учесници се морају осећати слободно и прихваћено. Предност се даје квантитету у односу на квалитет, те учеснике треба подстицати да дају што већи број различитих идеја, које могу настати и комбиновањем неких већ датих” (Радић, 2018).

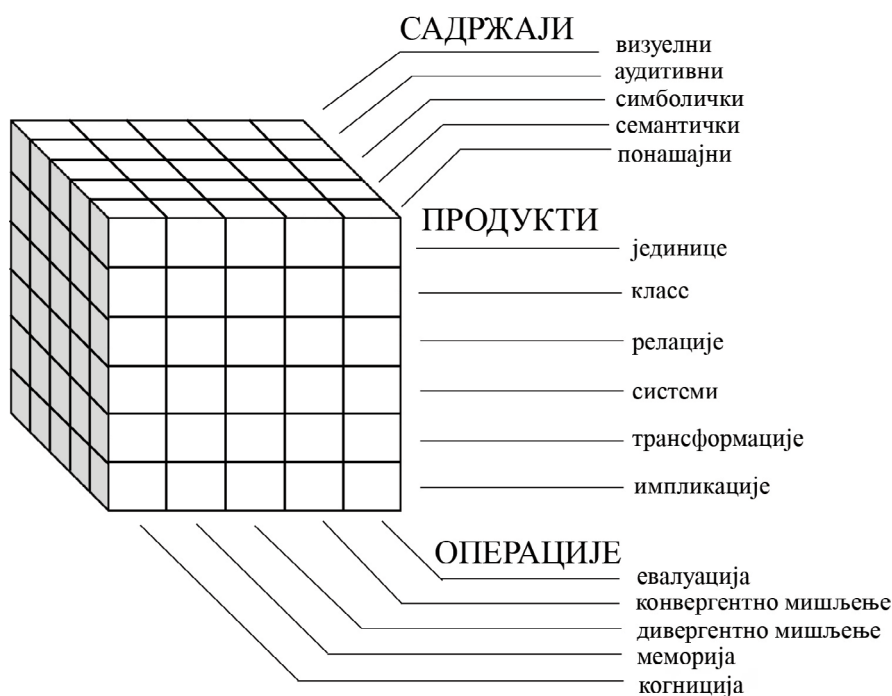
Међутим, без обзира што се неке од ових техника сматрају корисним, овом прилазу креативности недостаје основа у озбиљним психолошким теоријама, као и релевантна емпиријска истраживања која би све ово потврдила. Један пример прагматичног приступа јесте и Пољино наглашавање коришћења разних облика хеуристике за решавање математичких проблема различите сложености (Polya, 1966). Тако се хеуристика може видети као механизам доношења одлука који води математичара одређеним путем, чији резултат може или не мора бити плодан.

Са развојем психоанализе, развио се и *психодинамички* приступ који се може сматрати првим значајним теоријским приступом проучавању креативности у 20. веку. Заснива се на идеји да креативност произлази из тензије између свесне реалности и несвесних напора (Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Sternberg, Lubart, 1999; Sternberg, 2000a; Wertheimer, 1945; Sriraman, 2004). Према овом приступу, креативност се не може објаснити само свесним процесима, већ важну улогу има и несвесно. Креативност извире из несвесних нагона. Фројд сматра да је креативни процес алтернатива неурози, односно то је одбрамбени механизам (сублимација) који штити индивидуу од неурозе тако што је води до стварања друштвено прихватљивог продукта (Апар, Рачки, 2003; Starko, 2010). На пример, креативност је посматрао као начин на који уметници и писци своје несвесне жеље и фантазије исказују на друштвено прихватљив начин. Мада је овај приступ понудио неке увиде у саму креативност, ослањао се готово искључиво на студије случаја изузетних стваралаца, као што је био Алберт Ајнштајн. Ова методологија је критикована због тешкоћа у мерењу предложених теоријских поставки и због непостојања контролисаних и експерименталних метода. Пример овог приступа је четворостепени гешталтистички модел. Овај модел служио је као инспирација многим савременим моделима решавања проблема (Polya, 1957; Schoenfeld, 1985; Lester, 1985).

Мистични, прагматични и психодинамички приступ представљају неексперименталне прилазе проучавању феномена креативности.

Психометријски приступ се заснива на одређивању појма креативности уз помоћ „папира и оловке”. Овај приступ развија се средином 20. века. Темеље психометријског приступа поставио је Гилфорд који је креативност дефинисао помоћу појма дивергентног мишљења (Guilford, 1963). Гилфорд је развио тзв. тродимензионални модел структуре интелекта (*Structure of the Intellect, SOI*) по коме разликује три димензије људског интелекта: менталне садржаје (визуелни, аудитивни, семантички, симболички, фигурални), менталне операције (когниција, меморија, дивергентно мишљење, евалуација) и менталне продукте (јединице, класе,

релације, системи, трансформације, импликације) (Брковић, 2011). Према овом моделу, постоји 150 компоненти, односно посебних и независних способности човека које су формиране комбинацијом различитих типова садржаја, операција и производа (Слика 15).



Слика 15. Гилфордов модел структуре интелекта (према Брковић, 2011: 15)

Оно што је важно јесте да је Гилфорд осим конвергентног укључио и дивергентно мишљење. Он прави принципијелну разлику између конвергенције и дивергенције као менталних операција (Ђорђевић, 2011). Креативност, по Гилфорду, одговара типу отвореног или дивергентног мишљења (уочавање велике разноврсности одговора и решења) наспрот затвореном или конвергентном мишљењу (решавање проблема на основу јединствених или једино могућих одговора). Гилфорд (Guilford, према Sternberg, 1999: 82) је идентификовао неколико компоненти дивергентног мишљења које су дале основу за велики број истраживања и мерење креативности. Ове компоненте обухватају флуентност (генерисање великог броја идеја), флексибилност (генерисање различитих типова идеја или коришћење различитих приступа), оригиналност (способност стварања, генерисања нових, необичних, иновативних идеја и одговора на нестандартне подстицаје) и елаборацију (додавање, допуњавање

идеја ради њиховог поправљања). Гилфорд је издвојио две категорије способности које повезује са креативношћу. Прву категорију чине све компоненте његовог модела које садрже дивергентну продукцију. Друга категорија је повезана са трансформацијама, способношћу да се поново размотри постојеће искуство или знање да би се произвела нова форма. Гилфорд, такође, наглашава важност осетљивости за проблеме, редефиниције и евалуације у генерисању и процењивању креативних идеја. Сматра да је креативност интелектуална функција, образац когнитивних сила које обухватају способности продукције дивергентних одговора на разноврсне задатке. Полазећи од овога, Гилфорд је развио један од најпознатијих инструмената за мерење креативности, тзв. *Тесџ необичних ујошреба* (Milićević i dr., 2015). У овом тесту од испитаника се тражи да осмисле што више различитих начина за употребу неких свакодневних предмета попут *циџле*. Велики број истраживача усвојио је Гилфордове сугестије па су задаци дивергентног мишљења убрзо постали главни инструменти за мерење креативног мишљења (Sternberg, Lubart, 1999). Овакви тестови били су веома погодни за поређење људи на основу једне стандардне скале креативности. Ослањајући се на Гилфордов рад, Торенс (Torrance, 1974) развио је тзв. *Торенсове шесџове креативног мишљења* који и данас представљају златни стандард у овој области (Milićević i dr., 2015). Торенсови тестови креативног мишљења су најчешће коришћени тестови у пракси, користе их и многи програми за даровите у основним и средњим школама у идентификацији даровитости (Sriraman, 2004). Торенсов циљ био је да наставницима да „оруђе” потребно за подржавање креативности у свакодневној наставној пракси. Ови тестови се састоје од више вербалних и сликовних задатака који захтевају вештину решавања проблема и дивергентно мишљење. Њима се мери флуентност, флексибилност, оригиналност (статистичка реткост одговора) и елаборација (Sternberg, 2000b; Sriraman, 2004). Стернберг истиче да постоје и позитивне и негативне стране психометријског приступа. Позитивна страна је то што тестове могу користити и они који нису стручни, јер су једноставни за употребу и омогућавају објективност у оцењивању. Негативна страна је у томе што нумеричка оцена не даје никакво објашњење о појму креативности. Истраживачи инсистирају на томе да је неопходно испитати и друге продукте појединаца (цртежи, писани радови итд.), које би проценио тим стручњака, уместо ослањања само на нумеричку оцену. У овом приступу занемарени су мотивациони, емоционални и социјални утицаји. Такође, занемарена је и корисност, јер испитивање и мерење само дивергентног мишљења нам не даје никакве информације о корисности идеја (Kunac, 2015).

Коїниїивни приступ проучавању креативности се базира на разумевању „менталне репрезентације и процеса који су у основи људске мисли” (Sternberg, 2000b). Другим речима, овај приступ заступа становиште да су процеси мишљења и памћења одговорни за креативност (Kupac, 2015). Перкинс (Perkins, 1988) је сматрао да је креативни процес састављен од уобичајених мисаоних процеса који се користе на необичан начин. Претпоставио је да је креативност карактеристика састављена од способности, когнитивних стилова, вредности, уверења и тактике. Ове компоненте повећавају могућност да ће појединац користити уобичајене мисаоне ресурсе како би изабрао оригиналну идеју или решење из мноштва таквих идеја и решења. Вајсберг (Weisberg, 1993) истиче да се до решења проблема долази постепено на основу претходног искуства, да се оно не појављује одједном као „блесак” мишљења. Претпоставља да се креативност заснива на коришћењу уобичајених когнитивних процеса и резултира стварањем оригиналних и необичних производа. По њему, ови процеси су резултат когнитивних процеса који делују на већ постојеће знање у меморији индивидуе. Креативност може, мада се састоји од веома обичних процеса, да има изузетне ефекте. Вајсберг је веровао да креативни производи започињу индивидуалним коришћењем личног искуства као основе у прилажењу неком проблему. Оспоравао је идеју дивергентног мишљења. У прилог томе навео је да су производи многих креативних појединаца настајали постепено, почевши од једне идеје која је затим еволуирала до оне крајње и успешне. По томе, нова идеја заправо није нова, већ само представља логичко проширење већ постојећих идеја. Вајсберг сматра да је главни фактор који разликује високо креативне особе од слабо креативних ниво експертизе у области и преданост креативним подухватима (Arag, Rački, 2003). Високо креативне особе раде пуно и напорно, проучавају дела својих савременика и претходника како би постали стручњаци у тој области. Из овога потиче и његов став да се креативност може појачати на два начина: повећањем експертизе (односно стручности, уз омогућавање појединцу да сазна што више о оном што је урађено пре њега у одговарајућој области) и повећањем посвећености и упорности (појединцу треба омогућити да настави са радом чак и онда када почетни покушаји пропадну). Тврдио је да је „удубљивање” у неку дисциплину основни кључ висококреативног понашања.

Социојерсонални приступ се усредсређује на шири друштвени контекст, односно на личне и мотивационе варијабле и на културно-друштвено окружење као изворе креативности. Овај приступ истражује како на развој креативности утичу околина, друштвени контекст, екстринзична и интринзична мотивација, личне особине појединца. Стернберг (Sternberg, 2000a) сматра да бројне студије показују да су високи нивои

креативности повезани са варијаблама као што су културна разноликост, доступност одговарајућих узора у окружењу, финансијска подршка, компетитивност у домену. Истраживања имплицирају да се код креативних људи могу уочити одређене особине личности (Amabile, 1983; Eysenck, 1993; Maslow, 1968). Ове особине укључују независност у расуђивању, самопоуздање, спремност за преузимање ризика, храброст, самоприхватање, наклоност ка комплексном, естетску оријентацију, итд. Поједини истраживачи указују и на важност мотивације. Најутицајнији представник овог приступа је Амабил (Kunac, 2015). Амабил је развила тзв. компонентну теорију креативности по којој на креативност утичу четири елемента: а) подручно важне вештине (стручност, интелигенција, знање, таленат у подручју рада), б) креативно важне вештине (флексибилан когнитивни стил, особине личности попут отворености ка новим искуствима, истрајности, итд.), в) интринзична мотивација и д) друштвено окружење. Креативно постигнуће захтева да индивидуа у већој или мањој мери поседује сваки од наведених елемената. Социоперсонални приступ наглашава и значај школе, као важног чиниоца који утиче на креативност ученика. Креативна школска атмосфера и наставник који подстиче и развија креативност су важни фактори за одгајање креативних појединаца.

Савремена литература у области креативности у великој мери указује на то да је креативност резултат сливања једног или више фактора претходно поменутих категорија. Као важне компоненте креативности истичу се интелектуалне способности, знање, когнитивни стилови, личност, мотивација, околина. Све компоненте морају заједнички деловати како би се јавила креативност. Овакав „конфлуентни” приступ стекао је кредибилитет, тако да у оквиру њега постоје бројне теорије чији је циљ боље разумевање креативности. Три најчешће помињана конфлуентна прилаза креативности јесу системски приступ, еволуирајући системски приступ и приступ инвестиционе теорије.

Системске теорије, које спадају у најсложеније теорије креативности, креативности приступају као интеракцији између појединца и његовог окружења. По овим теоријама, механизми ума нису довољни да би се објаснио креативни процес. Као што и појединац утиче на свет око себе, тако и окружење утиче на креативност. Уопштено гледано, системске теорије проучавају изузетну креативност, односно ону која доноси темељне и неповратне промене у свету или у одговарајућој области. Један од системских теоретичара, Фелдман, препознао је да сложене интеракције утичу на функционисање високе креативности. Навео је седам димензија које могу усмеравати креативни процес: когнитивни процеси, социјални и емоционални процеси, породични аспекти, образовање и учење, карактеристике области и поља, социокултурални контекстуални аспекти и

историјски фактори, догађаји и трендови (Runco, 2007). Фелдман је сматрао да се креативност развија дуж наведених вишеструких димензија.

Још једна од системских теорија креативности јесте тзв. инвестициона теорија креативности (Sternberg, Lubart, 1996). Према овој теорији, креативни људи су као инвеститори, „купују” по ниским, а „продају” по високим ценама – односно, траже идеје које су необичне и нове, али нису прихваћене, а затим улажу знатно време да убеди друге људе у вредност тих идеја. По овој теорији, спој шест елемената чини креативност: интелектуални процеси, знање, стил мишљења, личност, мотивација и окружење. Стернберг и Лубарт (Runco, 2007) објашњавају интелектуалне процесе тријархијским моделом интелигенције (видети поглавље 1.2). Када је у питању улога знања у креативности, инвестициона теорија указује да и мала, али и екстремно велика количина знања могу ограничити креативност. У првом случају, креативни појединац не може да ствара јер је његова база знања премала, а у другом случају превише знања у области може ограничити способност појединца да пронађе нову перспективу. Стернберг и Лубарт су такође приметили везу креативности са неким специфичним особинама личности попут толеранције на неодређеност, унутрашње мотивације и умерене спремности на преузимање ризика. Стил мишљења се односи на преференцију да се мисли на оригиналан начин, способност да се мисли и глобално и локално, као и способност да се препозна питање од значаја насупрот небитном. Као што је сматрао да се интелигенција може развијати, Стернберг (Sternberg, 2000a) је веровао да се креативност може повећати кроз специфичне изборе (на пример, избор да се редефинише проблем или да се преузму свесни ризици).

Гарднер (Gardner, 1983), сходно својој теорији о вишеструкој интелигенцији, сматра да су појединци креативни на посебан, доменски специфичан начин. Мада појединци могу бити креативни у више од једне области, Гарднерова дефиниција креативности приказује креативно функционисање не као општу личну карактеристику, већ у оквиру одређене области. Људи су креативни када решавају проблеме, креирају производе или постављају питања у домену на начин који је у основи нов, али је напослетку прихваћен у одређеном културалном окружењу (Charvaton, Snelbecker, 2007). Домен у којем је појединац креативан под утицајем је појединачних врста интелигенције, личности, социјалне подршке. Гарднер је своја истраживања базирао на студијама случаја неких познатих креативних људи (Сигмунд Фројд, Алберт Ајнштајн, Пабло Пикасо, Игор Стравински, Т. С. Елиот, Марта Грејем, Махатма Ганди). Пронашао је велика варирања у типовима интелектуалних способности у различитим доменима. Систем симбола којима креативни појединци морају овладати,

као и врсте активности којима се морају бавити веома се разликују у оквиру различитих дисциплина.

Без обзира на постојање разлика између појединих теорија креативности, ипак се могу издвојити и неке заједничке карактеристике. Неколико теорија указује да креативност захтева време, упорност и мотивацију, као и солидну базу знања. Активности на часу које се завршавају у року од неколико минута или имају превише једноставне захтеве не пружају ученицима могућност да уложе већи напор, да развијају посвећеност задатку и генеришу креативне идеје. Већина теоретичара се слаже да су појединци креативни у одређеној области и да им је потребна база знања и вештина у оквиру те области да би остварили успех. Они, такође, сматрају да појединце треба научити разноврсним вештинама испитивања, истраживања и креативности у различитим дисциплинама. Неки истраживачи наглашавају да је *увид* кључан елемент у креативном процесу. Стернберг сматра да увид представља специфичну групу когнитивних процеса који се могу појачати кроз вежбање. За неке је увид резултат несвесних процеса које је тешко проценити, други поричу било какву улогу увида. Ипак, већина теоретичара истиче важност стратегија, процеса или навика ума које подстичу појаву креативних идеја (на пример, генерисање аналогича, дефинисање проблема, потрага за већим бројем решења и сл.). Овакве стратегије се могу научити и усавршити.

Питања и задаци за самосталан рад

4.1. Објасните разлику између схватања креативности у ужем и ширем смислу. Које од ова два схватања одговара креативности која се манифестује код ученика?

4.2. Како су се кретала схватања и приступи креативности по Стернбергу? Опишите укратко сваки од приступа.

4.3. Које су највеће замерке:

а) мистичном приступу креативности

б) прагматичном

в) психодинамичком

г) психометријском приступу креативности?

4.4. Како Гилфорд дефинише креативност?

4.5. Шта је конfluентни приступ схватању креативности?

5. МАТЕМАТИЧКА КРЕАТИВНОСТ

Маџемаџика је најлејша и најмоћнија креација људској ума.

Стефан Банах

5.1. РАЗЛИЧИТИ ПРИСТУПИ, СХВАТАЊА И ДЕФИНИЦИЈЕ МАТЕМАТИЧКЕ КРЕАТИВНОСТИ

Математика се као научна и интелектуална област налази на самом врху хијерархијске листе када је у питању присутност креативности у њеним активностима или резултатима. Стога је својеврстан апсурд то што је за већину ученика широм света математика један од школских предмета који се најмање повезује са креативношћу. Мада је изворна математичка активност уско испреплетена са креативношћу, већини ученика школовање обезбеђује веома мало прилика да искусе овај аспект области математике. С обзиром на то да савремено математичко образовање настоји да припреми ученике не само за садашњи, већ и за будући живот у глобалном друштву и економији, истраживања у математичком образовању се све више окрећу ка креативности.

Неспорно је да математичка креативност омогућава и покреће развој области математике уопште. Непрестани пораст броја научних часописа посвећених математичким истраживањима сведочи о развоју математике као науке. Међутим, основни покретач овог развоја – креативност математичара, није била предмет великог броја истраживања. Већина математичара није била заинтересована за анализирање мисаоног процеса чији је резултат математичка творевина (Ervynck, 1991; Sriraman, 2004). Ипак, интересовање за истраживања у овој области последњих деценија постаје све веће (Joklitschke, Rott, Schindler, 2022). Креативност у математици има два лица: прво се односи на откривање математичких чињеница, а друго на креирање доказа који потврђују те чињенице (Starko, 2022). Као што су и у природним наукама неопходне чињенице и њихово преиспитивање, тако су и у математици неопходна истраживања, проблеми, докази и генерализације. Математика је у сталној потрази за новим идејама, новим проблемима и оригиналним решењима, и далеко је од онога што већина ученика искуси решавајући гомилу рутинских проблема из школских уџбеника.

Интересовање математичара за процес математичке креације започиње почетком 20. века и везује се за име француског математичара Анрија Поенкареа. У првом издању часописа *L'Enseignement mathématique*, објављеном 1899. године, Поенкаре је писао о интуицији у математици и залагао се да јој се посвети више пажње у настави математике (Kilpatrick, 1992). Неколико година касније, тачније 1908. године, Поенкаре је одржао предавање испред Француског психолошког друштва у Паризу, чији је наслов био „Математичка инвенција” и које је после објавио у својој књизи *Наука и метод*. У свом обраћању испричао је анегдоту о томе како му се током једног путовања изненада и спонтано појавила идеја која му је помогла да реши комплексан математички проблем на коме је радио дуже време.

„У то време, напустио сам Кан, у коме сам живео, како бих отишао на геолошку екскурзију под покровитељством Школе у Мајнсу. Због путовања потпуно сам заборавио на свој математички рад. Када смо стигли до Кутанса, ушли смо у омнибус како бисмо стигли са једног на друго одредиште. У тренутку када сам спустио стопало на степеник, дошла ми је идеја, а да пре тога ништа у мојим мислима није указивало на то, да су трансформације које сам користио да дефинишем Фуксове функције биле идентичне са оним у неееуклидској геометрији. Нисам имао времена да то одмах потврдим јер сам заузевши место у омнибусу наставио са започетим разговором, али сам ипак осећао савршену сигурност. По повратку у Кан, ради своје савести, верификовао сам резултат кад сам имао времена.” (Poincare, 1908: 326)

Пишући даље о инвенцији и креативности, Поенкаре се фокусирао на несвесни део процеса математичког открића. Данас ове делове креативног процеса називамо инкубација (период у ком ум несвесно ради на проблему) и илуминација или тзв. *аха* моменат (изненадна идеја или увид који су повезани са решењем проблема). По Поенкареу, овим двама фазама претходи фаза препарације, односно свесног рада или покушаја да се боље разуме и реши проблем, а након њих следи верификациона фаза, у којој се идеје које су се појавиле у фази илуминације тестирају, претварају у формални доказ итд. Поенкареова прича је готово синоним интеракције између инкубације и илуминације и његова концептуализација се често користи у истраживањима креативности.

Поенкаре није био једини математичар тог доба који је размишљао о креативности и инвенцији. Математичари Хенри Фер и Чарлс-Анг Лесан, уредници часописа *L'Enseignement mathématique*, уз помоћ швајцарских психолога Теодора Флурнија и Едуарда Клапареда, објавили су једну од првих емпиријских студија о методама које математичари користе

приликом решавања комплексних математичких проблема (Liljedahl, Allan, 2013). Креирали су упитник са 30 ајтема којим су испитали преко 100 математичара. Питања су се односила на то како испитаници раде математику, како размишљају о природи своје дисциплине и како постижу напредак у њој. Упитник је садржао и питања о процесу инспирације. Поенкаре је ову студију препознао као потврду својих размишљања и закључака. Међутим, студија је наишла и на критике. Жак Адамар, још један француски математичар, изразио је сумњу у резултате студије, наглашавајући да су изостала нека битна питања (на пример она која се односе на неуспех који је саставни део рада математичара), као и то да су учесници били у то време непознати математичари.

Инспирисан Поенкареовим радом, Адамар (Hadamard, 1945) је спровео сопствено истраживање међу истакнутим математичарима и научницима (међу којима су били Поенкаре, Поља, Винер, Биркоф, Хелмхолц, Ајнштајн) како би испитао креативност у природним наукама. У Њујорку држи низ предавања о математичкој инвенцији 1943. године, која касније објављује у књизи *Психологија инвенције у математичком пољу*. Адамар је, под утицајем гешталт психологије тога времена, полазећи од Поенкареових идеја, сматрао да креативни процес математичара прати четворетапни модел: препарација, инкубација, илуминација, верификација. Међутим, четворетапни гешталтистички модел представља карактеризацију креативног процеса математичара, али сам по себи не дефинише креативност. Како се дефинише математичка креативност? Шта је она заправо? Да ли о креативности говоримо само када неки математичар открије нову теорему или њен доказ? Или се, када ученик открије нешто већ познато, али за њега ново, такође ради о креативности?

Поенкаре математичку креативност описује као проицљивост или „избор” (Poincaré, 1948). Он сматра да се откриће у математици не састоји у прављењу бескорисних комбинација идеја, већ у прављењу оних које су корисне и којих, као таквих, има веома мало. Поенкаре се ослања на чињеницу да само „одговарајућа” комбинација малог броја идеја резултира креативним схватањем, док већина таквих комбинација не даје креативан резултат (Sriraman, 2004). Оваква карактеризација математичке креативности делује прилично нејасно. Поенкареова метафора „избор” може се схватити као способност математичара да изабере пажљиво између питања (или проблема) која дају нешто ново, насупрот онима која не доносе ништа ново. Али ова интерпретација не решава чињеницу да Поенкареова дефиниција креативности запоставља проблем новине, тј. оригиналности.

Прва етапа креативног процеса односи се на напоран, намеран и свестан рад математичара како би се схватио и решио дати проблем. Поенкаре је ово назвао прелиминарним периодом свесног рада. Овај период се још назива и припремна етапа или етапа препарације (Liljedahl, Allan, 2013; Sriraman, 2004). Када појединац не може да дође одмах до решења, он/она наставља да ради на проблему на несвесном нивоу, што представља инкубацију. У другој етапи, етапи инкубације, проблем се оставља по страни неко време и ум је окупиран другим проблемима. Друга етапа може трајати различито, од неколико минута па до неколико недеља и нераскидиво је повезана са свесним и намерним покушајем који јој претходи. Поља (Polya, 1945) је, такође, сматрао да је понекада боље након напорног рада оставити проблем по страни да мирује, јер постоји могућност да ће се након тога постићи бољи резултат са мање напора. У трећој етапи идеја или решење се изненада појављују док је математичар можда заузет и неким другим неповезаним активностима (нпр. тренутак када Поенкаре улази у омнибус). Ова појава неочекиване илуминације представља јасан знак дугог, несвесног претходног рада (Poincare, 1948). Адамар је ово назвао етапом илуминације. Међутим, креативни процес се не завршава овом етапом. Неопходно је евалуирати, верификовати идеју или решење. Четврта, финална етапа, етапа верификације састоји се у усменом и писменом исказивању и изражавању резултата. Адамар истиче да се може десити и да је решење које се појавило у етапи илуминације нетачно, али да су неуспеси, као и успеси саставни део креативног процеса. По њему, креативни процес не треба процењивати само на основу тачности решења.

Наведени *теоријски модел* има одређене недостатке. Наиме, модел се углавном примењује на проблеме које су већ поставили неки математичари, игноришући на тај начин фасцинирајући процес којим се постављају и развијају нова питања (Sriraman, 2004). Моделом се у великој мери описује шта се дешава у етапама инкубације и илуминације до несвесног напора. Одговор на то како се питања развијају делимично даје Ервинк (Ervinck, 1991) у свом тростепеном моделу математичке креативности. Ервинк наводи да се генерисање корисних математичких појмова кроз комбинацију претходно познатих појмова или откривање непознатих веза између математичких чињеница може сматрати креативним радом у математици. Он креативност описује кроз три етапе. Прва етапа (етапа 0), прелиминарна техничка етапа, састоји се од „неке врсте техничке или практичне примене математичких правила и процедура, при чему онај који их користи није свестан теоријских основа” (Ibid.: 42). Друга етапа (етапа 1) је етапа алгоритамске активности, која се превасходно састоји од извођења математичких техника, као што је експлицитна

примена неког алгоритма више пута. Трећу етапу (етапа 2) представља креативна (концептуална, конструктивна) активност. У овој етапи се појављује „права” математичка креативност и састоји се од неалгоритамског доношења одлука. Ове одлуке могу бити широко дивергентне природе и увек укључују могућност избора.

Ервинк (Ervin, 1991: 45) илуструје поменуте три етапе креативности на примеру једног математичког проблема који се може решити на неколико различитих нивоа математичке софистицираности. Ови нивои се могу препознати на основу методе решавања која је примењена и одговарају опису етапа наведених етапа креативности.

Проблем. Човек је био дете шестину, а младић дванаестину укупног броја година свога живота. Нежења је остао још седмину свог животног века. Пет година након што се оженио родио му се син који је умро четири године пре свога оца. Ако је син живео два пута краће од свога оца, колико година је имао отац када је умро?

Решење које одговара најнижем нивоу математичке креативности. Први ниво ослања се на примену познатих алгоритама. Овде је довољно да појединац препозна да се дати задатак може моделовати у систем линеарних једначина. Неопходне способности су увођење одговарајућих непознатих величина и формирање једначина. Са x означимо колико је година имао отац када је умро, са y колико је година био у браку и са z колико је година имао његов син када је умро. Добијамо следећи систем једначина:

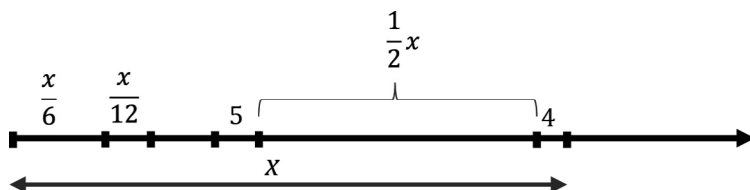
$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + y = z$$

$$5 + z + 4 = y$$

$$z = \frac{x}{2}$$

Примењујући знање о решавању система линеарних једначина долази се до решења $x = 84$.

Решење на вишем нивоу математичке креативности. Покушај да се креира ментална слика унутрашње структуре проблема може да доведе до схватања да се ситуација у проблему може представити линеарним моделом. С обзиром на то да људски животно век траје одређен временски период, све што је неопходно да се представе подаци у задатку јесте временска оса. Сви догађаји у задатку односе се на прецизне тренутке који се могу једноставно означити на оси.



Слика 16. Визуелизација решења

Једноставна графичка репрезентација као на Слици 16 омогућава да се запише следећа линеарна једначина:

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 9$$

Одавде се лако долази до решења $x = 84$.

Трећи, највиши ниво математичке креативности. Много елегантнија метода решавања проблема заснива се на интуицији, искуству и претпоставкама које су уграђене у саму природу датог проблема.

Прва претпоставка од које крећемо је да се животни век људи изражава позитивним целим бројевима од 0 до 100. Стога, полазна тачка јесте тражење позитивног целог броја као решења.

Друга претпоставка јесте да се разломци (шестина, дванаестина и седмина) односе на периоде у животу оца који такође представљају позитивне целобројне вредности.

Одлучујући корак јесте схватање да животни век оца мора бити број који ће бити дељив бројевима 6, 12 и 7, односно њихов заједнички садржалац и да је једини такав број који припада интервалу од 0 до 100 број 84.

Овим примером Ервинк је желео да укаже на необичан пут решавања који ће изабрати креативан математичар решавајући стари проблем на нов начин. Мада Ервинк покушава да опише процес којим математичари долазе до питања кроз своју карактеризацију етапе 0 и етапе 1, његов опис математичке креативности је сличан онима које су дали Поенкаре и Адамар, а употреба израза „неалгоритамско доношење одлука” аналогна је Поенкареовој употреби метафоре „избор”.

У сваком случају, Поенкаре и Адамар су одиграли важну улогу у покретању првих дискусија о томе да математика, као научна област, мора садржати елементе креативности. Пре њих, опште прихваћено мишљење било је да се креативност искључиво односи на поље уметности.

Слично као и када је у питању општа креативност, појам математичке креативности је дефинисан на различите начине. Дефинисање

математичке креативности представља својеврстан изазов због тешкоћа у опису њене структуре и карактеристика (Nadjafikhah, Yaftian, 2013). Неке дефиниције стављају нагласак на креативни процес, док се друге фокусирају на креативни продукт (Aiken, 1973). На основу прегледа литературе која се бавила математичком креативношћу, Ерик Ман проналази преко 100 савремених дефиниција креативности и сматра да је недостатак једне опште и прихваћене дефиниције представљао кочницу за веће истраживачке напоре у овој области (Mann, 2005). По Карлтоновој (1959), креативно мишљење је оно које доводи до повећања знања. Спрејкер (Spraker, 1960, према Aiken, 1973) креативност дефинише као способност да се произведе оригинална и необична, али применљива метода решавања математичких проблема. По Ромеју (Romey, 1970), креативност је способност комбиновања идеја, ствари, техника или приступа на нов начин. Лејкок (Leyscock, 1970) говори о креативној математици, способности да се дати проблем анализира на много начина, да се уоче обрасци, сличности и разлике и да се на основу онога што се радило у сличним ситуацијама одлучи о методи приступа проблему у непознатој ситуацији. Прве две од наведених дефиниција односе се на креативни производ, док последње две наглашавају креативни процес. Као што смо напоменули, уобичајено мишљење је да креативност и математика немају ништа једно с другим. Међутим, већина математичара се с тим не слаже. Хејлок (Haylock, 1987) је сумирао многе покушаје дефинисања математичке креативности. Један од приступа, наводи Хејлок, укључује способност да се виде нове везе између поступака и области примене и да се праве асоцијације између евентуално неповезаних идеја. Крутетски (Krutetskii, 1976) говори о математичкој креативности у контексту постављања проблема, инвентивности, независности и оригиналности, као и способности ученика да апстрахује и генерализује математички садржај. Сматрао је да проблеми са више решења омогућавају да се сагледа флексибилност математичког мишљења појединца кроз испитивање способности „пребацавања” са једне мисаоне операције на другу. Крутетски указује и на везу између креативног мишљења и математичких способности. Поједине студије су потврдиле да постоји позитивна веза између математичких способности и креативности (Mann, 2005; Tabach, Friedlander, 2013; Walia, 2012). Ипак, ова веза се не односи на способност примене формалних алгоритама и процедуралног знања која се користи приликом решавања рутинских проблема. Математичке способности ограничавају, али не одређују у потпуности математичку креативност (Haylock, 1997). Ово значи да ученици који показују слабо развијене математичке способности немају довољно знања ни компетенција да произведу високо креативна решења (Karwowski et al., 2020). Са друге стране, неће сви ученици са високо развијеним

математичким способностима нужно испољити креативно математичко мишљење. Силвер (Silver, 1997, 1994) је био први који је популаризовао мишљење да решавање проблема може бити средство за подстрекивање креативних мисли у школској математици. По њему, од суштинског значаја за подстицање креативних математичких процеса и продуката није само решавање, већ и постављање проблема. Кисветер (Kiesswetter, 1983, према Pehkonen, 1997с) истиче да је флексибилно мишљење, које представља једну од компоненти креативности, најважнија способност коју треба да има неко ко успешно решава проблеме. Други аутори, осим флексибилности, концепту математичке креативности додају и способности као што су флуентност и оригиналност (Haylock, 1997), као и елаборацију (проширивање или побољшавање метода) и осетљивост за проблеме (конструктивни критицизам стандардних метода) (Mann, 2005).

Студије математичке креативности су покушавале да мере математичку креативност или у облику флексибилности, флуентности и оригиналности одговора и решења ученика на постављене проблеме или у облику развијања и постављања математичких проблема у некој датој ситуацији. Често се математичка креативност посматра као синоним за дивергентно мишљење. Ипак, за појаву креативности битни су и конвергентно и дивергентно мишљење. Ли (Lee, 2017) говори о математичкој креативности као о споју конвергентног и дивергентног мишљења. У свом раду о креативној способности у математици, Балка (Balka, 1974) наводи обиман скуп критеријума за мерење математичке креативне способности. Обухватио је и конвергентно и дивергентно мишљење, при чему је конвергентно мишљење окарактерисао као откривање образаца и напуштање установљених менталних диспозиција, а дивергентно мишљење дефинисао као формулисање математичких хипотеза, евалуацију необичних математичких идеја, осетљивост за оно што недостаје у проблему, растављање општег проблема на посебне потпроблеме. Превазилажење фиксације у мишљењу неопходно је да би се креативност појавила.

Лејкин (Leikin, 2009) је развила инструмент за мерење математичке креативности под називом *Загацки са више решења* (*Multiple Solution Tasks* – MTS) ослањајући се на инструменте које су развили Гилфорд (*Тест не-обичних уџошреба*) и Торенс (*Торенсов шесџ креативности мишљења*). Тест који је креирала садржи математичке задатке које је могуће решити на више начина. Одговори, односно решења ученика се процењују у односу на три компоненте дивергентног мишљења: флексибилност, флуентност и оригиналност. Елаборација се не утврђује експлицитно, али за свако решење најпре се одлучује да ли је одговарајуће (што се може подвести под неку врсту елаборације). Затим, врши се пребројавање укупног броја одговарајућих решења и тако се одређује скор за флуентност. Да би се

одредио број бодова за флексибилност, решења сваког задатка понаособ се упоређују једна са другим како би се утврдило да ли почивају на сличним или различитим идејама. На крају, решења се упоређују са решењима осталих вршњака и експерата и тако се одређује скор за оригиналност. У неким студијама инструмент који је креирала Лејкин примењиван је не само за мерење математичке креативности, већ и даровитости.

Мерење креативности помоћу анализе продуката ученика може се применити не само, као у овом случају, кроз анализу решења проблема на наведеном тесту, већ и уопште у решавању проблема отвореног типа и постављању проблема. Приликом постављања проблема до изражаја долазе исте компоненте математичке креативности. Флуентност се односи на број постављених проблема, флексибилност на њихову различитост (у смислу математичких идеја или коришћених стратегија), а оригиналност на реткост (у односу на проблеме које постављају вршњаци). Чиу (Chiu, 2009) је повезао математичку креативност са способношћу ученика да решавају рутинске и нерутинске проблеме и да се приближе тзв. *лоше структурираним проблемима*, односно проблемима отвореног типа. Квон, Парк и Парк (Kwon, Park, Park, 2006) предложили су два главна критеријума у дефинисању математичке креативности: креирање новог знања и флексибилна способност решавања проблема.

Неки аутори говоре о креативности као личној способности која се може развијати код ученика, и праве разлику између релативне и апсолутне креативности (Leikin, Kloss, 2011). Апсолутна креативност, која се још означава као креативност са великим словом „К”, повезана је са великим историјским открићима, односно са открићима на глобалном нивоу. Примери апсолутне креативности се могу видети у радовима Гауса, Фермаа, Хилберта, Римана и других изузетних математичара. Срираман (Sriraman, 2005) дефинише математичку креативност професионалних математичара као (а) способност да се креирају оригинална дела која значајно доприносе проширењу области математике и/или (б) способност да се отворе нова питања којима ће се бавити други математичари. Релативна креативност или креативност са малим словом „к” односи се на открића појединаца у оквиру посебне референтне групе и на људску имажинацију која ствара нешто ново (Leikin, Kloss, 2011). По овом схватању, креативност није повезана само са оригиналним радом професионалних математичара, већ и са откривањем нечег за појединца новог, без обзира на то што су ти резултати већ познати другима (Sriraman, 2004). На пример, када ученици реше проблем на за њих нов начин, то се сматра креативним актом без обзира на то што су то решење или метода решавања познати другима. Математичка креативност се може уочити и када појединац генерише нестандартно решење проблема који се не може решити

уобичајеним стандардним методама (Chamberlin, Moon, 2005). Решавање познатих проблема на нов начин је пример креативне математичке активности ученика (Ervin, 1991). Срираман (Sriraman, 2005) формулише посебну дефиницију математичке креативности која одговара школском нивоу: математичка креативност се дефинише као (а) процес који резултира необичним, новим или проницљивим решењем датог проблема или њему аналогних проблема; и/или као (б) формулација нових питања и/или могућности које омогућавају да се стари проблем сагледа из новог угла.

Наставни прилаз у школској математици у великој мери зависи од тога који приступ креативности се наглашава. Међутим, оно што је суштински важно са гледишта учитеља и наставника јесте одабирање одговарајућих математичких задатака за ученике. Од добро изабраног проблема зависи да ли ће ученик бити вођен на одговарајући начин према генерализацији задатка учења и креирању новог знања и да ли ће усавршити своје способности решавања проблема и развијати креативно мишљење.

5.2. ИНДИКАТОРИ МАТЕМАТИЧКЕ КРЕАТИВНОСТИ

Без обзира на то што различити аутори различито одређују феномен креативности, међу њима ипак постоји релативна сагласност око битних индикатора који се сматрају дефинишућим одликама креативног мишљења и понашања, а који описују дивергентно мишљење (Квашчев, 1981). Гилфорд је препознао дивергентно мишљење као основну карактеристику креативности, односно сматрао је да што је дивергентно мишљење развијеније, то је особа креативнија (Huzjak, 2006). Појам креативности је стога дефинисао преко концепта дивергентног мишљења наглашавајући његове компоненте или способности као што су: флуентност, флексибилност, оригиналност, елаборација, редеофиниција и осетљивост за проблеме (Милићевић и сар., 2015). Ови индикатори, уколико се могу уочити код индивидуе, сугеришу да постоји развијена математичка креативност (Kozlowski, Chamberlin, Mann, 2019). Многим инструментима (скеале и тестови) који су намењени мерењу математичке креативности процењује се њихова интеракција. Са друге стране, креативно мишљење у области математике се може развијати ако се свака од наведених способности развија (Шпијуновић, 1994).

У овом поглављу размотрићемо сваки од наведених индикатора математичке креативности са посебним освртом на то како се ове способности могу развијати у настави математике.

Оригиналност

Један од индикатора математичке креативности је оригиналност (Beghetto, 2017; Kozlowski, Chamberlin, Mann, 2019; Silver, 1997). Оригиналност представља способност стварања и долажења до нових, необичних, статистички ретких, а понекада и духовитих одговора, решења и идеја (Маричић, 2006). Квашчев (1974) описујући оригиналност наводи да се она може односити на: проналажење или откривање нечег новог и необичног; методолошку оригиналност; проналажење удаљених одговора и решења који представљају резултат креативне генерализације; способност антиципирања нових идеја, одговора, решења, понашања; духовитост одговора и решења датог проблема (према Шпијуновић, 1994). Постоје различити критеријуми одређивања оригиналности. Строжи критеријуми као оригинално препознају само оно што се први пут појављује у свету и што доводи до корених промена од значаја за целокупно човечанство (Квашчев, 1981). Нама је од интереса други, блажи критеријум по коме се под оригиналним сматра све оно што се појављује први пут код неке индивидуе, без обзира да ли је то истовремено ново и за спољни свет. Од ученика се не може очекивати да дође до неких епохалних открића, али сваки пут када дође до нечег за њега новог или употреби познате податке на нов начин можемо говорити о оригиналности.

Математичка оригиналност се описује као способност појединца да пронађе пут решавања задатка који је јединствен и неуобичајен за постојећи ниво знања те особе (Kozlowski, Chamberlin, Mann, 2019; Siswono, 2011). На пример, то може бити онда када ученик користи методу решавања математичког задатка коју није имао прилике да пре тога упозна. Појединац показује оригиналност када креира решење које је необично, ретко и ново у некој математичкој ситуацији. Ученици нису у могућности да оригиналност испоље у раду са садржајима који су за њих потпуно нови и непознати и да откривају потпуно непозната правила, законитости, теореме. Оригиналност испољавају и примењују на већ познатим математичким садржајима кроз решавање задатака и то тако што их користе на нов, другачији и необичан начин, показују духовитост и досетљивост у њиховом коришћењу. Квашчев (1981) ово назива методолошка оригиналност.

Оригиналност, према томе, не произлази из садржаја којима ученик оперише док решава задатаке, јер се, као што смо већ напоменули, ради о садржајима познатим свим ученицима. Сваки ученик зна да сабере или помножи два броја, да нацрта дуж и слично. У питању је методски поступак и способност ученика да познате податке користи на нов и неуобичајен начин, а оригиналност није умањена тиме што је неко други пре тог

ученика тај исти задатак решио на исти или сличан начин. Важно је да се ученик сам први пут сусреће са задатком, да открива и примењује нов начин његовог решавања.

Један од неопходних предуслова за испољавање оригиналности јесте да ученици располажу солидном базом знања, односно математичким садржајима. Повезивањем елемената знања, правећи различите комбинације, можемо очекивати да дођу до решења неког задатка. Мада знања јесу важан предуслов, нису довољан, те је веома важно ученике оспособити да користећи их стварају оригиналне комбинације, а то можемо постићи ако их подстичемо да одређеним мисаоним операцијама траже нова решења, стичу нова знања и да о решењима размишљају из друге перспективе.

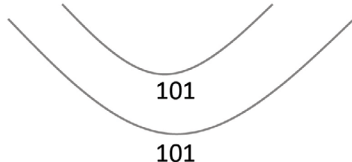
Шпијуновић (1994: 67) сматра да се оригиналност може развијати у млађим разредима основне школе јер су за ученике овог узраста „карактеристични ретки и духовити одговори, неочекиване асоцијације и необичне претпоставке”.

Наводимо неколико примера задатака у чијем решавању се може манифестовати оригиналност ученика.

Пример 1. Израчунати збир бројева од 1 до 100.

Решење. Класичан, а уједно и нерационалан начин решавања овог задатка било би сабирање редом свих бројева од 1 до 100. Оригиналност у прилазу овом проблему огледала би се у томе да се уочи да ако бисмо сабирали први и последњи број, други и претпоследњи итд. увек бисмо добили исти збир који износи 101 (Слика 17).

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$



Слика 17. Пример испољавања оригиналности ученика

Како постоји 50 оваквих парова, збир се може наћи једноставним множењем бројева 50 и 101.

Пример 2. Да ли је и за колико већи збир свих парних или збир свих непарних бројева прве стотине?

Решење. Сабирање редом свих парних, а затим свих непарних бројева прве стотине па њихово упоређивање представља један мукотрпан, спор и

нерационалан поступак. Међутим, уколико ученици уоче да је број свих парних и свих непарних бројева прве стотине исти (има их по 50), и да за сваки непаран број постоји паран број који је већи од њега за 1, поступак решавања биће релативно једноставан.

Бројеве можемо распоредити у два паралелна реда, један испод другог.

$$\begin{array}{l} 1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99 \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 98 + 100 \end{array}$$

Користећи правило о зависности збира од промене сабирака, можемо констатовати да ће збир свих парних бројева бити већи од збира свих непарних бројева за 50.

Пример 3. Премести једно палидрвце тако да добијеш тачну једнакост.



Слика 18. Пример испољавања оригиналности ученика

Решење. У овом примеру до изражаја долази досетљивост која се огледа у уочавању да је квадратни корен броја један једнак том истом броју. Напомињемо да је у питању пример намењен ученицима старијих разреда основне школе.

Оригиналност се обично испољава у математичким проблемима који се решавају помоћу једначина, дијаграма и аритметичким путем, проблемима кретања, превозења, маневрисања, мерења, у задацима-досеткама и слично.

Флуентност

Још један индикатор математичке креативности јесте флуентност. Не би је требало мешати са тзв. процедуралном флуентношћу, која се у настави користи да опише прецизно, ефикасно и флексибилно коришћење математичких процедура (Kozlowski, Chamberlin, Mann, 2019). Флуентност представља „способност за предлагање многих идеја при решавању проблема” (Jukić, 2005: 42). Гилфорд разликује флуентност идеја, изражајну флуентност, флуентност речи и асоцијативну флуентност

(Шпијуновић, 1994). Флуентност идеја објашњава као способност да се за одређено време произведе што већи број идеја. Изражајна флуентност се односи на способност уобличавања и развијања идеја речима, а флуентност речи на способност стварања нових речи. Асоцијативна флуентност је способност произвођења синонима и речи одређеног значења, као и проналажење речи са правим смислом значења.

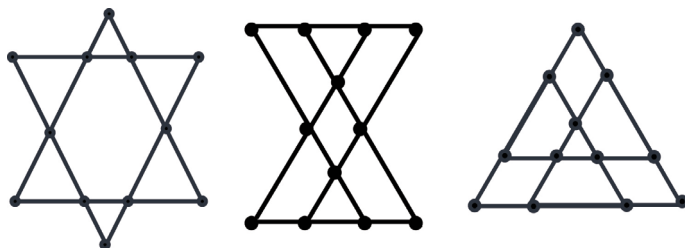
Када је у питању математика, можемо рећи да флуентност претпоставља способност ученика да приликом решавања задатка пронађе што већи број решења или начина, односно путева решавања задатка (Krutetskii, 1976). Флуентност се често квантификује бројем одговора, решења или начина решавања које је појединац у стању да конструише, без узимања у обзир оригиналности. Међутим, важно је да се пажња обрати не само на квантитет (број решења и начина решавања), већ и на квалитет решења и идеја.

Флуентност обично долази до изражаја у решавању логичко-комбинаторних задатака, задатака у којима се од ученика захтева састављање израза или једнакости, размештај задатог броја фигура, резање датих и састављање нових фигура, али и у решавању текстуалних задатака. Математички задаци (аритметички, алгебарски, геометријски) који имају више решења васпитавају гипкост мишљења и способност пребацивања са једне на другу мисаону операцију. Ови задаци доприносе превазилажењу укорењеног схватања да је за математику карактеристична апсолутна једнозначност (само један тачан одговор, само једно тачно решење или поступак решавања), строгост, догматичност, непогрешивост. Нажалост, у школској математици се ретко користе овакви задаци и постављају захтеви да се пронађе већи број решења.

У даљем тексту навешћемо примере неких задатака у којима долази до изражаја флуентност.

Пример 1. Распоређи 12 чуњева у 6 редова тако да у сваком реду буду по 4 чуња. Пронађи што више различитих решења. Представи их графички.

Решење.



Слика 19. Примери неких могућих решења

Ово су само нека од могућих решења која ученици могу дати. Студенти могу покушати да нађу још нека решења овог задатка.

Пример 2. На колико различитих начина помоћу пет једнаких цифара можеш написати број 100? Покушај да пронађеш што више решења.

Решење. Нека од решења до којих могу доћи ученици су:

$$111 - 11 = 100$$

$$33 \cdot 3 + 3 : 3 = 100$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$$

$$(5 - 5 : 5) \cdot 5 \cdot 5 = 100$$

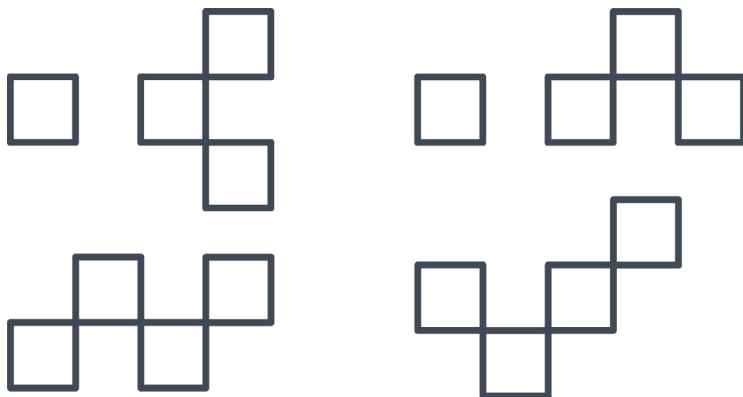
$$5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5) = 100 \text{ итд.}$$

Пример 3. Премести три штапића тако да добијеш четири квадрата. Пронађи што више различитих начина да то урадиш.



Слика 20. Пример са палидрвцима

Решења. На слици испод приказане су неке од могућности да се задатак реши.



Слика 21. Нека могућа решења задатка

Питање за студенте: Можете ли да пронађете још неко решење? Скицирајте га.

Флексибилност

Гилфорд и Квашчев разликују две врсте флексибилности: спонтану и адаптивну флексибилност (Шпијуновић, 1994). Спонтана флексибилност се описује као способност промене усмерености у мишљењу приликом решавања проблема, али у случају када та проблемска ситуација то не захтева изричито. Обухвата ослобађање од шаблона, стереотипа и клишеа у решавању задатака и уопште када је у питању мишљење, различити приступи решавању проблема и иницијативно тражење нових путева решавања. Адаптивна флексибилност (Квашчев је назива методолошка флексибилност) се, за разлику од спонтане, односи на промену усмерености у мишљењу у проблемским ситуацијама у којима се то изричито захтева, прекидање старих асоцијативних веза и проналажење нових, способност решавања проблема на различите начине и реструктурисање проблема.

У математици, флексибилност се односи на способност појединца да промени путању размишљања уколико наиђе на ћорсокак или неку препреку (Krutetskii, 1976; Leikin, Lev, 2007). Од значаја је пре свега адаптивна, односно методолошка флексибилност. Карактерише је гипкост мишљења, промена усмерености у мишљењу, напуштање установљених менталних диспозиција, прилагођавање измењеним условима задатка, ослобађање од шаблонског и стереотипног начина решавања. Флексибилност омогућава да се проблем или појава сагледају из другог угла, да се превазиђу уобичајени и установљени приступи проблему.

Појединац код кога није развијена ова способност наставиће да трага за решењем безуспешно користећи исти приступ решавања (Imai, 2010). Са друге стране, особа која показује високи ниво флексибилности ефикасно мења путању мишљења како би проблему приступила и сагледала га из новог угла. Неки типични примери флексибилности у мишљењу су када појединац промени смер размишљања, па уместо да ток мишљења иде од процеса ка решењу проблема, размишља обрнуто од решења ка процесу. Или, рецимо, када промени област математичког садржаја у проблему како би стекао увид у пут решавања.

У школама се традиционално од ученика тражи да серију задатака сличног типа решавају на један одређени и исти начин користећи одговарајући поступак, односно алгоритам, и то све док га потпуно не усвоје. На овај начин ученици се оспособљавају да механички користе ту методу решавања, а не да сами процене у којим ситуацијама и под којим условима је има смисла применити. Креативност је неалгоритамско доношење одлука (Ervynck, 1991), и на овај начин се не развија креативно мишљење.

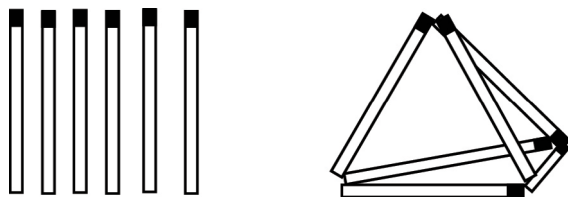
Ученици млађег школског узраста још увек нису стекли навику да механички примењују научена правила и принципе и још увек показују тенденцију да изналазе различите и сопствене приступе, путеве и методе решавања задатака (Шпијуновић, 1994). Захтеви да се размишља по шаблону, да се увек иде сигурним путем решавања задатака резултирају укалупљивањем мишљења, блокирањем флексибилности и спречавањем креативног расуђивања.

Флексибилност се на часовима математике може развијати тако што ће наставници оспособљавати и охрабривати ученике да проналазе различите путеве и методе решавања математичких задатака. На тај начин спречиће се фиксираност мишљења и онемогућиће се учвршћивање једног начина и методе решавања. Чак и када постоји само једно тачно решење (или одговор) неког математичког проблема, ученици могу такве задатке решавати на различите начине.

Приказаћемо неке математичке задатке у којима се испољава флексибилност у мишљењу.

Пример 1. Од шест датих палидрваца направити 4 једнакостранична троугла.

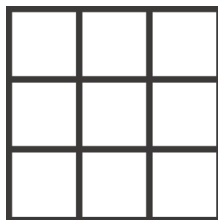
Решење. Да би се решио дати проблем неопходно је да се напусти стереотипни начин размишљања. У овом случају то је фокусирање на решавање датог проблема у равни, односно у две димензије. Ученици обично покушавају да распореде палидрвца у једној равни и тако добију четири једнакостранична троугла.



Слика 22. Решење задатка које захтева флексибилност у мишљењу

У тренутку када дође до промене дирекције у мишљењу и када се мишљење ученика измести у простор (три димензије), можемо очекивати да ће ученици доћи до решења (Слика 22).

Пример 2. Пребројте колико на датој слици има дужи, а колико квадрата.



Слика 23. Уочавање и пребројавање свих дужи и квадрата

Решење. Приликом решавања задатака оваквог типа ученици се обично фокусирају на дужи и квадрате одређене суседним тачкама. Флексибилност у мишљењу огледа се у еластичнијем приступу у уочавању тражених елемената и увиђању да могу бити одређени и несуседним тачкама.

Пример 3. Користећи четири једнаке цифре, симболе рачунских операција и заграда напиши бројевне изразе чија је вредност 1.

Решење. Нека од решења која могу дати ученици су следећа:

$$(2 + 2) : (2 + 2) = 1$$

$$(3 + 3) : (3 + 3) = 1$$

$$(4 \cdot 4) : (4 \cdot 4) = 1$$

$$(8 + 8 - 8) : 8 = 1$$

$$77 : 77 = 1$$

$$55 : 55 = 1 \text{ итд.}$$

У овом задатку лако је уочити да флуентност долази до изражаја кроз број одговора које ученици дају. Флексибилност се, са друге стране, манифестује у давању другачијих категорија одговора, односно решења која рефлектују другачије математичке идеје и приступе, што указује на промену дирекције у мишљењу. На пример, решења $(2 + 2) : (2 + 2) = 1$ и $(8 + 8 - 8) : 8 = 1$, као и $(2 + 2) : (2 + 2) = 1$ и $77 : 77 = 1$ представљају различите категорије одговора. Са друге стране, решења $(2 + 2) : (2 + 2) = 1$ и $(3 + 3) : (3 + 3) = 1$ припадају истој категорији, ученици су користили исте рачунске операције, само друге бројеве.

Редефиниција

По Гилфорду, редефиниција представља способност да се пронађу нове функције објеката или делова објеката и да се познати предмети

употребе на нов, необичан начин (Шпијуновић, 1994). Када је у питању математика, редефиниција представља способност да се односи и подаци у задатом проблему употребе на другачији, нов начин, са циљем да се лакше дође до решења (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). При томе, најчешће се врши језичка преформулација задатка, да би задатак био ближи деци и лакше решен. Ово значи да суштина редефиниције не лежи у било каквој језичкој преформулацији датог математичког задатка, већ у мисаоном процесу анализирања тог задатка у ком се његови елементи (познати, непознати подаци, услов) јављају у новом својству, новим појмовним карактеристикама из којих следи нова формулација (Шпијуновић, 1994). Разумети структуру нечега значило би да смо у стању да уз једну чињеницу вежемо низ других чињеница које су са њом у блиској, разумљивој, смисленој вези, односно да разумемо природу везе између елемената те структуре (Брунер, 1976).

Погледајмо на неколико примера како се у задацима манифестује ова способност.

Пример 1. Путник је прешао једну трећину пута, а остало му је да пређе још 120 km. Колики је цео пут?

Решење. Ученици би требало да уоче да пошто је путник прешао једну трећину пута, то значи да му је остало да пређе још две трећине. Та дужина износи 120 km. Могућа редефиниција, односно преформулација задатка је: Две трећине једног пута износе 120 km. Колика је дужина целог пута?

У процес решавања задатка увели смо нов елемент, „две трећине”, који није био директно дат у тексту првобитне верзије задатка, односно био је „скривен”. До овог елемента могуће је доћи само ако се схвати и разуме суштина задатка и функције свих датих елемената. Након преформулације задатка, његово решавање постаје једноставно. Ако две трећине пута износе 120 km, онда једна трећина пута износи 60 km ($120 \text{ km} : 2 = 60 \text{ km}$). Дужина целог пута биће $3 \cdot 60 \text{ km} = 180 \text{ km}$.

Пример 2. Драган, Петар и Јанко трчали су штафету. Драган је сам претрчао пола стазе, јер је најбољи тркач. Петар је претрчао 200 метара, а Јанко 150 метара. Колика је дужина стазе?

Решење. И у овом случају требало би уочити податак који није директно дат у задатку, који је „скривен”, а то је могуће ако су ученици разумели везу између свих датих података. Из чињенице да је Драган претрчао половину стазе следи да су Петар и Јанко такође претрчали половину стазе. Пошто је Петар претрчао 200 m, а Јанко 150 m, то значи да половина стазе има дужину: $200 \text{ m} + 150 \text{ m} = 350 \text{ m}$.

Цела стаза има дужину: $2 \cdot 350 \text{ m} = 700 \text{ m}$

Пример 3. За 7 година Михајло и Павле имаће укупно 74 године. Колико година има сваки од њих, ако знамо да је Михајло два пута старији од Павла?

Решење. Поред значења директно датих података, потребно је разумети и значење оних који нису експлицитно наведени, односно чије значење је прикривено. На пример, из чињенице да ће кроз седам година Михајло и Павле имати укупно 74 године следи да данас имају $74 - 7 - 7 = 60$ година. Пошто је Михајло два пута старији од Павла, њихове године записаћемо на следећи начин:

Павле: x година

Михајло: $2 \cdot x$ година

Укупно имају: $x + 2 \cdot x = 60$

Решавањем једначине добијамо да Павле има 20, а Михајло 40 година.

Осетљивост за проблеме

Гилфорд дефинише осетљивост за проблеме као „способност откривања и формулисања проблема у недоживљеним проблемским ситуацијама” (Квашчев, 1974: 10, према Шпијуновић, 1994). Сматра се да ће ова способност бити развијенија код ученика уколико су оспособљени да ништа не примају верујући оном који их учи, већ да до знања долазе кроз своје искуство и истражујући. Када говоримо о математици, осетљивост за проблеме представља способност да се уочи оно што је необично у задатку, да се уоче грешке, као и противуречни, сувишни и непотпуни подаци, и да се процени реалност добијеног решења (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). Развијању ове способности може допринети решавање задатака као што су задаци-досетке, задаци са дешифровањем рачунских операција са вишецифреним бројевима, магичним фигурама, бројевним низовима итд.

Наводимо неколико примера у којима до изражаја долази осетљивост за проблеме.

Пример 1. У корпи се налазе три јабуке. Мајка их је поделила тројици синова. Свако је добио по једну јабуку и једна је остала у корпи. Како је то урадила?

Решење. Подаци који су дати у задатку наводе ученике да закључе да постоји противуречност. Наиме, ако је мајка сваком сину поделила по једну јабуку и једна је остала у корпи, следи да постоје четири, а не три јабуке као што је наведено у задатку. Задатак је могуће решити, а битно је да ученици уоче да условом задатка није наглашено да нико од синова није добио и корпу. Дакле, два сина су добила по једну јабуку, а трећи корпу са јабуком.

Пример 2. На грани је било 10 птица. Ловац је пуцао и убио четири. Колико је птица остало на грани?

Решење. У питању је класичан пример задатка у коме се испољава осетљивост за проблеме. Већина ученика ће веома брзо израчунати да је на грани остало шест птица. Мањи број ученика обратиће пажњу на формулацију питања у задатку, а то је колико је птица остало на грани, а не колико птица није упуцано, те ће закључити да на грани није остала ниједна птица, односно да су се након пуцња остале птице разбежале.

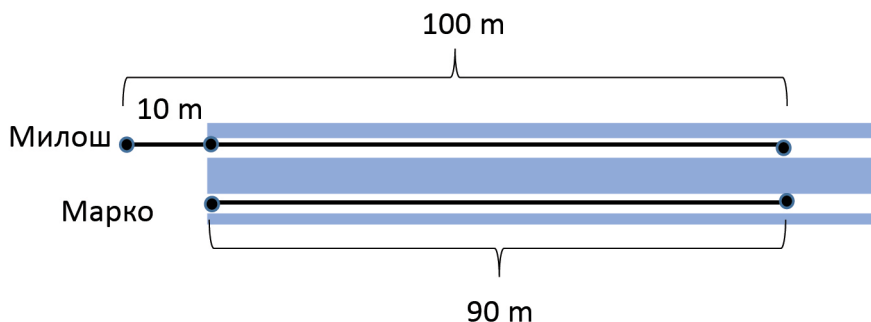
Пример 3. Милош и Марко се такмиче у трчању на 100 m. На циљ први стиже Милош са предношћу од 10 m. Договоре се да понове трку, али да се Милош повуче 10 m иза стартне линије. Ако трче истом брзином као у претходној трци, да ли ће стићи на циљ истовремено?

Решење. Два податка из задатка могу да упуте ученике на погрешан закључак да су Милош и Марко истовремено стигли на циљ:

Милош је у првој трци победио са 10 m предности

У другој трци дао је предност Марку од 10 m.

Погледајмо зашто је закључак да су обојица стигла на циљ истовремено погрешан.



Слика 24. Графички приказ података и услова у задатку

Чињеница да Милош стиже на циљ са 10 m предности у односу на Марка значи да док Милош претрчи 100 m, Марко за исто време претрчи 90 m. Пошто Милош даје Марку предност од 10 m, следи да је на удаљености 10 m од циља Милош прешао 100 m, а Марко 90 m (Слика 24). Дакле, у том тренутку обојица су од циља удаљена 10 m. Последњих 10 m претрчаће брже Милош јер је бржи тркач.

Пример 4. Два бицикла крећу се један другом у сусрет брзином од 15 km на час. Када се они један од другог налазе на растојању од 60 km, са управљача једног бицикла слети мува и брзином од 20 km на час лети право ка бициклу из супротног смера. Кад га је достигла, она се окреће и лети у

супротног смеру ка првом бициклу и, долетевши до њега, опет се окреће и тако стално лети од једног ка другом бициклу и обрнуто. Колико ће километара прелетети мува?

Решење. Формулација задатка и наглашавање чињенице да је мува стално летела од једног ка другом бициклу упућују да је, како би се одредила укупна дужина пута који је мува прелетела, потребно израчунати дужину сваког лета посебно. Ово би значило да је потребно узети у обзир и број свих извршених летова и њихову дужину, која се у сваком прелету мењала. Међутим, овај задатак се може једноставно решити уколико се занемари небитно, а то је управо претходно наведено, и ако се пажња усмери на следећа три податка: почетно растојање између два бицикла (60 km), брзина којом се крећу један друге у сусрет (15 km на час) и брзина којом лети мува (20 km на час).

На основу прва два податка одредићемо после ког времена ће се срести бицикли (срешће се након два часа). Пошто мува за један час пређе 20 km, за два часа прећи ће дупло више, односно 40 km.

Елаборација

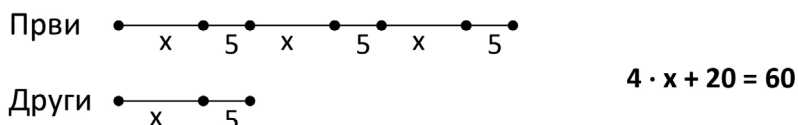
Гилфорд описује елаборацију као способност разраде рада, односно развијања оригиналног рада у целини на основу новооткривених идеја (Квашев, 1974, према Шпијуновић, 1994). У математици, елаборација представља способност да се проблем реши на тај начин што ће се подаци и идеје у проблему допунити новим идејама и подацима (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). То је способност обогаћивања и развијања идеја или допуњавања проблема детаљима како би био једноставнији за решавање (Jaenudin et al., 2020). Елаборација се описује и као способност појединца да пружи дубинско резонување о путањи решавања проблема. За разлику од оних креативних појединаца који интуитивно долазе до оригиналних решења, особа која показује високе показатеље елаборације моћи ће да образложи математичко расуђивање и да пружи смисаоно објашњење због чега је нађено решење одговарајуће (Kim, Cho, Ahn, 2003). Елаборација може да дође до изражаја у решавању логичких задатака или задатака који захтевају примену индиректних метода решавања (помоћу дијаграма, графикона, табела, дужи, итд.).

Илустроваћемо два примера математичких задатака у којима се испољава елаборација.

Пример 1. У два суда укупно има 60 литара воде. Ако се из првог суда преспе у други 5 литара воде, онда ће у првом суду бити три пута више воде него у другом. Колико је воде било у сваком суду пре пресипања?

Решење. Овај задатак је лакше урадити уколико се подаци приказани у задатку представе помоћу одговарајућег индиректног модела (метода дужи). Коришћење графичког приказа, односно дужи, помаже ученику да боље уочи и сагледа основне елементе проблема и њихове међусобне односе. Графички приказ омогућава да се подаци у задатку допуне сегментима који нису на први поглед уочљиви и препознатљиви. Конкретно, у овом примеру креће се од тога да се помоћу дужи дужине x приказује количина воде у другом суду (Слика 25). На основу модела, лако се долази одговарајуће једначине, а тиме и до решења задатка.

Након пресипања



Слика 25. Примена методе дужи

Пример 2. Састала се тројица занатлија: лимар, столар и бравар. Лимар је најмлађи и нема ни браће ни сестара. Костић је ожењен Зарићевом сестром, а старији је од столара. Одреди њихова занимања, ако су презимена занатлија: Зарић, Костић, Савић.

Решење. Слично као у претходном примеру, и у овом се користи одговарајући индиректни модел како би се лакше уочио однос између датих и тражених података. Применом методе таблица, допуњују се познати подаци о занатлијама са новим везама (Слика 26).

	Лимар	Столар	Бравар
Зарић	–	+	–
Костић	–	–	+
Савић	+	–	–

Слика 26. Примена методе таблица

5.3. МАТЕМАТИЧКА КРЕАТИВНОСТ И НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

Креативност је тема која се често занемарује у настави математике. Наставници обично мисле да је логика у математици на првом месту, а да креативност није толико важна у учењу математике. С друге стране, ако узмемо у обзир математичара који долази до нових резултата у математици, не можемо занемарити његово коришћење креативног потенцијала. Какав је онда значај креативности у оквиру школске математике?

Наставници много говоре о креативности, али је мало оних који је одобравају код својих ученика, а још је мањи број оних који код својих ученика васпитавају ову особину. Често се испоставља да су креативни ученици они за које наставници сматрају да су „чудновати“, да не разумеју очигледне истине, да не могу да усвоје оно што други с лакоћом усвајају. Описују их као ученике којима на памет падају чудновате идеје, који о свему имају своје мишљење и свој став који се најчешће веома разликује од уобичајеног. Њихови поступци и активности су несхватљиви већини ученика, наставника и родитеља. Велики је број истакнутих личности које у току школовања наставници нису примећивали. Креативним особама немогућност директног усвајања било ког садржаја смета да прихвате „очигледне“ истине. То је разлог зашто им је теже да уче него да креирају.

На почетку школовања свако дете се одликује жељом да стваралачки мисли. Радознало је, у потрази за новим и непознатим. Дешава се да школа на изврстан начин спутава огромну дечју радозналост и жељу за сазнавањем света и појава. Креативност је нешто што може бити уништено у току живота, како у младости, тако и у зрелом добу. Појединац најчешће тих околности није свестан. Није способан да види оно што је могао постати, а ни оно што је, можда, било изгубљено или му недостаје. Нека истраживања (Мајер, Вернон, Торенс, Андерсен, Пијаже и др.) указала су на чињеницу да способности стваралачког мишљења деце опадају са њиховим узрастом (Шпијуновић, 2005). Млађа деца углавном испољавају већи степен креативности од старије деце. У прилог овоме иде и то да је велики број познатих математичара своје стваралаштво испољио управо у раној младости и детињству (Дејић, Ђебић, Михајловић, 2009). Торенс (према Шпијуновић, 1994) је утврдио да креативно мишљење у већини случајева бележи пораст од првог до трећег разреда, а онда нагли пад на почетку четвртог разреда, поновни раст за време петог и шестог разреда и још један пад на почетку седмог разреда.

Ово би се можда могло објаснити начином на који ученици уче математику. Наиме, у редовној настави има много стереотипног, а мало простора се даје истраживачком раду. Интелектуалне могућности ученика

се превише оптерећују и исцрпљују меморисањем чињеница, појмова и правила, а веома мало пажње се посвећује развијању и неговању креативног мишљења. И сам наставник је често спутан преопширним програмом и неадекватним материјалним и техничким условима. У учионицама се мишљење ученика усмерава у једном правцу, не допушта се одступање од уобичајеног, често шаблонског начина решавања математичких проблема и тако се пропуштају прилике повољне за развој креативног мишљења.

Велики допринос истраживању креативног мишљења у области математике у нашим условима дао је Радомир Квашчев (1981). Поред тога што је указивао на природу и карактеристике стваралачког мишљења, Квашчев је указао и на путеве којима се стваралачко мишљење може развијати. У својим истраживањима он је показао да се поједине компоненте стваралачког мишљења могу развијати одговарајућим вежбањем. Шпијуновић (1994) такође наводи да се стваралачко мишљење може развијати у процесу математичког образовања ако се развија свака од способности (флуентност, флексибилност, оригиналност, елаборација, редифиниција и осетљивост за проблеме).

Креативност не треба схватити као нешто што је својствено само изузетним појединцима, већ као оријентацију и тенденцију према математичкој способности чији се развој може подстаћи у широј школској популацији (Silver, 1997). Развијање креативности представља један од најважнијих задатака математичког образовања. Овome можемо допринети коришћењем различитих облика, средстава и метода рада, при чему нарочито важну улогу има решавање и постављање проблема, самим тим и проблемска настава, али и учење откривањем, диференцирана, индивидуализована и пројектна настава.

5.4. РАЗВИЈАЊЕ И ПОДСТИЦАЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ КРЕАТИВНОСТИ

Још од најранијих дана код деце треба развијати особине својствене ствараоцима у области математике. На развијање компоненти стваралачког мишљења може се утицати изразом адекватних математичких задатака и проблема. Једна таква врста математичких проблема су проблеми отвореног типа о којима смо раније писали. Дивергентно мишљење, које представља једну од карактеристика креативног мишљења, Гилфорд (Guilford, 1967, према Sak, Maker, 2005) дефинише као акт трагања за разноврсношћу у решавању проблема без једног фиксираног одговора или размишљање у различитим перспективама. По њему, дивергентно мишљење повећава могућност доласка до оригиналних мисли. Зато што

охрабрује дивергентне мисли, проблем отвореног типа даје допринос рас-
пламсавању (појачавању) дивергентног мишљења. У току трагања за ра-
зличитим решењима и разноврсним приступима и стратегијама, учени-
ци могу слободно доћи до многих идеја (флуентност), могу покушавати
да развију (измисле) нове и другачије стратегије за бављење проблемом
тамо где оне које су применили не успевају (флексибилност) и могу сми-
слити веома паметне и неочекиване идеје (оригиналност). Једном речју,
проблеми отвореног типа су веома ефикасни у неговању математичке
креативности. Истраживања потврђују да решавање проблема отвореног
типа доприноси развоју способности дивергентног мишљења као што су
флуентност, флексибилност, оригиналност, елаборација (Kwon, Park, Park,
2006; Михајловић, 2012).

Осим решавања проблема, велики значај се даје и постављању, фор-
мулисању проблема. Постављање проблема представља по многим ва-
жну карактеристику креативне активности и изузетног талента. Адамар
(Hadamard, 1945) истиче да је способност идентификовања кључних пи-
тања истраживања индикатор изузетне даровитости у области матема-
тике. Дакле, можемо рећи да постављање проблема, заједно са њиховим
решавањем, има централну улогу за област математике и математичко
мишљење уопште. У литератури наилазимо на један број експеримена-
та у којима ученици самостално генеришу проблеме које затим решава-
ју они сами, њихови вршњаци из одељења или нека наредна генерација
ученика (Silver, 1997). Ван дер Бринк (Van der Brink, 1987) описује један
такав експеримент који је реализован са ученицима првог разреда јед-
не основне школе у Холандији. Ученици су креирали и илустровали једну
страну са аритметичким задацима намењену деци која ће наредне године
уписати први разред. Хили (Healy 1993) изводи сличан експеримент са
ученицима средње школе у САД који назива „Направи књигу”. Ученици
уче геометријске садржаје, при чему не користе комерцијални уџбеник,
већ праве свој сопствени уносећи у њега све оно до чега долазе истражи-
вањем. Скинер (Skinner, 1991) слично томе ангажује ученике првог разре-
да у постављању проблема који чине базу за касније активности решава-
ња проблема. Ангажовање ученика у постављању и решавању проблема
у свим овим случајевима подстиче развој флуентности, једне од кључних
карактеристика креативности. На развој флуентности, као што смо већ
поменули, може се утицати и решавањем неструктурираних, отворених
проблема (Silver, 1997). Проблеми отвореног типа нуде ученицима мо-
гућност постављања већег броја циљева и давања вишеструких тачних
одговора. Чак и једноставнији примери проблема отвореног типа могу
деци понудити значајне прилике да се баве проблемима са вишеструким
интерпретацијама и могућим решењима. На пример, задатак који гласи:

Полујречник круџа уписаној у квадрати износи 5. Израчунај површину квадрата једноставном преформулацијом можемо трансформисати у проблем отвореног типа: Полујречник круџа уписаној у квадрати износи 5. Нађи све могуће јодајке о квадрату и кружу. Многи аутори указују на потенцијалну корист решавања проблема код којих није наглашен циљ.

Овакав приступ настави у коме проблеме генеришу сами ученици тежи да ангажује ученике у постављању и решавању проблема. Као резултат, ученици треба да развију своју репрезентациону и стратегијску флуентност. Генерисањем многобројних решења датог проблема ученици развијају и креативну флексибилност. Сложени, неструктурирани проблеми, односно проблеми отвореног типа, али и неки много једноставнији, могу ученицима пружити прилику за употребу различитих метода и стратегија решавања. Ученици индивидуално или у групама решавају проблем. Након тога, презентују се алтернативни приступи решавању проблема и дискутује се о њима на нивоу разреда. Ово омогућава ученицима да упознају друге методе долажења до решења и самим тим да повећају своју флексибилност у прилазу проблему.

Многа од поменутих искустава у постављању и решавању проблема могу се користити и да се код ученика развијају разумевање важности и способност стварања оригиналних решења, метода решавања или проблема. Још један приступ настави који подстиче развој флексибилности јесу проблем-варијације (видети поглавље 3.2), тачније „Шта-ако-је?” и „Шта-ако-није?” приступ (Brown, Waters, 1983). Подсетимо се, овај приступ се састоји у томе да ученици генеришу нове проблеме из претходно решених варирајући услове или циљеве оригиналног проблема. На пример, код „Шта-ако-није?” приступа, можемо охрабривати ученике да варирајући услове и циљеве неког познатог, створе проблем различит од било ког до тада генерисаног.

Иако креативност игра важну улогу у настави математике, наставници сматрају да је наставу путем постављања и решавања проблема тешко применити у учионици. Отежавајућа околност је и чињеница да материјала намењеног оваквој врсти наставе има много мање него оног који подржава процедурални и механички приступ школској математици. Још један проблем са којим се срећемо у нашим основним школама јесте и то да већина наставника и учитеља сматра да постоји само један тачан одговор у математици и само један „прави” начин да се неки математички проблем реши. Дobar наставник је онај који зна да постоји велики број могућности да се приступи решавању неког проблема. Став наставника у великој мери утиче на развијање креативности ученика у настави математике. Наставник мора да прихвати, уважи учеников прилаз

проблему без обзира на то што се он разликује од других, уобичајених. Ученицима увек треба омогућавати, када нам то програмски садржаји дозвољавају, да сами изводе правила, алгоритме и формулишу нове проблеме и питања.

Бројни аутори предлажу различите облике или начине развијања креативности (Fetterly, 2010). Никерсон (Nickerson, 1999) сматра да су за развијање креативности битна следећа поступања наставника: успостављање сврхе и намере учења; изграђивање базичних вештина; охрабривање стицања специфичног знања у области; стимулисање и награђивање радозналости и истраживачког духа; изграђивање мотивације (нарочито унутрашње); охрабривање самопоуздања и воље за преузимањем ризика; стављање фокуса на вештине и самотакмичење; подстицање и подржавање позитивних уверења о креативности; обезбеђивање прилика за избор и откриће; развијање метакогнитивних вештина; подучавање техникама за поспешивање испољавања креативног понашања. Стернберг (Sternberg, 1996, према Fetterly, 2010) нуди наставницима дванаест стратегија да учине своје ученике креативнијим: (а) бити узор, модел за креативност, (б) охрабривати преиспитивање претпоставки, (в) дозвољавати грешке, (г) охрабривати разумно преузимање ризика, (д) дизајнирати креативне задатке и начин оцењивања, (ђ) омогућити ученицима да сами дефинишу проблеме, (е) награђивати креативне идеје и производе, (ж) пружити довољно времена за креативно мишљење, (з) охрабривати толеранцију на неодређеност, (и) истицати да се креативни мислиоци стално срећу са препрекама у свом раду, (ј) имати вољу за развијањем, рашћењем и (к) препознати да је креативним мислиоцима потребно подстицајно окружење.

Креативан наставник је онај који ствара креативне ученике (Aiken, 1973). Наставник који подстиче креативност поставља математичке проблеме и питања вишег реда која омогућавају рефлексiju, охрабрују дискусију у групама и целом разреду и обезбеђују могућности за посматрање и истраживање математичких веза. Охрабривање ученика у налажењу разноврсних метода, алтернативних алгоритама или јединствених решења проблема утиче позитивно на повећавање њихових способности решавања проблема и на дивергентно мишљење, нарочито у основној школи (Jensen, 1976, према Fetterly, 2010). С обзиром на то да су решавање и постављање проблема суштински и у складу са природом саме математике (као и математичког мишљења), Силвер (Silver, 1997) сугерише да се математичка креативност може и треба развијати истраживачком наставом математике која користи неструктуриране проблеме или проблеме отвореног типа током процеса њиховог решавања и постављања. На тај начин наставници помажу ученицима да прошире и развију репрезентациону и

стратегијску флуентност и флексибилност и да користе креативне приступе у својим математичким активностима. Срираман (Sriraman, 2004) сматра да је идентификовање и гајење креативног талента у математичкој учионици један од највећих интереса у пољу математичког образовања. Он наводи речи Ђерђа Поље да између рада ученика који покушава да реши неки тежак математички проблем и стваралаштва (инвенције) постоји разлика само у степену. Креирање оригиналне математике захтева висок ниво мотивације, упорности и рефлексije, а све ово се сматра индикаторима креативности. Срираман примећује да већина аутора који су се бавили овом темом указује како најкреативније појединце привлачи комплексност, чега у школској математици и програмским садржајима има веома мало. Школска математика и предвиђени наставни програм ретко користе проблеме са таквим математичким структурама које би од ученика захтевале дуготрајно ангажовање и самосталност у формулацији решења. Ученицима би требало дати прилику да се баве нерутинским проблемима који су комплексни и богате структуре, проблемима који захтевају не само мотивацију и упорност већ и значајну рефлексiju. Срираман (Sriraman, 2005) наводи да је, за испољавање креативности ученика, неопходно придржавати се следећих пет принципа:

- гештalt принцип – слобода од времена и покрета;
- естетски принцип – схватање вредности и лепоте необичног решења уз успостављање релација са уметношћу и науком;
- принцип слободног тржишта – охрабривање преузимања ризика и нетипичног мишљења;
- принцип учења – схватање креативности као доприноса, изазова познатим парадигмама и проширивања постојећег знања;
- принцип несигурности – проблеми отвореног типа или „лоше” постављени проблеми и толеранција на неодређеност.

Креативан наставник математике користи проблеме који су оријентисани ка коришћењу и продубљивању искуства и охрабрује формулисање хипотеза и самостално расуђивање о решењима (Aiken, 1973). На овај начин, наставник приписује велику вредност креативним напорима ученика и зна када и како да им помогне. Наставник који поштује ученика и показује да верује у његове мисаоне способности, подстиче ученика да самостално дође до одговарајућих математичких открића. Рид (Reed, 1957, према Fetterly, 2010) издваја десет питања која један добар и креативан наставник треба да постави себи. Ова питања могу бити смернице и практична упутства наставницима да створе такву атмосферу у учионици која ће охрабрити и подстицати креативно мишљење ученика.

- 1) Да ли помажем својим ученицима да идентификују аритметичке проблеме који су значајни за њих у животним ситуацијама?
- 2) Да ли дајем својим ученицима довољно времена да се мисаоно ангажују у решавању проблема пре него што им предложим методе решавања?
- 3) Да ли својим питањима охрабрујем ученике да самостално размишљају?
- 4) Да ли охрабрујем ученике да трагају за решењима проблема, а не за једним решењем?
- 5) Да ли показујем интересовање и одобравање за креативне напоре ученика чак и када су њихови одговори и решења незадовољавајући?
- 6) Да ли вреднујем креативно мишљење у истој мери као што вреднујем тачне одговоре на проблеме који захтевају примену алгоритама (дрил проблеме)?
- 7) Да ли охрабрујем ученике да врше евалуацију сопствених метода решавања проблема?
- 8) Да ли уочавам и препознајем разлике у способностима ученика да задатак реше на креативан начин?
- 9) Да ли чиним свесне напоре да помогнем ученицима да схвате да је аритметика квантитативан начин мишљења који нуди прилике за креативно мишљење?
- 10) Да ли уочавам креативност у својим наставним методама, начину на који организујем садржај курикулума и у свом личном понашању?

У свом виђењу математичке креативности, користећи четворетапни гешталтистички модел, Пар (Parry, 1974, према Fetterly, 2010) објашњава да феномен математичког стваралаштва има импликације не само за математичаре као научнике, већ и за наставу математике. У првој етапи препарације потребна су два основна фактора – знање и интуиција. Настава обично наглашава знање, али може подстаћи и поспешити интуицију тако што ће за ученике обезбедити ситуације које ће им омогућити давање претпоставки о неким математичким сценаријима. Ово захтева да атмосфера у учионици буде пуна подршке. Током периода инкубације, ум се одмара и ставља у други план сувишне информације, тако да се путања решења проблема „осветљава”. Пар охрабрује наставнике математике да у овој етапи раздију процес на краће периоде, тако што ће презентовати одговарајуће и битне информације. То води у наредну етапу, етапу илуминације, у којој постоји стварна креативна активност, која није

апсолутно логичко-интелектуална активност, већ представља *аха* ефекат креативности, односно открића. Током финалне, етапе инкубације, ученици треба да разговарају, дискутују о математици, о њеној лепоти, естетици и елеганцији.

Традиционално лоша страна школске математике јесте пренаглашавање дрила кроз израду рутинских задатака. Креативности треба времена да се развије и она се развија на основу искуства (Mann, 2005). Ово се надовезује на Силверову тврдњу (Silver, 1997) да се креативност пре повезује са дугим периодима рада и рефлексije, него са изненадним увидом и да је подложна утицају наставе и искуства. Штавише, Хејлок (Haylock, 1997) износи да је превазилажење фиксација у мишљењу (и оних које се тичу садржаја, и оних које се тичу алгоритама) битно за стварање дивергентних производа и представља нешто што дотиче саму срж математичке креативности. Механичко извршавање алгоритама у математици, ригидност у решавању проблема и фиксација у мишљењу инхибирајући су фактори који шкоде томе да новим проблемима приступамо на имажинативан начин (Fetterly, 2010). Велики број аутора је сагласан да неструктурирани проблеми, проблеми отвореног типа или проблеми са више решења, заједно са постављањем проблема, у великој мери подржавају и подстичу математичку креативност у учионицама.

5.5. ПРОЈЕКТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И КРЕАТИВНОСТ

Памћење чињеница и процедура јесте значајно, али није довољно за развој и успех у савременом друштву. Вештине као што су решавање проблема, критичко мишљење, креативност, способност сарадње данас постају битније више него икада раније. Као што смо већ истакли, решавање проблема представља једну од кључних вештина коју морају развити сви ученици како би се припремили за живот и рад у 21. веку. Решавање проблема је и суштина учења математике јер кроз овај процес ученици стичу неопходне математичке вештине и функционална знања. Способност креативног мишљења је једна од вештина мишљења повезаних са когнитивним способностима и способношћу решавања проблема. Креативност и способност решавања проблема су неопходни појединцу како би на одговарајући начин одговорио на бројне изазове у свакодневном животу. Како би се подстакле и развиле ове вештине, неопходно је применити одговарајуће наставне моделе и приступе који ће ученицима обезбедити искуствене активности које подстичу активно истраживање кроз интердисциплинарни интегрисани курикулум. Један од наставних модела који се показао ефективним за развијање наведених вештина и способности јесте пројектна настава (Lou et al., 2017; Rehman et al., 2023).

Пројектна настава представља наставни приступ који охрабрује и ангажује ученике у решавању неких аутентичних, реалних проблема кроз истраживање, сарадњу и креативност. Подстиче ученике да заједно креирају одређени продукт на основу сопственог искуства, саопштавају своје резултате и постану добри у решавању проблема (Adikayanti, Retnawati, 2022). Предност овог приступа је то што интегрише теорију и праксу и на тај начин обликује смислено учење које омогућава ученицима да примене знања и вештине у решавању проблема из реалног света. Још једна добра страна овог приступа је што омогућава ученицима да развију математичко мишљење, расуђивање и комуникационе вештине, као и да повежу математику са другим дисциплинама и контекстом.

Пројектна настава настала је крајем 19. века под утицајем Пијажеових истраживања и заснована је на идеји да би појединац требало да конструише знања на основу сопственог искуства. Термин *пројектна настава* у образовну праксу и литературу увели су педагози Џон Дјуи и Вилијам Х. Килпатрик. Пројектну наставу називали су и „образовањем искуством”, а проистекла је из тежње да се у традиционалну наставу уведу истраживачке методе којима би се активност ученика повећала. Мада постоје бројне дефиниције пројектне наставе, најједноставније речено, то је метода решавања проблема која од ученика захтева самосталну активност, као и писани траг о томе (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022). У пројектној настави долази до повезивања познатог и непознатог, учења помоћу примера (егземпларно учење), учења примењивањем знања, као и комбиновања логичког и креативног мишљења. Подстиче развој истраживачких, комуникационих, организационих и критичких способности ученика.

Пројектна настава је усмерена на ученика и обухвата дизајнирање, планирање и примену пројекта који се бави неким изазовним питањем или проблемом. Пројекат је обично интердисциплинарни, интегративни и релевантан за потребе и интересовања ученика. Од ученика тражи да примене своја претходна знања и вештине, као и да стекну нова кроз истраживање, испитивање и рефлексију. Може обухватити различите форме евалуације, као што су самоевалуација, повратна информација од наставника и вршњака, као и финални продукт или презентација која покажује шта је ученик научио и које вештине је стекао.

Примена пројектне наставе у математици има бројне предности и за ученике и за наставнике. Може мотивисати и активирати ученике да се баве математиком тако што је чини за њих смисленом, релевантном и занимљивом. Штавише, подстиче дубље разумевање математичких појмова тиме што омогућава ученицима да истражују, откривају и примењују је у реалним ситуацијама. Додатно, помаже развој критичког мишљења,

способности решавања проблема и расуђивања тако што ученике упућује да анализирају, синтетизују и евалуирају различите информације и податке. Охрабрује сарадничке вештине и комуникацију подстичући ученике да деле, дискутују, образлажу своје идеје и решења са другима. Промовише креативност и иновацију позивајући ученике да дизајнирају, креирају и презентују јединствене производе и решења. Кроз генерисање великог броја идеја и предлога да се одговори на задатак пројекта до изражаја долази флуентност. Флексибилност се уочава у способности да се, уколико је неопходно, проблем сагледа из другог угла и да се приступи његовом решавању на другачији начин. Идеје и предлози које ученици дају могу бити нови, необични, неочекивани, за њих оригинални. Пројектна настава пружа и могућност диференцијације и персонализације дозвољавањем ученицима да изаберу теме, питања, методе учења и начин демонстрације онога што су научили.

Пројектна настава се може успешно реализовати на свим нивоима школовања. И ученици млађих разреда основне школе могу да учествују у пројектима који су прилагођени њиховом предзнању и способностима. Ови пројекти, наравно, у том случају требало би да буду мањег обима и да краће трају. Млађи узраст ученика захтева веће ангажовање учитеља, односно учитељ мора на себе да преузме неке делове пројектних активности, али да истовремено остави довољно простора и за ученике.

Неки од циљева пројектне наставе су: осамостаљивање ученика у раду; развијање личне одговорности за реализацију пројекта; развијање социјалних и комуникационих способности ученика; стицање дуготрајних знања, вештина и навика примењивих у свакодневном животу, итд.

Приликом припреме, планирања и примене пројектне наставе наставник би требало да води рачуна о следећим корацима:

- доношење одлуке о пројекту: потребно је донети одлуку о трајању пројекта, о датумима провере испуњености циљева пројекта, али и оставити довољно простора за флексибилност, могуће измене и „раст” пројекта;
- планирање активности: требало би идентификовати садржаје који ће бити укључени у пројекат, одредити шта ће бити основни циљ пројекта;
- одређивање временског оквира: потребно је изабрати и прилагодити неколико активности и одлучити када ће се која од тих активности реализовати у временском оквиру који је планиран;
- планирање вредновања (оцењивања) рада ученика: наставник би требало да одреди циљ оцењивања (шта ће се вредновати), као и алате који ће бити коришћени у оцењивању;

- започињање пројекта: разговор са ученицима о циљевима пројекта, давање довољно времена да се навикну на нови пројекат, додавање активности уколико се укаже могућност додатног усавршавања способности групе уз придржавање оригиналног временског оквира, или дискутовање и планирање евентуалне ревизије временског оквира; у зависности од узраста, ученици могу, у већој или мањој мери, узети учешће у неким фазама почетног планирања пројекта;
- завршавање и рекапитулација пројекта: презентовање пројекта, разговор или писани извештај о кључним моментима пројекта, о могућностима побољшања пројекта.

Различити аутори наглашавају различите етапе рада ученика на пројекту. Представићемо један вид организације образовно-васпитног процеса у пројектној настави за који сматрамо да нарочито одговара настави математике (према Ćizmešija, 2006).

- 1) **Припрема пројекта.** У овој етапи одређује се тема пројекта, односно врши се избор проблема којим ће се пројекат бавити. Наставник, у сарадњи са ученицима, бира проблем који је актуелан и има практичну вредност за ученике, њихове родитеље или окружење. Врши се припрема ученика за рад на пројекту (активирају се неопходна претходна знања). Ова етапа обухвата и организациона питања попут времена трајања пројекта, локације, одређивања потребних ресурса за реализацију пројекта. Дефинише се циљ који се пројектом жели постићи: учитељ настоји да ученици дају што више предлога за решавање одабраног проблема/питања, усмерава их, допуњава.
- 2) **Постављање проблема.** Битно је да проблем буде постављен довољно широко и отворено, и да по могућству излази изван оквира математике. У овој етапи врши се сређивање и груписање идеја, одабир парцијалних проблема који ће се решавати, прецизирају се задаци, одређују се структуре тимова, ученици се деле у групе. Планирају се активности које одговарају теми пројекта, односно циљу пројекта, врши се подела активности, избор материјала и метода рада, одређује се динамика рада: пројекат се може реализовати на различите начине, нпр. групно, у паровима, индивидуално, у учионици, у библиотеци, лабораторији итд.
- 3) **Рад у групама.** У овој етапи врши се реализација планираних активности. Групе прикупљају неопходне податке (изворе информација) који помажу да се проблем боље сагледа и реши. Ученици комуницирају унутар своје групе, али и са другим групама уколико им се неки од задатака преклапају. Наставник их подстиче да документују цело-

купан материјал који користе. Уколико је неопходно, може се направити међурезиме рада, односно групе подносе извештаје о напретку, врше презентацију међурезултата, наставник даје нове смернице итд.

- 4) **Интегрисање резултата рада.** Групе подносе извештаје и врши се презентација резултата који се, затим, сређују и интегришу у целокупан финални производ; пројекат се вреднује (врши се процена остварености дефинисаних циљева, указивање на успехе и тешкоће у току реализације пројекта, примену добијених резултата).
- 5) **Математички допринос.** У последњој етапи пројектне наставе производ се презентује корисницима (то може бити у виду писаних извештаја, математичких паноа, плаката, презентације, чланака за школски часопис, веб-странице, радног материјала за друге ученике, видео-материјала итд.), успоставља се веза са наставним програмом, добијени резултати се примењују.

С обзиром на то да пројектна настава представља захтевнији облик рада, и то пре свега у погледу времена и ангажовања, за њену успешну реализацију веома је важна добра организација. Односно, неопходно је уклопити активности које се одвијају на часовима у школи и самосталне активности ученика ван школе. Када је у питању класификација пројектне наставе, на основу тога колико је учесника укључено у пројекат, можемо разликовати личне или мале пројекте (који ангажују једног или неколико ученика), разредне (у којима су укључени сви ученици једног разреда), као и пројекте целе школе. У зависности од теме пројекта можемо разликовати два типа пројектне наставе. Први се бави животним, реалним питањима из непосредног окружења ученика и тежи да има за резултат неку промену. Други тип пројектне наставе представља симулацију у оквиру које се ученици могу бавити удаљеним проблемима и заправо представља добар начин да се ученици вежбају у решавању проблема, али без стварних ефеката у реалном животу.

Постоје бројни разлози због чега треба користити пројектну наставу у школској пракси. Када је у питању активност ученика, она им омогућава: самостално проналажење извора информација и критички однос према њима; самостално савлађивање градива и учење; развој способности решавања проблема; развој креативног мишљења; рад у групи и сарадњу; доношење одлука; аргументовање; усвајање другачијих, нових начина рада; критички однос према сопственом и туђем раду итд.

Пројектна настава, такође, ученицима пружа прилику да примене стечена знања и омогућава боље разумевање научне дисциплине у којој се ради. Кроз рад на пројектним активностима ученици развијају и

вежбају више когнитивне функције. Рад на пројекту мотивише ученике за учење нудећи им смислене активности које их интересују и које су им важне. Ученик има више одговорности за сопствено учење и активнију улогу него у традиционалним облицима учења. Поред свега наведеног, овај облик наставе пружа могућност ученицима да се усавршавају у новим медијима, да користе нове технологије, посебно у прикупљању неопходних информација.

Продукти пројекта могу бити: панои, плакати, извештаји, представе, изложбе, кратки филмови, текст у новинама, наступ на локалној телевизији, предавање за родитеље. Уколико је мисија пројекта у томе да се нешто промени у окружењу, изузетно је важно да резултати пројекта не „остану у учионици” разреда који га је реализовао.

Иако је ово облик наставе у којој је већа активност ученика него у традиционалној настави, она захтева и од учитеља додатни ангажман, као и нове улоге. За успех пројектне наставе нарочито је важан сараднички однос ученика и наставника. Осим улоге сарадника, наставник има и улогу саветника, ментора, помагача. Он пружа подршку свим ученичким активностима у току пројекта, а по потреби и помоћ. Такође, управља пројектом на начин који оставља довољно простора самоорганизацији ученика. Активнији је у обезбеђивању услова и материјала за реализацију пројекта, као и при решавању проблема који превазилазе ученичке способности.

Оцењивање активности ученика у пројектној настави није једноставно јер постоји много тога што би требало посматрати (степен сарадње, мотивисаност, самосталност, постигнути резултати и сл.). Поред тога, као и код других облика групног рада, није увек лако проценити допринос појединаца. Стога је у овом случају добро комбиновати процене наставника са проценама ученика и њиховим самовредновањем. Чак и када нису остварени сви дефинисани циљеви или када непланиране тешкоће ометају реализацију пројекта, и даље можемо говорити о вредности пројектне наставе. Из неуспелог пројекта може се много тога научити и унапредити даљи рад.

Као и при употреби других метода, треба имати у виду да пројектна настава има и своје слабости. Најчешће замерке пројектној настави су: много више захтева од ученика, тражи више времена за реализацију, захтева пажљиво дизајнирање проблема, ученици морају да буду претходно обучени за рад на пројекту, често подразумева додатне трошкове, захтева додатно праћење (супервизију) од стране учитеља, оцењивање тражи више времена и теже је.

Школама се не препоручује да комплетан образовно-васпитни рад реализују по принципима пројектне наставе, већ у комбинацији са другим врстама наставе. Пројекат се успешно може користити као допунски

елемент у организацији самосталног рада ученика. Пројекат у настави математике подразумева рад тима ученика на сложенијем математичком проблему, који је често близак реалном свету. При избору теме пројекта, будући да он укључује самосталан рад ученика, може се и изаћи из оквира наставног плана и програма математике. Неке од тема могу бити везане за примену математике у свакодневном животу и занимањима, за историју математике, везу математике и других предмета и слично.

Приказаћемо пример једног могућег пројекта у почетној настави математике (Дејић, Егерић, Михајловић, 2022: 387–390).

Тема пројекта: Математика старог Египта	
Општи подаци:	
Координатор/учитељ:	Снежана Савић
Извођачи:	Ученици четвртог разреда
Време реализације пројекта:	Две недеље (8–25. мај)
Математички производ:	Математички пано
Циљеви пројекта:	• Усвајање и проширивање знања у области садржаја историје математике (математика старог Египта) • Стицање знања о различитим начинима записивања бројева • Упознавање са начином записивања бројева (хијероглифски и хијератички) и рачунања старих Египћана • Развијање тимског духа код ученика и способности сарађивања • Оспособљавање ученика да трагају за различитим изворима информација • Развијање критичког мишљења према свом и туђем раду • Оспособљавање ученика да повезују садржаје различитих предмета.
Облици рада:	Фронтални, групни, индивидуални
Методе рада:	Дијалогска, метода писаних радова, текстуална метода, илустративна метода, демонстративна метода, пројектна настава
Наставна средства:	Различити извори информација (уџбеници, интернет, математички часописи), потребан материјал за израду паноа (маказе, лепак, слике)
Корелација:	Српски језик, Природа и друштво

Активност учитеља:	Осмишљавање теме пројекта, упознавање ученика са темом и начином рада, мотивација ученика за рад, организација целокупног рада ученика (временски и просторно) и подела у групе, праћење рада ученика, пружање помоћи, додатна упутства, процењивање рада.
Активност ученика:	Истраживање на задату тему, коришћење различитих извора информација, самостално прикупљање података, обрада података, прављење паноа, излагање.
Врста пројекта:	Истраживачки
Израда пројекта по корацима (етапама):	• Припрема пројекта; • Постављање проблема; • Рад у групама; • Интегрисање резултата рада; • Математички допринос.
Резиме: У овом пројекту ученици имају за циљ да направе математички пано о староегипатској математици, начину на који су записивали бројеве, разломке, начин сабирања, одузимања, дељења бројева. Ученици путем различитих извора информација проширују и обогаћују своја знања.	

Реализација пројектне наставе

Прва фаза – Припрема пројекта

Време реализације: 8. мај 2015.

Трајање: 30 минута

Место реализације: учионица

Упознајемо ученике са основним принципима пројектне наставе и са начином рада. Водимо разговор о томе шта је то „математички пано“ (шта све садржи, која је његова сврха, шта све може бити приказано на њему, ко може да прави пано, која врста материјала нам је потребна за израду паноа итд.). Показујемо ученицима пример једног паноа.

Са ученицима водимо разговор о различитим начинима записивања бројева које су они током досадашњег школовања упознали (арапске и римске цифре). Питамо их да ли знају за још неки начин записивања бројева. Саопштавамо им да ћемо заједно радити на пројекту чија је тема „Математика старог Египта“ и да је наш задатак да истражимо све што можемо о томе и резултате истраживања прикажемо на математичком пану. Причамо са ученицима о томе шта нам је све потребно да бисмо се бавили овим проблемом. Где можемо да пронађемо потребан материјал? (интернет, математички часописи, енциклопедије итд.) Како ћемо да радимо са тим материјалом? Говоримо ученицима да ће бити распоређени у групе и да ће заједно радити у оквиру њих (критеријум поделе у групе могу бити оцене из математике, по жељи ученика итд.). Дајемо им задужење да самостално истраже све што могу о математици старог Египта и да покушају да осмисле могуће подтеме за рад.

Договарамо се са ученицима о термину следећег сусрета.

Друга фаза – Постављање проблема Време реализације: 11. мај 2015. Трајање: 60 минута Место реализације: информатички кабинет, библиотека Делимо ученике у групе на основу договореног критеријума. Са ученицима водимо разговор о могућим подтемама за пројектну наставу за сваку групу. Ученици дају различите предлоге на основу материјала које су пронашли: начин записивања бројева у старом Египту, сабирање и одузимање, као и дељење и множење у старом Египту, начин записивања разломака итд. На основу предлога формирамо подтеме којима ће се бавити свака група: 1. Бројеви старог Египта, 2. Староегипатско сабирање и одузимање, 3. Староегипатско множење и дељење, 4. Разломци. Разматрамо изворе информације које нам ученици нуде и усмеравамо ученике на коришћење и других извора. На интернету налазимо садржаје везане за нашу тему и усмеравамо ученике на коришћење различитих интернет страница. Такође, ученике усмеравамо и да користе енциклопедије, различите математичке часописе из школске библиотеке. Отклањају се све евентуалне недоумице које ученици имају у вези са темом, начином рада, поделом задужења у оквиру група. Са ученицима се договарамо да наредних недељу дана прикупљају потребне информације за остваривање задатка. Уколико наиђу на неке тешкоће могу да нам се обрате и затраже помоћ.
Трећа фаза – Рад у групама Време реализације: 18. и 20. мај 2015. Трајање: два школска часа Место реализације: учионица Ученици седе подељени у групе и сваки од ученика, унутар своје групе, презентује информације које је прикупио. Надгледамо рад ученика, дајемо им потребне инструкције и усмеравамо их уколико је то потребно. Такође, по потреби, ученици различитих група размењују информације уколико се њихови задаци преклапају. На крају сваког часа, свака од група извештава остале о свом учинку и објашњава како њихов део паноа изгледа. Након излагања представника врши се анализа сваког паноа. Организује се заједничка дискусија о томе шта је добро, а шта је потребно изменити.

Четврта фаза – Интегрисање резултата рада Време реализације: 25. мај 2015. Трајање: један школски час Место реализације: учионица У овој етапи групе подносе завршне извештаје и презентују свој рад. Након излагања свих група поново се води дискусија о резултатима. Уколико нема потребе за додатним изменама приступамо интегрисању резултата у целокупан производ, односно један заједнички математички пано. Пре израде паноя разговарамо са ученицима на који начин треба приказати садржај, којим редоследом треба изложити прикупљене материјале. Ученици свих група раде на сређивању паноя, свака група сређује део за који је она задужена. Пружамо помоћ ученицима око организације простора на паноу и одређивања његове структуре.
Пета фаза – Математички допринос Време реализације: 23. мај 2015. Трајање: 30 минута Место реализације: учионица Свака група презентује свој део паноя осталим ученицима одељења (и ученицима других одељења четвртог разреда). Разговарамо колико је пано визуелно занимљив осталим ученицима, да ли су научили нешто ново пратећи презентацију садржаја паноя. Након презентације разговарамо са ученицима да ли им се допао рад на пројекту, да ли би нешто променили кад је сама организација и реализација у питању, да ли су уочили у чему је значај паноя који су израђивали, да ли постоји нешто што нису, а желели би да истраже. Правимо везу, односно уочавамо сличности и разлике са садржајима редовне наставе (прави се поређење са индо-арапским и римским цифрама).

Осим тема из историје математике, које ученицима могу бити нарочито интересантне, у пројектима се могу бавити најразличитијим питањима у складу са својим узрастом. На пример, могу истраживати како се све математика користи у свакодневном животу, занимањима, могу истражити све о великим бројевима, геометријским фигурама, броју итд.

Теме пројекта могу бити и интердисциплинарне, односно омогућавати интеграцију садржаја више различитих предмета. Креативност се негује кроз укључивање ученика у искуствене активности и активно истраживање кроз интердисциплинарни интеграцију курикулума и оријентацију ка отвореним и разноврсним темама. Бирање пројектних тема из СТЕАМ области (природне науке, технологија, инжењерство, уметност,

математика) пружа ученицима ситуације учења у којима могу активно да истражују реална искуства и дизајнирају решења за проблеме из стварног живота, што подстиче развој креативног мишљења и практичне вештине. Како се користе различити видови вредновања рада ученика, ово им омогућава да испоље своје потенцијале до максимума.

Једна од таквих интердисциплинарних СТЕАМ тема пројекта може бити *Њојрошња воде*. Актуелна је с обзиром на то да је садржана у циљевима одрживог развоја које су 2015. године усвојиле Уједињене нације (економична потрошња воде, очување водених ресурса) како би се очувала наша планета, смањило сиромаштво и неједнакост у свету (United Nations, 2015). Првенствено, ова тема интегрише садржаје предмета Природа и друштво и Математика, али се могу укључити и садржаји неких других предмета. Када су у питању математичка знања и вештине, ученици могу користити поступке рачунских операција, оно што су научили о мерењу и мерама, обради података. Описаћемо у кратким цртама како могу да изгледају етапе рада на пројекту.

Припрема пројекта (један час). Учитељ разговара са ученицима о значају воде за људски живот, о томе да се наша планета суочава са несташицом воде и шта то значи за живи свет. Саопштава ученицима да ће заједно радити на пројекту „Потрошња воде” и да је њихов задатак да истраже како и колико воде трошимо, да те информације прикажу на постеру користећи математику, као и да направе план штедње воде који ће презентовати својим другарима из школе и родитељима. Са ученицима разговара о начинима потрошње воде код њихових кућа и у школи. Добијају задатак да интервјуишу своје родитеље, рођаке и да забележе све могуће начине трошења воде.

Постављање проблема (један час). Учитељ разговара са ученицима о томе шта је све неопходно истражити и сазнати како бисмо стекли увид у то како се и колико у свакодневном животу троши вода. Неки предлози могу бити: (1) пратити и бележити дневну потрошњу воде у свом домаћинству користећи табеле и графиконе током једне недеље; (2) истражити, користећи интернет, колико се воде просечно потроши за поједине активности (нпр. колика је потрошња машине за прање веша, колико се воде потроши за 5 минута туширања итд.); (3) експерименталним путем испитати колико се воде потроши за различите активности (нпр. осмислити начин да се измери колико се воде потроши за једно прање посуђа); (4) пратити и бележити потрошњу воде тог одељења у школи током једне наставне недеље. Учитељ дели ученике у групе и даје им задатке у складу са датим предлозима. Разговара са ученицима о математичким знањима и вештинама која ће им бити неопходна да ураде задатак.

Раг у їруїама (два часа). Ученици у групама размењују и сређују информације које су прикупили. Учитељ их обилази, даје им инструкције, усмерава их уколико је то потребно. Ученици праве скицу плаката. Извештавају остале групе о томе до којих су информација дошли. Креирају финални плакат. Учитељ разговара са ученицима о мерама које можемо предузети да се смањи потрошња воде. Свакој групи даје задатак да до наредног сусрета осмисли план уштеде воде за одређену активност.

Инїеїрисање резулїаїа рага. Ученици сваке групе презентују своју стратегију за уштеду воде. Следи дискусија о томе шта је добро, шта би се могло изменити, унапредити. Креира се заједнички плакат са планом уштеде воде. Учитељ се договара са ученицима о начину презентовања резултата пројекта.

Маїемаїички доїринос. Ученици презентују своје плакате ученицима других одељења и родитељима.

Сваки пројекат се може и проширити. Ученици могу, на пример, да предложе да направе справу која би прикупљала кишницу која би се користила за прање руку, поливање баште итд.

Још неке теме у оквиру СТЕАМ области које пружају могућност за примену стечених математичких знања и вештина у реалном контексту могу бити: смањење загађења (емисије штетних гасова), смањење количине отпада, уштеда енергије и слично.

Питања и задаци за самосталан рад

- 5.1. Опишите улогу креативности у математици као науци.
- 5.2. За која два математичара се везују прва интересовања за проучавање математичке креативности? Опишите како су они схватили креативност.
- 5.3. Објасните укратко Ервинков тростепени модел математичке креативности.
- 5.4. У чему је разлика у дефинисању математичке креативности професионалних математичара и ученика? Објасните.
- 5.5. Објасните везу између математичких способности и математичке креативности ученика.
- 5.6. Како се мери математичка креативност?
- 5.7. Објасните укратко компоненте креативног мишљења (флуентност, флексибилност, оригиналност, елаборација, редеофиниција и осетљивост за проблеме).
- 5.8. За сваку од наведених компоненти креативног мишљења осмислите по један математички задатак, а затим га решите описујући њену примену.
- 5.9. Пронађите у уџбеницима математике (разред и издавач по избору) неколико математичких задатака у којима се подстичу наведене компоненте. Решите их и опишите у којим сегментима решавања се манифестује одговарајућа способност/компонента.
- 5.10. Проучите на сајту Друштва математичара Србије задатке са окружног такмичења. Пронађите примере у којима долазе до изражаја компоненте креативног мишљења. За сваку компоненту изаберите по један задатак, решите га и објасните њихову примерну.
- 5.11. Да ли је могуће развијати математичку креативност код свих ученика или само код оних који имају изузетне математичке способности?
- 5.12. Како се може подстицати и развијати креативност у настави математике?
- 5.13. На који начин решавање проблема отвореног типа подстиче развој способности дивергентног мишљења? Објасните.
- 5.14. Шта представља *посиављање проблема* у настави математике?
- 5.15. Наведите и укратко објасните који поступци наставника доприносе развијању креативности мишљења код ученика.
- 5.16. Шта је пројектна настава? Опишите укратко њене карактеристике.

5.17. Које етапе има пројектна настава? Опишите укратко сваку од њих.

5.18. Које су предности, а који недостаци пројектне наставе?

5.19. Осмислите и креирајте нацрт једног пројекта у настави математике користећи модел дат у уџбенику за тему која:

а) припада области историје математике

б) припада СТЕ(А)М области.

6. САДРЖАЈИ ЗА РАД СА МАТЕМАТИЧКИ ДАРОВИТИМ УЧЕНИЦИМА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

*Дужност је наставника, а наставника математике нарочито,
да своје ученике излажу решавању проблема много више
него њиховим чињеницама.*

Пол Халмос

У овом поглављу даћемо неке конкретне предлоге различитих математичких задатака и активности који се могу користити у раду са даровитим ученицима. С обзиром на то да постоји велики број ресурса са материјалима који се користе за припрему ученика за математичка такмичења, одлучили смо да овде прикажимо нешто другачије садржаје. Акценат смо ставили на оне садржаје који утичу на развој математичког мишљења, способности и креативности. Одличан успех из математике или медаља на математичком такмичењу не осигуравају успешну каријеру у математичкој науци, већ је за то много значајније шире и дубље образовање, креативно мишљење, мотивација итд. Како се у свакодневном животу, као и у свету математике као науке, стално сусрећемо са различитим проблемима, потребно је да ученици стекну искуство у њиховом решавању (Дејић, Михајловић, 2014). Кроз решавање одговарајућих математичких проблема деца увежбавају неке стратегије решавања попут планирања, погађања и провере, коришћења различитих директних и индиректних модела, дијаграма, цртежа, табела, елиминације, трагања за правилностима и законитостима.

Не треба заборавити ни математичку интуицију, пошто на њој почива велики део математике, нарочито када треба изабрати пут којим ћемо се кретати приликом решавања проблема. Интуиција се не може научити, али се може вежбати. Зато ученике треба суочавати са математичким проблемима, кад год се за то укаже прилика и дозволити им да самостално изналазе сопствене путеве до решења и само их по потреби усмеравати.

Највећу препреку за коришћење проблема отвореног типа и активности постављања проблема за учитеље и наставнике представља недостатак одговарајуће литературе и модела. Литература и материјали су углавном на страном језику, у уџбеницима и збиркама скоро и да нема других типова проблема осим оних затвореног типа. Припрема проблема оваквог типа захтева и више времена од наставника, али и промишљање да ли је неки проблем отвореног типа вредан у математичком смислу, односно која знања и вештине ће ученици стећи његовим решавањем. У овом поглављу приказаћемо примере проблема отвореног типа у почетној настави математике (у првом, другом, трећем и четвртном разреду основне школе), као и неке примере који се могу користити у старијим разредима. Оно што је битно нагласити јесте да не мора читав час математике бити посвећен решавању проблема отвореног типа, већ се ови проблеми могу користити у појединим етапама. Такође, неки проблеми отвореног типа не морају се обавезно решавати само на једном часу, већ ученицима можемо пружити могућност да на њима раде неки дужи период. Дакле, време за рад на проблемима отвореног типа није фиксирано, утврђено. Основни циљ је да омогућимо ученицима да самостално конструишу математичке идеје развијајући тако не само своје знање и вештине, већ и своје мишљење и креативност. Осим неких, за ученике прилично сложених проблема отвореног типа, указаћемо и на неке једноставне, али веома корисне примере и питања отвореног типа. Без обзира на то што се ради о садржајима који су углавном намењени раду са даровитим ученицима, учитељи и наставници их могу примењивати и у раду са осталим ученицима, при чему ће ученици, свако на основу својих сопствених способности и знања, давати своје (значајне) доприносе, односно решавати проблеме на њима најближи начин и коришћењем стратегија које њима највише одговарају.

6.1. КРЕИРАЊЕ ПРОБЛЕМА ОТВОРЕНОГ ТИПА

Математика у реалном свету и свакодневном животу

Наставници често говоре ученицима да је један од разлога због чега уче математику то што се математика користи свуда и што нам је неопходна како бисмо решавали проблеме у свакодневном животу. Нажалост, у већини случајева, само мали број наставника формира окружење за учење које подржава ове тврдње. Једна могућност јесте рад ученика на пројекту, о чему смо већ писали у претходном поглављу. Наставник може и једноставним стратегијама и активностима упућивати ученике да уоче примену математике. На пример, може их подстицати да пишу саставе или извештаје о томе како се математика користи у свакодневном

животу. При томе, ученицима може поставити следећа питања:

Где све можеш да видиш математику на делу када идеш од школе до куће?

Како и када све користиш математику изван школе?

Које мерне јединице користе твоји мама и тата и како?

Наведи занимања у којима се користи математика.

Како и када све користимо математику у спорту?

Да ли знаш неки пример коришћења математике у музици?

На овај начин стимулише се и провоцира интересовање за математику. Са друге стране, оваква питања нам дају важан увид у то колико су ученици научили и какво је њихово функционално знање.

Од „затвореног” до „отвореног” проблема

Проблеми затвореног типа из школских уџбеника се могу „отворити” коришћењем стратегије „Шта-ако-је?”, „Шта-ако-није?”, односно постављањем једноставних питања типа „а шта би било ако би...” или „а шта би било ако не би...” (Табела 2). На овај начин мењамо, варирамо дате услове, а можемо тражити од ученика да то и сами раде. Различити ученици ће имати различите идеје и приступе. На тај начин подстаћи ћемо њихово математичко мишљење и добићемо информацију о њиховом знању и разумевању одговарајућих садржаја.

Проблем затвореног типа	Проблем отвореног типа
Израчунај обим троугла чије су странице дужина 3 cm, 4 cm и 5cm.	Колике могу бити странице троугла, ако му је обим 12cm?
Подели дату фигуру на десетине и осенчи једну десетину.	Ако фигура на слици представља десетину неке фигуре, како изгледа цела фигура? Нацртај. Можеш ли да пронађеш још неко решење?
Колико је $4 \cdot 8$?	Ако је одговор 32, како може да гласи питање?
Породица има троје деце. Они су желели да поделе 22 слаткиша, тако да два брата близанца добију исти број слаткиша и да најмлађа сестра добије 6. Колико је слаткиша добио сваки од браће?	Породица има троје деце. Они су желели да поделе 22 слаткиша, тако да два брата близанца добију исти број слаткиша, а да најмлађа сестра добије оно што преостане. Колико је слаткиша могао да добије сваки од браће, а колико сестра?
Наведи неколико парних бројева.	Можеш ли да смислиш начин како да пронађеш све парне бројеве до 100? Да ли можеш да пронађеш још неки начин?

Табела 2. Од „затвореног” до „отвореног” проблема (Дејић, Михајловић, 2014)

Након решавања више различитих задатака у оквиру једне лекције у уџбенику можемо да тражимо од ученика да уоче и објасне сличности и разлике између решених задатака и да своје закључке уопште.

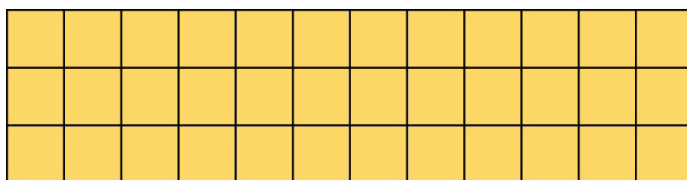
Такође, од ученика можемо да тражимо да на основу датих бројевних израза или једнакости самостално формулишу различите текстуалне проблеме који ће одговарати запису или да након решавања неког текстуалног проблема смисле текст новог задатка који се може решити на сличан начин.

Уместо саопштавања неких правила, својстава, законитости, можемо ученицима поставити једноставна питања која ће их навести да сами истражују, размишљају и закључују. На пример, уместо да после неколико урађених примера кажемо ученицима „множење представља вишеструко сабирање”, боље је ученике питати „По чему су све сабирање и множење слични?”.

Коришћење илустрација за креирање проблема отвореног типа

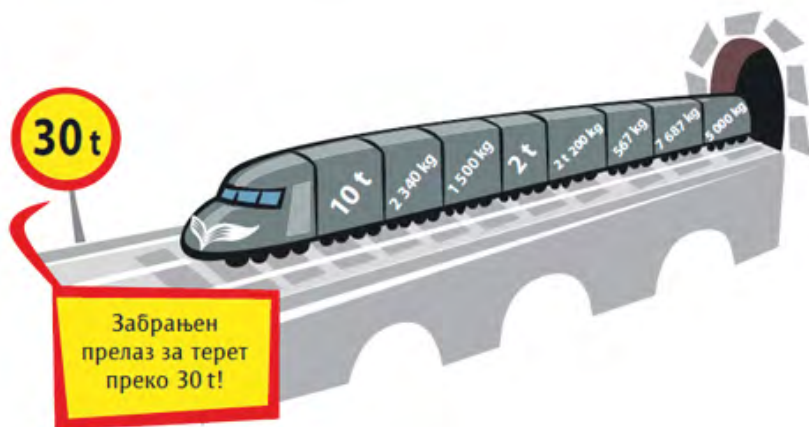
Слика, илустрација или неки графички приказ понекада могу бити богат извор математичких идеја и подстаћи ученике на мишљење у већој мери него питања садржана у уџбеницима. Уколико се ради о слици или илустрацији у уџбенику која представља део неког задатка отвореног типа, можемо једноставно преформулисати дате захтеве и питања. Погледајмо неколико примера.

Пример 1. Задатак са текстом „У три реда налази се по 12 квадратића. Израчунај укупан број квадратића” можемо преформулисати у проблем отвореног типа: „Вера је направила модел правоугаоника као на Слици 27 користећи 39 плочица квадратног облика. Напиши што више питања која одговарају датој слици.”



Слика 27. Коришћење слика као извора за креирање проблема отвореног типа

Пример 2. Уместо задатка затвореног типа (Дејић, Милинковић, Ђокић, 2009: 74) који гласи: „Израчунај колико терета носи воз. Да ли воз сме да пређе мост?“, можемо од ученика тражити да запишу шта све могу да израчунају на основу слике.



Слика 28. Коришћење илустрација из уџбеника (Дејић, Милинковић, Ђокић, 2009: 74)

Писање на часовима математике

Писање о процесу мишљења представља прави изазов за ученике. Од ученика најпре можемо тражити да пишу и врше рефлексију о наученим математичким појмовима и садржајима. На пример: *Најиши шћа си данас научио о дељењу, разломцима, о обиму правоугаоника* и сл. На основу њихових текстова можемо да извршимо и процену знања и разумевања одређених садржаја. На пример: *Објасниће својим речима шћа значи рачунска операција множења. Објасниће шћа је најважније да знамо о разломцима.* Требало би их постепено охрабривати да пишу о све сложенијим математичким појмовима и да приликом писања користе разне визуелне презентације, цртеже, дијаграме, табеле и сл. Још једна могућност јесте да тражимо од ученика да пишу литерарне саставе о некој математичкој идеји, појму или садржају. На пример, можемо им као домаћи задатак дати да напишу састав „Живот у земљи без бројева“ или „Шта би било да нема разломака?“. Осим процењивања квалитета литерарних радова, наставник добија информације о томе колико су ученици овладали појмовима као што су бројеви, рачунске операције, разломци, али и стиче увид у њихово функционално знање и схватање улоге ових појмова у свакодневном животу и реалном свету.

Још једна корисна вежба јесте да тражимо од ученика да поред сваког корака у решавању задатака пишу и одговарајуће објашњење и опис поступака (Табела 3). Под описом подразумевамо да ученици записују речима кораке које користе у решавању задатка (на пример, *од броја 120 одузели смо 32*), а под објашњењем подразумевамо да се сваки корак објасни (*још је Ана имала укупно 120 динара, а књију је плаћила 32 динара, количину новца која јој је остала одредићемо тако што ћемо од укупне суме новца одузети оно што је потрошила*).

Ана је у књижари купила књигу за 32 динара. Колико јој је новца остало, ако знамо да је имала 120 динара?

Рачунање	Опис	Објашњење
$120 - 32 = 88$	Од броја 120 одузели смо 32.	Пошто је Ана имала укупно 120 динара, а књигу је платила 32 динара, количину новца која јој је остала одредићемо тако што ћемо од укупне суме новца одузети оно што је потрошила.

Табела 3. Детаљно записивање корака при решавању задатака

Од ученика можемо да тражимо да сами осмисле одређене математичке вежбе, задатке или игре за своје другове из одељења, вршњаке, или можда за ученике који ће следеће године бити у истом разреду у ком су они сада. Ученицима се веома свиђа могућност да за тренутак и сами преузму улогу учитеља. На пример, наставник може тражити да направе наставни лист са задацима за ученике другог одељења, да осмисле игру помоћу које би ученици првог разреда вежбали сабирање до 10, да напишу шта би они урадили да учине математику занимљивијом итд.

Креирање ситуација или примера који задовољавају дате услове

Наставник може да тражи од ученика да направе ситуацију или пример који задовољава неке одређене услове. Питања оваквог типа захтевају да ученици препознају и разумеју дефинишуће карактеристике датих математичких појмова. При томе, ученици морају применити оно што знају о појму и то користити како би пронашли одговарајући пример.

Пример. Пронађи димензије неког квадрата и правоугаоника чији су обими (површине) једнаки. Покажи да твоји примери испуњавају овај услов. Покушај да објасниш зашто.

Разрешавање неспоразума

Ова активност отвореног типа састоји се у томе да наставник ученицима износи два или више виђења неког математичког појма, поступка или правила, а затим тражи од њих да изаберу које је виђење тачно и да објасне зашто мисле да је тако.

Пример 1. Никола и Марија су рачунали збир бројева 474 и 387. Марија је добила резултат 851, а Никола 761. Ко је од њих у праву, а ко је погрешно? Објасните где је начињена грешка и зашто. Да ли може да пронађете још неке грешке које могу да направе ученици код писменог сабирања троцифрених бројева?

Пример 2. Миша је добио задатак да реши неједначину $12 \cdot x - 65 < 55$. Он сматра да је $x = 10$ једино решење. Објасни због чега Мишино размишљање није исправно.

Питање у задатку које наставник поставља ученицима требало би да буде такво да подстиче ученике да објашњавају своје расуђивање, а не само да репродукују неки алгоритам.

Постављање проблема

Постављање проблема је подједнако битно као и њихово решавање. Ипак, у настави математике се овој активности посвећује веома мало или нимало времена. Већ смо напоменули да у математици као науци постављање, формулисање, генерисање проблема представља процес који захтева богато искуство и експертизу у области, али и креативно мишљење. „Открити”, односно поставити проблем не подразумева и његово решавање јер, као што смо напоменули, постоји велики број отворених и нерешених питања и проблема у математици. Када ученике ангажујемо у постављању проблема, тада их заправо стављамо у улогу математичара као научника. Наравно, проблеми које ученици постављају не могу се поредити са проблемима које постављају математичари, али им на овај начин нудимо могућност да искусе нешто другачији аспект математике.

Ученицима као извор за постављање проблема можемо понудити слике (из часописа, новина, књига и сл.), илустрације (из уџбеника),

различите табеле, графиконе, дијаграме. Извор за генерисање проблема може бити и текст (на пример, нека прича, бајка, чланак из новина и сл.). Можемо користити и проблеме затвореног типа које налазимо у уџбеницима математике. Изостављањем питања и неких података из задатка, отварамо могућност да ученици сами генеришу што више проблема на основу оног што је дато.

Наводимо примере два (мало модификована) задатка из уџбеника за трећи и четврти разред основне школе који се могу искористити као основа за активности постављања проблема од стране ученика.

Пример 1. Задатак из уџбеника за трећи разред основне школе гласи: Наташа је сама код куће и може да телефонира колико жели. Прво је причала са Јеленом 22 минута. После је звала Сашку и са њом разговарала 28 минута дуже, а са Николом је разговор трајао 13 минута краће него са Сашком. Колико је разговарала са Сашком? Колико је трајао разговор са Николом? Са ким је најдуже разговарала? Са ким најкраће? Колико је укупно разговарала? (Стефановић, 2009: 60).

Модификација овог задатка би могла да буде изостављање питања. Тражимо од ученика да сами открију шта све можемо да израчунамо на основу датих података, односно да пронађу што више ствари које се могу израчунавати на основу датих услова задатка и да сами поставе питања у задатку.

Пример 2. Искористићемо табелу (Табела 4) дату у оквиру једног задатка у уџбенику математике за четврти разред (Дејић, Милинковић, Ђокић, 2009: 39). Ученицима можемо приказати табелу и тражити од њих да сами формулишу што више текстуалних проблема користећи податке из дате табеле.

Држава	Број становника
Грчка	10 668 354
Италија	58 103 033
Аустрија	8 184 691
Србија	7 397 651
Немачка	82 431 390
Мађарска	10 006 835
Велика Британија	60 441 457

Табела 4. Изглед задатка датог у уџбенику

Решавање задатака на више начина

Већина математичких задатака се може решити на више начина. Ученике треба охрабрити да најпре задатак реше на свој сопствени начин, и треба прихватити све оне који су математички коректни. Такође, треба подстицати ученике да приликом решавања задатка користе различите видове репрезентације података (цртеже, дијаграме, табеле, графике и сл.). Након решавања задатака требало би подстакнути дискусију међу ученицима, охрабрити их да поделе методе и стратегије које су користили у решавању са осталим ученицима у одељењу.

Математика у другим предметима

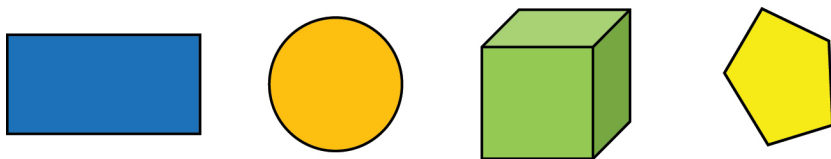
Кад год је то могуће, треба истакнути и користити везу математике и осталих предмета. На тај начин ученици ће схватити важност учења математичких садржаја. Математика се може користити и у истраживачким и пројектним задацима у оквиру других предмета. Ученици могу добити задатак да истраже неку тему у оквиру предмета Природа и друштво. За бележење резултата користиће бројеве, табеле, цртаће дијаграме, односно користиће математику као алат. Или могу истражити везу уметности и математике (на пример, примена теселација).

6.2. ПРИМЕРИ ПРОБЛЕМА ОТВОРЕНОГ ТИПА У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

С обзиром на то да на нашем поднебљу нема много истраживања која су се бавила применом проблема отвореног типа у настави математике, а ни одговарајућих материјала и садржаја на нашем језику, у овом поглављу приказаћемо примере које је радећи на својој дисертацији развила А. Михајловић (Дејић, Михајловић, 2014; Михајловић, 2012). Примери могу послужити као основа и полазна тачка не само студентима будућим учитељима, већ и оним са дугогодишњим искуством, као и наставницима математике.

Први разред

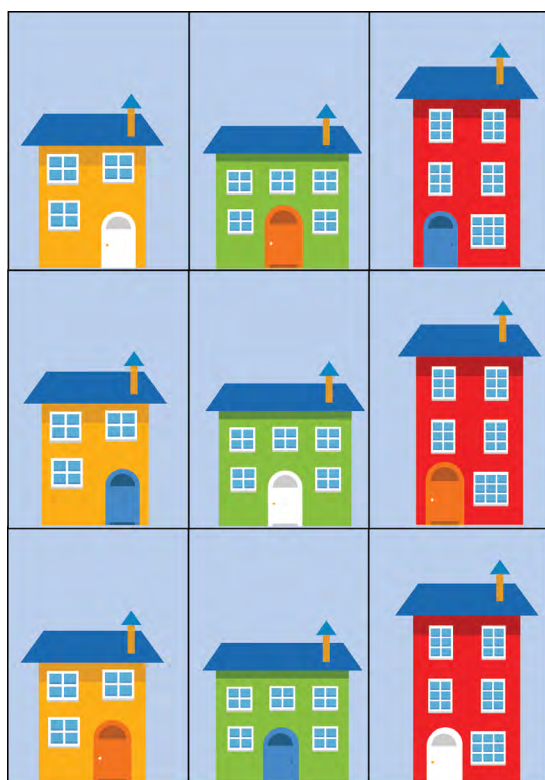
Пример 1. Избаци уљеза. Тражимо од ученика да открију ком објекту није место на слици. Не постоји један тачан одговор.



Слика 29. Избаци „уљеза“

Критеријум по коме ће се одређивати ком објекту није место на слици зависи од ученика. За неке ученике биће то дводимензионалност, односно тродимензионалност објекта, док ће за друге то можда бити боја. Неки од ученика могу сматрати да је „уљез“ круг јер је ограничен кривом линијом, а код свих осталих објеката имамо само праве линије итд.

Пример 2. У улици у којој живи Никола има девет кућа и оне изгледају као на слици испод. Распоређи ове куће у групе на основу неке заједничке особине. На колико начина можемо да их распоредимо? Објасни.



Слика 30. Класификовање објеката (извор: freepik.com)

Пример 3. Израчунајте колико је $3 + 4$. Помоћу чега можете да покажете да сте тачно израчунали? Нацртајте слику којом ћете то показати.

Пример 4. Пронађи све бројеве које можемо добити као збир приликом бацања две коцке. Шта мислите који збир ћемо најчешће добити бацајући две коцке?

Ученици могу да раде на овом задатку самостално или у пару. Можемо им поделити по две коцкице и тражити од њих да бацањем уоче које суме би све могли да добију.

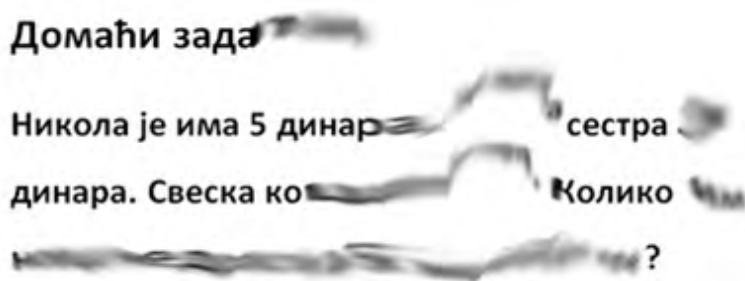
Пример 5. Направи списак свих облика које уочаваш у својој учионици. Који од њих се најчешће појављују? Зашто мислиш да је тако?

Пример 6. Користећи дате картице, направи тачне једнакости.



Слика 31. Састављање једнакости

Пример 7. Мирко је на путу до куће испустио листић са задатком који му је учитељица дала за домаћи. Листић је упао у бару, тако да када га је Мирко извукао видео је да су се неки делови задатка избрисали. На слици можете видети шта је остало на Мирковом листићу.



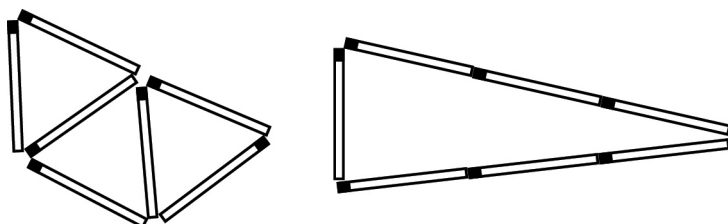
Слика 32. Изглед задатка

Покушајте да смислите како је све могао да гласи Мирков задатак, па га онда решите.

Пример 8. Упиши бројеве, тако да једнакост буде тачна $_ + _ = 10$. Да ли постоји само једно решење?

Други разред

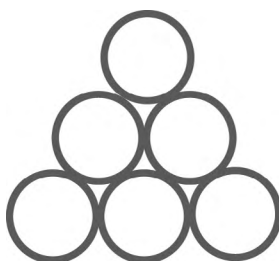
Пример 1. Пронађи све троуглове који се могу направити помоћу седам палидрваца.



Слика 33. Нека од могућих решења задатка

Ученике подстичемо да на различите начине распоређују палидрвца и да покушају да открију што више решења.

Пример 2. Упиши бројеве од 1 до 6 у кругове, али тако да сваки број представља разлику два суседна броја која се налазе испод њега.



Слика 34. Изглед слике са „магичним круговима”

Пронађи што више решења. Смисли неки начин да бележиш решења како не би неко пропустио. Објасни своје размишљање.

Пример 3. Бака је желела да изненади и обрадује своје три унуке. Решила је да умеси три пите са јабукама и да у сваку од њих стави златне новчиће. Како бака то може да уради ако има укупно десет златних новчића и у сваку питу жели да стави најмање два?



Слика 35. Изглед дидактичког материјала (извор: freepik.com)

Ученицима можемо поделити моделе новчића од картона, а затим тражити од њих да пронађу одговарајући начин на који ће пратити различите могућности распоређивања новчића. Такође, можемо подстицати ученике да на свој начин представе процес решавања задатка (сликом, записивањем помоћу збира, прављењем листи итд.).

Пример 4. На једној фарми кишна глиста је одлучила да изађе из своје рупе у земљи. Видела је испред себе 10 ногу. Колико кокошака, а колико коња је могла да види?

Задатак има више решења. Ученици процењују колико је највише, а колико најмање животиња сваке врсте могло да буде. При томе вежбају множење, дељење са и без остатка. Решења могу приказати на различите начине, помоћу цртежа, табела, листи.

Пример 5. Погледај следећи низ: 1, 2, 4, 6, 8, 12. Пронађи број који је другачији од осталих. Обавезно запиши како си то закључио. Ако је могуће, пронађи што више одговора.

Веома је важно тражити од деце да образлажу, објашњавају и наводе разлоге зашто су се одлучили за неки одговор. У овом случају има више решења, односно одговора. На пример, ученици могу изабрати као одговор број 12, јер је то једини двоцифрени број. Или пак, то може бити број 8 јер су сви остали бројеви чиниоци броја 12, итд. Ученици развијају флуентност, али и оригиналност (дајући ретке, али тачне одговоре).

Пример 6. Замисли да си заборавио колико је $8 \cdot 7$, али знаш да је $5 \cdot 7 = 35$. Како можеш, користећи ово, да пронађеш колико је $8 \cdot 7$?

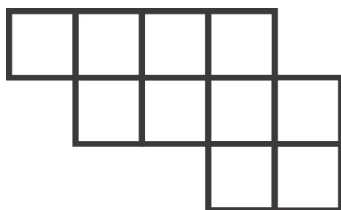
Ово је једноставан пример, који због своје отворене природе нуди ученицима могућност да демонстрирају свој сопствени начин доласка до одговора.

Пример 7. Миша је рачунао користећи калкулатор. Међутим, на калкулатору је дугме са бројем 5 покварено, па не ради. Како Миша може помоћу калкулатора да израчуна колико је $5 \cdot 8$, ако не може да користи дугме са бројем 5? Запишите и објасните.

Пример 8. Јована има више од 20, а мање од 60 година. Ако бројиш по седам можеш да дођеш до броја Јованиних година. Следеће године моћи ћеш да бројиш по пет до Јованиних година. Колико година има Јована сада? Објасните и прикажите у свесци како сте решили задатак.

Основна идеја је да ученике подстичемо да на различите начине приказују решавање задатка. Корак решавања могу пратити користећи табелу, листу итд. Такође, требало би од њих тражити да свој поступак решавања образлажу.

Пример 9. Колико има правоугаоника, а колико квадрата на датој слици?



Слика 36. Уочавање и пребројавање правоугаоника и квадрата

Мада у оба случаја постоји само један тачан одговор, отвореност се огледа у различитим приступима проблему. Наиме, треба подстицати ученике да пребројавање врше на начин који ће им омогућити да не изоставе ни једну фигуру. Ученици могу да цртају фигуре које броје, да их сенче, а могу и да их нумеришу и да их онда систематски записују (најпре оне које се састоје из једног, па из два, три и више делова).

Пример 10. Ако неки број поделимо са шест добићемо остатак 2. Који број то може да буде?

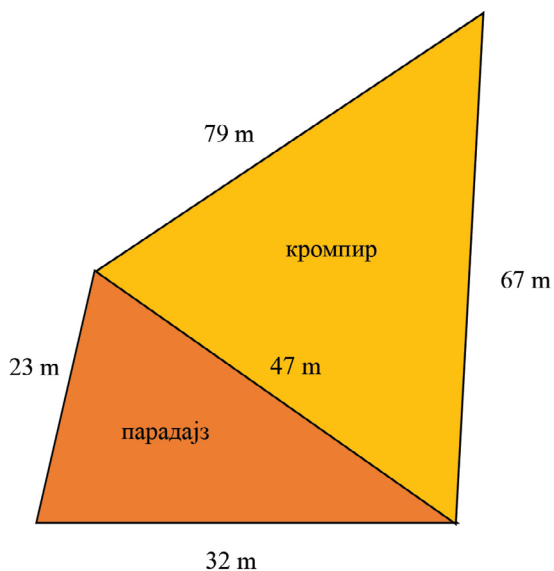
Основна идеја је увиђање да задатак има бесконачно много решења и налажење стратегија за одређивање неких могућности, односно уочавање одређених законитости.

Трећи разред

Пример 1. Напиши што више различитих једнакости користећи бројеве 12, 4 и 3.

Пример 2. Николи се покварило дугме са цифром 5 на калкулатору. Како он може користећи калкулатор ипак да израчуна $245 - 187$? (мало сложенија варијанта примера 7 за други разред)

Пример 3. Саставите текст задатака који се могу решити коришћењем података са следеће слике.



Слика 37. Састави задатак на основу слике

Пример 4. Ана је играла једну игру. У први ред и у прву колону таблице (Слика 38) унела је редом бројеве 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 и 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Затим је одлучила да сабере ове бројеве и то тако што је сабирала по један број из реда са бројем из колоне, а онда их уносила у одговарајуће поље у табели. Међутим, док је уносила ове збирове почела је да увиђа неке правилности. Покушај и сам да пронађеш што више правилности и искористи их да попуниш Анину табелу до краја.

+	3	6	9	12	15	18	21	24
5			14			23		
10		16						
15	18				30			
20								
25								
30								
35								

Слика 38. Таблица сабирања

Проширење проблема. Замислите да је Анина таблица продужена бесконачно у оба правца, и по редовима и по колонама. Покушајте да одговорите на следећа питања:

Који бројеви недостају?

Који бројеви се појављују само по једном?

Пронађи број после кога се сви бројеви после њега појављују у тој проширеној табlici. Који је најмањи такав број?

Пронађи број који се појављује два пута у табlici и после кога се сви остали бројеви појављују такође два пута. Који је најмањи такав број?

Колико пута се појављује број 60 у проширеној табlici?

Решење проблема. Постоји велики број правилности у табели. Навешћемо неке од њих. Бројеви које уносимо хоризонтално редом се повећавају за 3. То је из разлога што су бројеви у реду које додајемо броју из колоне већи један од другог за 3. Слично, бројеви које уносимо вертикално редом се повећавају за 5. Бројеви у колонама које додајемо одговарајућем броју у реду су већи један од другог за 5. Посматрајући главну дијагоналу, можемо уочити да се овога пута сваки збир повећава за 8 у односу на претходни. Ово је зато што број који се налази у реду повећавамо за 3, а број који се налази у колони за 5 ($3 + 5 = 8$). Супротно, друга дијагонала која иде уназад (означена плавом бојом) садржи бројеве који се повећавају за 2. Разлог је то што се бројеви вертикално повећавају за 5, али се зато бројеви хоризонтално смањују за 3 ($5 - 3 = 2$). Од деце треба тражити да сами уочавају нове правилности и да их објашњавају (Слика 39). На пример, уколико неки од ученика играју шах, онда они могу посматрати и поља која добијемо кретањем „скакача” по табли (означена зеленом бојом).

+	3	6	9	12	15	18	21	24
5	8	11	14	17	20	23	26	29
10	13	16	19	22	25	28	31	34
15	18	21	24	27	30	33	36	39
20	23	26	29	32	35	38	41	44
25	28	31	34	37	40	43	46	49
30	33	36	39	42	45	48	51	54
35	38	41	44	47	50	53	56	59

Слика 39. Неке од могућих правилности

Решење проширења проблема. Видимо из таблице (Слика 40) да колона „12” почиње бројем 17. У колони „3” имамо број 18, а у колони „9” имамо број 19. С обзиром на то да се сви бројеви повећавају за 3 ако идемо по редовима, ово значи да ће се сви бројеви почевши од 17 па надаље појављивати у табlici. Да бисмо открили који бројеви недостају, треба да погледамо само поља са бројевима мањим од 17 (означено црвеном бојом). Видимо да су то бројеви: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15.

+	3	6	9	12	15	18	21	24
5	8	11	14	17	20	23	26	29
10	13	16	19	22	25	28	31	34
15	18	21	24	27	30	33	36	39
20	23	26	29	32	35	38	41	44
25	28	31	34	37	40	43	46	49
30	33	36	39	42	45	48	51	54
35	38	41	44	47	50	53	56	59

Слика 40. Проширење проблема

Да бисмо пронашли бројеве који се појављују само једном, тражићемо бројеве који се појављују најмање два пута. Уз малу помоћ ученици треба да уоче да се бројеви изван дела означеног жутом бојом појављују два пута. Дакле, сада треба да погледамо бројеве унутар дела означеног жутом бојом да бисмо нашли оне који се појављују само једном. Сви ови бројеви појављују се само једном. Сви бројеви после 16 појављују се најмање једном у табlici. Сви бројеви после 23 појављују се најмање два пута у табlici.

Како можемо добити 60? Као прво, 60 се не може појавити десно од колоне „60”, а ни испод реда „60”. Који бројеви онда у табlici могу као збир дати 60? Могли бисмо да записујемо све збирове и да проверавамо сабирајући редове и колоне, али постоји лакши начин. У ствари, уочимо како све можемо добити 60 као збир: $60 = 15 \cdot 3 + 3 \cdot 5$; $60 = 10 \cdot 3 + 6 \cdot 5$; $60 = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 5$.

Пример 5. Никола и Саша су се договорили да зараде џепарац помажући ујаку у радњи преко распуста. Ујак им је рекао да ће их плаћати на следећи начин: Саша ће за први дан на послу добити 10 динара, а за сваки наредни дан на послу биће плаћена 2 динара више него претходног дана. Никола ће

за први дан добити 1 динар, али ће сваког наредног дана његова плата бити удвостручена у односу на претходни дан. На чијем месту би радије био и зашто?

Решење проблема. Овај проблем нема тачно одређено решење. Наиме, нигде у задатку није наведено колико дана ће деца радити. Ако раде 6 дана и мање, онда ће Саша зарадити више новца. Ако раде више од 6 дана, Никола ће зарадити више.

Циљ решавања проблема овог типа је да деца упореде брзину којом се увећава укупна сума када додајемо бројеве за два веће у односу на брзину увећавања суме када додајемо удвостручене бројеве. Овај проблем такође има потпору у реалном животу, када треба одлучити шта је исплативије.

Проширење проблема. После колико дана ће Сашин и Николин ујак остати без новца?

	Саша	Укупно након толико дана	Никола	Укупно након толико дана
Први дан	10	10	1	1
Други дан	$10 + 2 = 12$	$10 + 12 = 22$	$2 \cdot 1 = 2$	$1 + 2 = 3$
Трећи дан	$12 + 2 = 14$	$22 + 14 = 36$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 + 4 = 7$
Четврти дан	$14 + 2 = 16$	$36 + 16 = 52$	$2 \cdot 4 = 8$	$7 + 8 = 15$
Пети дан	$16 + 2 = 18$	$52 + 18 = 70$	$2 \cdot 8 = 16$	$15 + 16 = 31$
Шести дан	$18 + 2 = 20$	$70 + 20 = 90$	$2 \cdot 16 = 32$	$31 + 32 = 63$
Седми дан	$20 + 2 = 22$	$90 + 22 = 112$	$2 \cdot 32 = 64$	$63 + 64 = 127$

Табела 5. Један од могућих начина праћења резултата

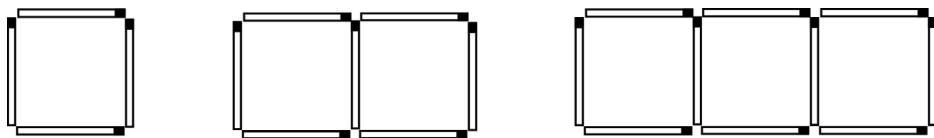
И на ово питање не постоји прецизан одговор. Деца треба да уоче да ће се сабирањем удвостручених бројева сума брже увећавати. Један од могућих начина за праћење резултата и њихово упоређивање је коришћење табеле. Ученици уписују колико Саша и Никола зараде за неколико првих дана (Табела 5).

Односно, Саша ће за n -ти дан добити $10 + (n - 1) \cdot 2$ динара, а Никола ће добити 2^{n-1} . Када се n бесконачно повећава функција 2^{n-1} брже расте, па ће и вредност суме $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$ брже да расте од вредности суме $\sum_{n=1}^{\infty} [10 + (n - 1) \cdot 2]$. Наравно, идеја је да деца то схвате на њима близак начин.

После 20 дана укупна сума ће прећи милион динара, а Сашин и Николин ујак то највероватније неће моћи да исплати.

Напомена. Без обзира на чињеницу да ученици трећег разреда обрађују блок бројева до 1000, сматрамо да им то неће представљати тешкоћу у решавању.

Пример 6. Помоћу палидрваца направљени су квадрати као на слици (Слика 41).



Слика 41. Проблем са палидрвцима

Ако би број направљених квадрата био 5, колико палидрваца би требало употребити?

Проширење проблема (активност постављања проблема). Наставник тражи од ученика да покушају сами да осмисле и запишу нова питања везана за овај проблем.

Напомена. Циљ овог задатка је да се ученицима пружи прилика да сами формулишу нове проблеме користећи генерализацију, аналогију, реверзибилно мишљење, а затим да те нове проблеме решавају (проширење проблема). Ученици могу направити нове проблеме мењајући, на пример, број квадрата или облик дате фигуре. На основу датог проблема може се формулисати нов проблем варирањем неких од датих услова. На пример: „Колико квадрата можемо направити од 23 палидрваца?” или: „Ако променимо начин ређања палидрваца, колико нам најмање палидрваца треба да направимо 9 квадрата?” и сл. У првом случају деца морају променити дирекцију мишљења, а у другом случају подстичемо их да креативно користе своју машту.

Пример 7. На састанку је било шест бизнисмена. На почетку сви су се руковали једни с другима. Колико је укупно било руковања? Реши задатак на што више различитих начина.

Напомена. Основна идеја ове активности је да се ученици подстичу да проналазе различите начине да реше задатак, односно различите начине којима би систематски пратили број руковања. То могу чинити коришћењем разних цртежа, дијаграма, прављењем листи итд.

Решење проблема. Први начин је да се најпре крене од мањег броја људи, нпр. троје. А затим треба тражити од ученика да постепено уводе по једну особу и да покушају да уоче неку правилност. Од помоћи могу бити питања: „Шта сте уочили за број руковања и број људи који се рукују?”, „Како ћете приказати свој рад да би сте лакше уочили неку правилност?” итд.

Ако се двоје људи рукује, имаћемо само једно руковање.

Ако их је троје, број руковања је 3.

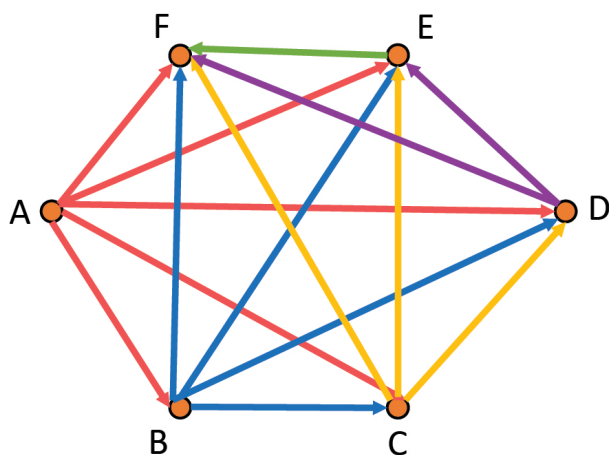
Ако их има четворо, биће три руковања више, тј. $3 + 3 = 6$ укупно.

Ако их је петоро, то значи 4 руковања више, дакле $6 + 4 = 10$.

За шесторо људи имаћемо додатних 5 руковања, па је $10 + 5 = 15$.

Други начин решавања састојао би се у следећем. Свака особа ће се руковати са свима осталима. Према томе, уколико имамо 6 особа, то значи да ће се свака особа појединачно руковати са 5 преосталих ($6 \cdot 5$). Међутим, пошто при сваком руковању увек имамо две особе које учествују, морамо укупан број руковања поделити са два, $(6 \cdot 5) : 2$.

Трећи начин. Проблем се може решити и цртањем дијаграма. Све особе представимо тачкама (или кружићима) и затим их повезујемо усмереним линијама (линије означавају руковање). Број линија је број руковања (Слика 42).



Слика 42. Коришћење дијаграма

Број свих линија је: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Четврти начин. Можемо и сваку од особа обележити неким словом, нпр. особе А, Б, В, Г, Д, Ђ. Направићемо листу особа које ће се руковати. Руковање се: АБ, АВ, АГ, АД, АЂ, БВ, БГ, БД, БЂ, ВГ, ВД, ВЂ, ГД, ГЂ, ДЂ. Укупно је било 15 руковања.

Пример 8. Ивана је имала новчаницу од 50 динара. Ову новчаницу разменила је са својим братом Дарком за ситније апоене. Може ли разменити ову новчаницу за 6 ситнијих апоена? Који је највећи могући број апоена које Дарко може дати Ивани?

Проширење проблема. Да ли је Ивана могла да размени новчаницу од 50 динара за 10 апоена?

Решење проблема. Постоји најмање два одговора на постављено питање. Треба прихватити свако објашњење ученика о томе како су дошли до решења.

Систематски приступ решавању проблема:

Јасно је да ако користимо веће апоене, онда можемо користити највише две новчанице од 20 динара. За преосталих 10 динара онда треба да користимо 4 апоена. Не можемо користити два новчића од 5 динара, али зато можемо користити један такав новчић. Онда за преосталих 5 динара морамо искористити најмање један новчић од 1 динара. Преостала два новчића морају бити од по 2 динара. Тако смо добили следеће решење: 20, 20, 5, 2, 2, 1.

Шта би било да смо користили само једну новчаницу од 20 динара? Онда можемо имати две, једну или ниједну новчаницу од 10 динара. Не можемо имати две новчанице од 10 динара, јер бисмо онда морали да направимо 10 динара помоћу три новчића, а то није могуће. Ако бисмо имали само једну новчаницу од 10 динара, онда би требало да помоћу 4 апоена направимо 20 динара. То можемо учинити једино коришћењем четири новчића од по 5 динара. Дакле, решење је: 20, 10, 5, 5, 5, 5. И остаје могућност да не користимо ниједну новчаницу од 10 динара. То значи да морамо направити 30 динара помоћу четири новчића. Ово није могуће, јер помоћу пет новчића можемо направити највише 25 динара (5 новчића од по 5 динара).

Највећи могући број новчаница од по 10 динара које можемо користити је четири (пет новчаница од по 10 динара је 50 динара, а треба нам шест апоена). Ово значи да за преосталих 10 динара треба да користимо два новчића. Ово је могуће ако користимо два пута по 5 динара. Решење је: 10, 10, 10, 10, 5, 5.

Ако бисмо користили три новчанице од по 10 динара, значи да преосталих 20 динара морамо направити помоћу три новчића. Међутим, највећи могући број динара је 15 (три пута по 5 динара). Према томе, нема више решења.

Који је највећи могући број новчића које би Дарко могао да да Ивани за 50 динара?

Највећи могући број новчића бисмо имали ако би Дарко имао само новчиће од по 1 динар. Тада би имао 50 новчића.

Решење проширења проблема. Ово је, јасно, тежи задатак од оног са 6 апоена. У овом случају било би добро записивати одговоре до којих су ученици дошли и видети колико их могу наћи.

С обзиром на то да је $10 \cdot 5 = 50$, онда бар један новчић мора бити 5 динара или више. Систематски проверавамо све случајеве где Дарко има апоене од 20 динара, 10 динара и 5 динара. Решења су:

20, 20, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1;

20, 10, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1;

20, 10, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1;

20, 10, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 1, 1;
 20, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2;
 10, 10, 10, 10, 5, 1, 1, 1, 1, 1;
 10, 10, 10, 10, 2, 2, 2, 2, 1, 1;
 10, 10, 10, 5, 5, 5, 2, 1, 1, 1;
 10, 10, 10, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 2;
 10, 10, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 1;
 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Пример 9. Замена места цифрама.

Замисли неки двоцифрени број. Замени места цифрама тог броја, а затим сабери добијени број са бројем који си замислио.

Нађи што више бројева који ће, када се саберу са бројем који је добијен заменом места цифара тог броја (зваћемо га „обрнути број”), као збир дати двоцифрени број.

Шта сви ти бројеви имају заједничко?

Решење проблема. При решавању овог проблема ученици могу пронаћи више правилности. Узмимо неколико примера, да бисмо видели шта ћемо добити:

$$13 + 31 = 44$$

$$26 + 62 = 88$$

$$47 + 74 = 121$$

$$54 + 45 = 99$$

$$68 + 86 = 154$$

Посматрајући наведене примере можемо уочити да, ако је збир цифара двоцифреног броја мањи од 10, онда је збир тог броја и броја који се добија заменом цифара мањи од 100.

Исто тако, можемо приметити да збир цифара двоцифреног броја одређује укупан збир, и то на следећи начин:

– ако је збир цифара двоцифреног броја нпр. 6, укупан збир бројева биће 66 ($42 + 24 = 66$, $51 + 15 = 66$ итд.);

– ако је збир цифара двоцифреног броја 8, укупан збир бројева биће 88 итд.

Ученици могу уочити и да је укупан збир бројева у свим случајевима производ броја 11 и збира цифара.

Проширење проблема. Да ли постоје неке правилности у случају када је резултат сабирања обрнутих бројева троцифрени број?

Напомене. При решавању овог проблема ученици увежбавају сабирање двоцифрених бројева. При томе, треба охрабровати ученике да другим ученицима саопштавају своје начине рачунања. Нека деца ће усмено вршити сабирање, док ће друга можда користити методу заокруживања. Веома је важно дозволити ученицима да размишљају на сопствени начин.

На пример, замислимо број 91. Заменом места цифара добићемо број 19. Збир бројева 91 и 19 рачунаћемо:

$$91 + 19 = 91 + 10 + 9 = 101 + 9 = 110 \text{ или}$$

$$91 + 19 = (91 - 1) + (19 + 1) = 90 + 20 = 110 \text{ или}$$

$$91 + 19 = 91 + 20 - 1 = 111 - 1 = 110.$$

Осим увежбавања сабирања, овај задатак даје могућност деци да се „играју” са бројевима. Деца се охрабрују да уочавају законитости у својим одговорима. Осим тога што се продубљује схватање и разумевање бројева и њихових односа, оваквим задатком се подстиче развијање вештине решавања проблема и развијање креативности.

Пример 10. Фармер намерава да огради један део свог имања за овце. Има 20 m жице и жели да тај део буде правоугаоног облика. Како све он може да огради тај простор? Колике могу бити странице таквог правоугаоника? Када нађете све правоугаонике чији је обим 20 m, нацртајте их на квадратној мрежи коју сте добили и одговорите који од нацртаних правоугаоника даје највише простора за кретање овцама? Зашто?

Решење проблема. Број 20 разлажемо на збир два парна сабирка јер је $O = 2a + 2b$. Имамо следеће могућности: $20 = 2 + 18$, $20 = 4 + 16$, $20 = 6 + 14$, $20 = 8 + 12$, $20 = 10 + 10$. Остали случајеви се понављају (замена места сабирцима). Дакле, странице могу бити дужина: 1 m и 9 m, 2 m и 8 m, 3 m и 7 m, 4 m и 6 m, 5 m и 5 m (квадрат). Ученици могу приметити да је збир свих ових парова мерних бројева 10, односно половина обима.

Можемо од ученика тражити да покушају да нађу још неке могућности, на пример, 5 mm и 95 mm итд. Овде долази до изражаја особина флексибилности.

Пример 11. Осмисли задатак.

Ученицима дајемо задатак, а затим од њих тражимо да сами смисле друге, нове, задатке које могу решити без рачунања, ослањајући се на дати задатак. На пример: Израчунај колико је $45 \cdot 3$, а затим на основу тога направим сам нове задатке које ћеш решити користећи оно што си већ израчунао.

Математичка креативност се, у овом случају, огледа у броју различитих идеја које дају ученици. Овај задатак нема једно, јединствено решење, и као такав омогућава ученицима да развијају флуентност, флексибилност и оригиналност мишљења.

Навешћемо само неке од могућих одговора:

$$45 \cdot 3 = 135$$

$$3 \cdot (40 + 5) = 135$$

$$3 \cdot 45 = 135$$

$$(6 : 2) \cdot 45 = 135$$

$$135 : 45 = 3$$

$$6 \cdot 45 = 270 \text{ итд.}$$

$$3 \cdot 450 = 1350$$

Пример 12. Деда Тоша је решио да среди своју башту правоугаоног облика. Желео је да на једној половини засади кромпир, на једној четвртини парадајз, на једној осмини да засади паприку, а на преосталом делу краставце. Како све он може да то уради? Помозите деду Тоши!

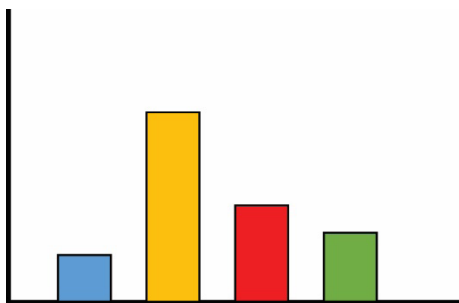
Решење проблема. Основна идеја лежи у чињеници да се задатак може решити на више начина. Ученици се подстичу да нађу што више различитих могућности и да при томе образлажу своје изборе. Такође, води се дискусија о „најадекватнијим” решењима.

Четврти разред

Пример 1. Наведи неке немогуће догађаје. Наведи неке догађаје који ће се сигурно догодити.

Пример 2. Шта мислите, зашто пошта наплаћује пошиљке у односу на масу, а не величину пошиљке?

Пример 3. Која информација о ученицима вашег одељења се може приказати помоћу графика који је приказан на слици испод? Обележите на графику шта сваки од стубића може да представља и напишите назив графика.



Слика 43. Изглед графика

Пример 4. Стефан је рачунао користећи калкулатор. Међутим, на калкулатору је дугме са бројем 3 покварено. Како Стефан може помоћу калкулатора да израчуна колико је $23 \cdot 45$, ако не може да користи дугме са

бројем 3? Запишите и објасните. Пронађите што више различитих начина (комплекснија варијанта Примера 7 за други разред, односно Примера 2 за трећи разред).

Пример 5. Никола, Тома, Милица и Саша су користили калкулаторе да би урадили свој домаћи задатак. Задатак који је требало да реше био је да израчунају вредност израза $3 + 4 \cdot 6 : 2 - 5$. Свако од њих четворо користио је другачији калкулатор. Никола и Тома добили су као резултат 16, а Милица и Саша добиле су 10. Ниједно од њих четворо није погрешило у притискању дугмића, свако је унео редом бројеве и симболе као у изразу, али су им резултати ипак били другачији. Можете ли да откријете зашто? Можете ли да откријете како је сваки од калкулатора рачунао?

Пример 6. Шта мислите, да ли је боље зарађивати 3000 динара недељно или 75 динара по једном сату рада? Који све фактори могу да утичу на вашу одлуку? Објасните.

Пример 7. Размислите и запишите које грешке може неко да направи множећи два двоцифрена броја.

На овај начин подстичемо критичко мишљење ученика. Задатак се не своди само на извођење поступка писменог множења вишецифрених бројева, већ тражимо од ученика да то знање примене. У овом случају добијамо много више информација о томе да ли су ученици заиста разумели поступак, или се ради само о механичкој примени алгоритма.

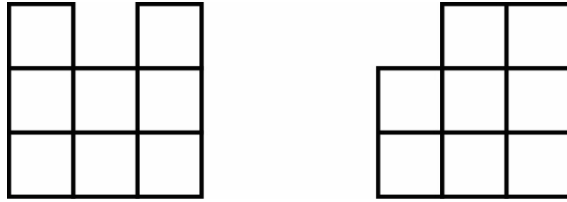
Пример 8. Нацртајте правоугаоник чија је површина 12 cm^2 .

Основна идеја је да ученици уоче да геометријске фигуре (у овом случају правоугаоници) могу имати једнаке површине, а при томе не морају бити подударне.

Пример 9. Принцеза Илијана добила је за рођендан новог кућног љубимца – аустралијско пегасто прасе. Пошто јој њени родитељи не дозвољавају да га чува у дворцу она је решила да за њега огради један део краљевског врта. Тај део је облика правоугаоника чији је обим 30 m. Колика може бити површина овог дела краљевског врта?

Напомена. У старијим разредима можемо изоставити податак да је ограђен део облика правоугаоника, чиме се проблем још више отвара.

Пример 10. Владимир се играо коцкама. Направио је замак, који спреда гледано изгледа као на првој, а са стране као на другој слици (Слика 44).



Слика 44. Поглед на структуру од коцака спреда и са стране

Покушајте да нацртате како је изгледао његов замак. Можете ли да нађете више решења?

Овим проблемом истражују се везе између дводимензионалних и тродимензионалних објеката. Оваква активност помаже ученицима да визуелизују тродимензионалне објекте на основу њихове дводимензионалне репрезентације. Такође, ученике упућује да се у неким случајевима различити тродимензионални објекти могу представити истим дводимензионалним репрезентацијама.

Пример 11. Попуните поља одговарајућим цифрама тако да рачун буде тачан.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 + \square \square \\
 \hline
 \square \square \square
 \end{array}$$

Слика 45. Попуни поља да рачун буде тачан

Овде се ради о сабирању два двоцифрена броја чији збир треба да буде троцифрени број. Постоји 8100 различитих могућности да саберемо нека два двоцифрена броја, а од тога 4860 задовољава услов да је збир троцифрени број. Ако би ученици записивали све могуће збирове, они би заправо извршили и вежбали сабирање велики број пута. Ако би их све записивали морали би да изаберу неки одређени критеријум по коме би то радили, а да не пропусте неку једнакост.

У почетку ће већина ученика записивати једнакост методом случајног избора. Ипак, очекујемо да ће један део ученика постепено почети да увиђа одређене законитости. Неки ће уочити да се одговарајуће суме налазе између једнакости $10 + 90$ и $99 + 99$. Ученици уопште могу пронаћи велики број израза облика $10 + 90$, $11 + 89$, ..., $90 + 10$, чија је вредност 100. Једна од могућности је да фиксирамо један од сабирака у сваком од ових израза.

Дакле, имаћемо:

$10 + 90, 10 + 91, 10 + 92, \dots, 10 + 98, 10 + 99$ и ово је укупно 10 могућности;

$11 + 89, 11 + 90, 11 + 91, \dots, 11 + 98, 11 + 99$, а то је 11 могућности;

$12 + 88, 12 + 89, 12 + 90, \dots, 12 + 98, 12 + 99$, а то је 12 могућности;

...

$89 + 11, 89 + 12, 89 + 13, \dots, 89 + 98, 89 + 99$, а ово је 89 могућности.

Даље, биће

$90 + 10, 90 + 11, \dots, 90 + 98, 90 + 99$, укупно 90 могућности;

$91 + 10, 91 + 11, \dots, 91 + 98, 91 + 99$, укупно 90 могућности;

...

$99 + 10, 99 + 11, \dots, 99 + 98, 99 + 99$, укупно 90 могућности.

Има десет оваквих случајева, па је укупан број ових збирова $10 \cdot 90$.

Укупан број свих могућности биће:

$$10 + 11 + 12 + \dots + 88 + 89 + 10 \cdot 90 = 10 + 89 + 11 + 88 + \dots + 49 + 50 + 10 \cdot 90 \\ = 40 \cdot 99 + 10 \cdot 90 = 4860.$$

Пример 12. „Осмице”

Изрчунајте вредности следећих израза, а затим покушајте да пронађете неку правилност по којој се јављају резултати.

$$8 \cdot 8 + 13 =$$

$$88 \cdot 8 + 13 =$$

$$888 \cdot 8 + 13 =$$

$$8888 \cdot 8 + 13 =$$

$$88888 \cdot 8 + 13 =$$

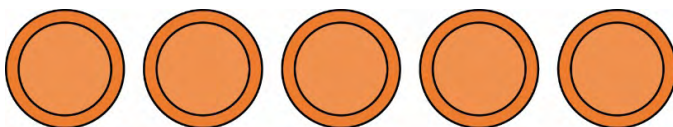
Да ли ће та правилност важити ако се број осмица повећава?

Напомене. Ученици треба да открију правилност по којој се јављају одређени бројеви. Налажење „шеме” по којој се бројеви појављују само је половина проблема. Другу половину представља задатак да утврдимо да ли ће се бројеви „понашати” по овој шеми бесконачно.

Решење проблема. Вредности датих израза су: 77, 717, 7117, 71117 и 711117. Закључујемо да важи $8 \dots 8 \cdot 8 + 13 = 711 \dots 117$. Међутим, тражимо мало већу прецизност у одговору. Колико осмица ће дати колико јединица? Ако имамо једну осмицу, у резултату нема јединица; уколико имамо две осмице, у резултату се појављује једна јединица итд. Дакле, n осмица даће $n - 1$ јединица. Другим речима, број јединица ће увек бити за један мањи од броја осмица. Како бисмо ово могли показати?

Посматрајмо најпре само следеће производе $8 \cdot 8 = 64$, $88 \cdot 8 = 704$, $888 \cdot 8 = 7104$, $8888 \cdot 8 = 71104$ итд. Сваки пут када допишемо још једну осмицу, производ се повећава као да смо првој цифри претходног производа додали 64. У сваком кораку број јединица се повећава за 1 (71...104). Ако број осмица означимо са n , број јединица биће $n - 2$. Када броју 71...104 дамо број 13 добићемо 71...17, па ће се број јединица повећати за 1. Дакле, n осмица даје $n - 1$ јединицу. А то је управо оно што смо претпоставили.

Пример 13. Играћемо стратегијску игру „Узми један или два”. Игра изгледа овако: ставићемо 5 жетона у један ред (Слика 46). Игра се тако што најпре игра један, па затим други играч. Сваки пут, играч има право да узме један или два жетона (по избору). Победник је онај који узме последњи жетон, тј. жетоне.



Слика 46. Игра „Узми један или два”

Треба да одговоримо на следећа питања:

Да ли можемо да нађемо како треба да игра први играч да би увек побеђивао (победничку стратегију)?

Да ли је игра фер? (Игра је фер ако сваки играч има подједнаку шансу да победи.)

Напомена. Проблем је отвореног типа. Ученицима не дајемо одговор на питање да ли је игра фер. Ако је фер, није битно ко почиње први са игром; сваки играч има подједнаку шансу да победи. Уколико није фер, треба да откријемо ко ће победити – први или други играч.

Отворени проблеми као што је овај спадају у теже проблеме, јер приликом њиховог решавања ученици треба да изаберу правац којим ће се кретати. Понекад је потребно да се игра одигра више пута, пре него што дођемо до тога који одговор треба да тражимо. Дакле, овакав проблем захтева много експериментисања.

Било би добро да се ученицима омогући да на овом проблему раде у пару. Важно је објаснити им да циљ игре коју играју није да победе противника, већ да покушају да пронађу победничку стратегију за играча који игра први. Учитељ може помоћи ученицима постављајући им питања попут: „Шта сте уочили играјући ову игру?”, „Ако си ти први играч, колико жетона треба да узмеш? Зашто?” итд. Треба их охрабрити да покушају да примене своју стратегију играјући са другим паром ученика.

Решење проблема. Овај проблем је препоручљиво посматрати „уназад”, користећи методу инверзије. Играч који побеђује је онај који узима последњи жетон или последња два жетона. Назваћемо тог играча играч А. Играч Б је други играч који игра пре играча А. Он ће пред собом имати 3 жетона. Наиме, уколико би имао 2, онда би узимањем та два победио, уколико би имао 4, узео би 1, остала би 3 жетона, па би онда Б био у победничкој позицији. Према томе, три жетона представљају за играча Б губитничку позицију. Следећа губитничка позиција за играча Б јесте 6 жетона. То је због тога што играч Б тада може узети само 1 или 2 жетона, па ће преостати 5 или 4. Онда играч А узимањем два или једног жетона, оставља 3 жетона, што је – као што смо раније приметили губитничка позиција за играча Б.

На почетку наше игре било је 5 новчића. Први играч је једини који има могућност да уклони жетоне тако да их остане 3, тако да други играч буде у губитничкој позицији. Закључујемо, игра није фер.

Исто бисмо имали и ако би број жетона на почетку био 4. Узимањем једног жетона преостаће три и опет први играч побеђује.

Са 6 жетона било би већ другачије. Без обзира како први играч одигра, други ће имати могућност да смањи број жетона на три, што га доводи у победничку позицију.

Проблем се може проширити тако што ћемо мењати број жетона на почетку игре.

Можемо закључити да, ако је број жетона на почетку производ броја 3, први играч губи, а уколико почетни број жетона није производ броја 3, први играч побеђује.

Пример 14. Пошта у Јагодини продаје само маркице које коштају 5 или 9 динара. Које све могу да буду вредности поштарине са овим маркицама?



Слика 47. Поштанске маркице од 5 и 9 динара

Треба подстицати ученике да на различите начине приступају проблему. Задатак се може решити тако што ћемо редом записивати одговарајуће збирове или то можемо чинити користећи таблицу у коју ћемо уписивати вредности. Већина ученика може да изведе закључак који ће то бројеви бити, односно 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30 и сви остали бројеви почевши од 32 па надаље. Од напреднијих ученика можемо

тражити да оправдају своје расуђивање. Износимо један од могућих приступа проблему.

Решење проблема. Претпоставимо да је већина ученика почела тако што су рачунали могуће вредности поштарине у односу на број маркаца сваке врсте. Није лоше подстицати ученике да ово чине на систематски начин. Могуће вредности поштарине биће бројеви 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, а од 32 па на више изгледа да све вредности долазе у обзир. То су редом 32, 33, 34, 35, 36,... Ако посматрамо све следеће бројеве, можемо уочити да ћемо их добити додавањем броја 5. Односно, $37 = 32 + 5$, $38 = 33 + 5$, $39 = 34 + 5$, $40 = 35 + 5$, $41 = 36 + 5$ итд., поступак се понавља.

Ово је пример једног начина доласка до решења. Треба прихватити сваки начин доласка до решења који је тачан и логички оправдан. Од ученика треба тражити да расуђују и образлажу своје мишљење и поступке. Ученицима можемо дати проширење проблема за домаћи задатак, или можемо тражити од њих да смисле нове проблеме.

* * *

Мада се примери приказани у претходним поглављима односе на прва четири разреда основне школе, не би се требало задржати на примени проблема отвореног типа само у овом периоду математичког образовања. Проблеми и активности отвореног типа би требало да постану саставни део математичке културе током целокупног школовања. Оно што, нажалост, отежава њихову ширу употребу јесте чињеница да постојећи уџбеници математике намењени старијим разредима основне школе не садрже проблеме овог типа. Ипак, користећи раније поменуте стратегије наставници их могу самостално креирати. Проблеми и активности отвореног типа нарочито је погодно користити на додатној настави математике, као и при извођењу пројектне наставе математике (због могућности да ученици дуже времена раде на њима). Ипак, не би требало занемарити ни њихову вредност када је у питању редовна настава математике. Наиме, као што је већ поменуто, проблеми овог типа дају наставнику увид у начин мишљења ученика, њихова предзнања, вештине и способности, омогућавају му да прати процес решавања проблема, а не само коначни продукт, односно решење задатка. Ту је још једна предност коришћења ових проблема, а то је да они представљају снажно средство диференцијације ученика и подстрекач су креативног мишљења.

Питања и задаци за самосталан рад

6.1. Пронађите у уџбенику математике (разред и издавач по избору) неколико проблема затвореног типа, а затим мењањем појединих делова задатака креирајте проблеме отвореног типа.

6.2. Пронађите слике и илустрације у уџбенику, радној свесци, дечијем часопису и сл. које могу послужити као извор за постављање математичких задатака.

6.3. Пронађите или осмислите неколико математичких задатака, а затим их решите на више различитих начина.

6.4. Креирајте за сваки разред по пет математичких проблема отвореног типа. Објасните због чега су ти примери отвореног типа.

6.5. Проучите уџбенике математике од првог до четвртог разреда (издавач по избору) и пронађите проблеме отвореног типа. Који проблеми отвореног типа су најчешће заступљени у њима?



*Гомила камења ѿресѣаје биѣши ѿмила камења у ѿренуѣку када један
једини човек ѿоїледа у њу, а у себи види слику катедрале.*

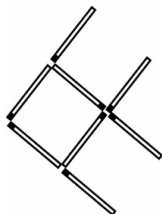
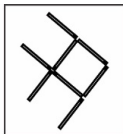
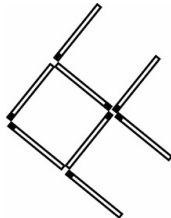
Антоан де Сент Егзипери, Мали Принц

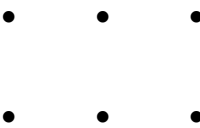


ПРИЛОГ

ТЕСТ МАТЕМАТИЧКИХ СПОСОБНОСТИ

Име и презиме: _____	
Разред и одељење: _____	
ТЕСТ МАТЕМАТИЧКИХ СПОСОБНОСТИ	
УПУТСТВО ЗА РЕШАВАЊЕ Драги учениче, Овај тест је намењен одличним математичарима попут тебе. Њиме желимо да утврдимо како решаваш тешке задатке. Сваки задатак најпре прочитај пажљиво. Ако је потребно, учини то неколико пута. Покушај да урадиш што више задатака. Ради самостално, немој се договарати са друговима! СРЕЋНО!	бодови
1. Стави одговарајуће рачунске операције у квадратиће и допиши заграде уколико је то потребно, како би вредност израза била 70. 3 2 4 7 =	AP1
2. Дешифруј следеће одузимање АВВА – ВСВ = 2004.	AP2
3. Имаш судове од 3 l и 5 l. Користећи искључиво њих како ћеш донети са чесме тачно 1 l?	AP3

4. У сваком од следећих низова бројева, бројеви се ређају по неком правилу. Када утврдиш правило продужи низ за још један број. а) 1, 3, 5, 7, 9, 11, __ б) 4, 7, 10, 13, 16, 19, __ в) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, __ г) 11, 13, 17, 23, 31, 41, __	АП1																								
5. Који бројеви недостају у табелама? <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td></td></tr></table> <table><tr><td>4</td><td>14</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr><tr><td>6</td><td>11</td><td>5</td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	2	4	6		3	6	9		4	14	2	8	8	8	8	8	6	11	5		АП2
1	2	3	4																						
2	4	6																							
3	6	9																							
4	14	2	8																						
8	8	8	8																						
6	11	5																							
6. Састави магични квадрат (3x3) чији су елементи бројеви 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14. <table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>										АП3															
7. Премести само четири палидрвца тако да рибица буде окренута на другу страну.   Да ли је то могуће учинити померањем само три палидрвца? Како? 	Г1																								

8. У једном граду у главној улици у правој линији су школа, пошта и биоскоп. Од школе до поште је 1 km и 215 m, а растојање између школе и биоскопа је за једну трећину краће. Колико је растојање између поште и биоскопа? Колико решења има задатак?	Г2
9. Колико има троуглова чија су темена у датим тачкама? 	Г3
10. Који је број за 30 већи од своје трећине?	Л1
11. Мачка и по, за дан и по, улови миша и по. Колико мишева улови 9 мачака за 9 дана?	Л2
12. У соби која има облик квадрата распореди 16 столица тако да поред сваког зида буде 5 столица. 	Л3

ЛИТЕРАТУРА

Avcu S., Avcu R. (2010). Pre-service elementary mathematics teachers' use of strategies in mathematical problem solving. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 1282–1286.

Adikayanti, L., Retnawati, H. (2022). Is Project-Based Learning Integrated to STEM Can Improve Creativity and Problem-Solving Skills in Mathematics Learning? *Proceedings of the 4th International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics Education (ISIMMED) 2020*, 2575: 080009. <https://doi.org/10.1063/5.0110811>.

Aiken L. R. (1973). Ability and creativity in mathematics, *Review of educational research*, 43(4), 405–423.

Aish, D. (2014). *Teachers' beliefs about creativity in the elementary classroom* [Doctoral dissertation]. Pepperdine University Graduate School of Education and Psychology, <https://core.ac.uk/download/pdf/288853879.pdf>.

Almira, J. M. (2022). *Norbert Wiener: A mathematician among engineers*. World Scientific Publishing Company, Incorporated.

Altaras, A. (2006). *Darovitost i podbacivanje*. Pančevo: Mali Nemo, Beograd: Institut za psihologiju, Društvo psihologa Srbije.

Алтарас Димитријевић, А., Татић Јаневски, С. (2016). *Образовање ученика изузетних способности: научне основе и смернице за школску праксу*. Београд: Завод за унапређивање образовања и васпитања.

Amabile, T. M. (1983). *The social psychology of creativity*. New York: Springer-Verlag.

Andrilović, V., Čudina-Obradović, M. (1996). *Psihologija učenja i nastave*. Zagreb: Školska knjiga.

Arar, Lj., Rački, Ž. (2003). Priroda kreativnosti. *Psihologijske teme*, 12(1), 3–22.

Арсић, М. (2000). *Како унапређивати наставу*. Виша школа за образовање васпитача.

Арсић, З., Вучинић, Д. (2013). Индивидуализована настава у функцији подстицања развоја даровитости и креативности код ученика. *Зборник радова Филозофског факултета у Приштини*, 43(2), 25–39.

Arslanagić, Š. (2001). *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*. Sarajevo: Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine.

Babić-Kekez, S., Farbaš, D. (2019). Stručno usavršavanje nastavnika za rad sa darovitim učenicima u obrazovnoj politici. U G. Gojkov, J. Prtljaga (ur.), *Tematski zbornik 24: Dostignuća i perspektive u obrazovanju darovitih* (str. 45–50). Vršac:

Visoka škola strukovnih studija za vaspitače „Mihailo Palov”, Arad, Romania: Universitatea de Vest „Aurel Vlaicu”.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 21, 633–636.

Barczi, K. (2013). Applying cooperative techniques in teaching problem solving. *CEPS Journal*, 3(4), 61–77.

Barron, F. (1988). Putting creativity to work. In R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of creativity: Contemporary psychological perspectives* (pp. 76–98). New York: Cambridge University Press.

Baroody A. J., Coslick R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: an investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Becker, J. P., Shimada, S. (Eds.) (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Beghetto, R. A. (2017). Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into non-routine problems. *ZDM Mathematics Education*, 49, 987–993. DOI:10.1007/s11858-017-0885-1

Bicknell, B., Riley, T. (2012). The role of competitions in a mathematics programme. *APEX: The New Zealand Journal of Gifted Education*, 17(1), 1–9.

Bingölbalı, E., Bingölbalı, F. (2021). An examination of open-ended mathematics questions' affordances. *International Journal of Progressive Education*, 17(4), 1–16. DOI: 10.29329/ijpe.2021.366.1

Blanuša, J., Barzut, V. (2020). Obrazovanje darovite dece: pregled različitih pristupa i intervencija. U S. Hilčenko (ur.), *Tematski zbornik radova Internet, edukacija, nauka, 11. međunarodna konferencija Horizonti 2020* (str. 111–117). Subotica: Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača i trenera.

Bloom, B. (1981). *Taksonomija ili klasifikacija obrazovnih i odgojnih ciljeva: kognitivno područje*. Beograd: Republički zavod za unapređivanje vaspitanja i obrazovanja.

Borovik, A., Gardiner, A. D. (2007). *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*. Manchester: The University Of Manchester.

Брковић, А. (2011). *Развојна психологија*. Чачак: Регионални центар за професионални развој запослених у образовању.

Brown, S. I., Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Брунер, С. (1984). Процес образовања. *Педагогија*, 2–3, 275–321.

Burjan, V. (1991). Mathematical giftedness: Some questions to be answered. In F. J. Mönks, M. W. Katzko, H. W. van Boxtel (Eds.), *Education of the gifted in Europe: Theoretical and research issues* (pp. 165–170). Amsterdam: Swets & Zeitlinger.

Van den Brink, J. F. (1987). Children as arithmetic book authors. *For the learning of mathematics*, 7(2), 44–48.

Vilkomir, T., O'Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 183–199.

Вилотијевић, М., Вилотијевић, Н. (2016). *Модели развијајуће наставе I*. Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.

Vulović, N., Mihajlović, A., Milikić, M. (2022). Achievements of younger primary school students in mathematics competitions during the Covid-19 pandemic, *Uzdanica*, XIX, special issue, 133–147.

Gagné, F. (1995). From giftedness to talent: A developmental model and its impact on the language of the field. *Roeper Review*, 18(2), 103–111.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies*, 15(2), 119–148.

Gagné, F. (2005). From gifts to talents: The DMGT as a developmental model. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness*, 2nd edition (pp. 98–119). New York: Cambridge University Press.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (1999). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st Century*. New York: Basic Books.

Gardner, H. (2000). The giftedness matrix: A developmental perspective. In R. C. Friedman, B. M. Shore (Eds.), *Talents unfolding: Cognition and development* (pp. 77–88). Washington DC: American Psychological Association.

Gvozdenović, S. (2011). *Metodika nastave filozofije*. Podgorica: Univerzitet Crne Gore.

George, D. (2005). *Obrazovanje darovitih: kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike*. Zagreb: Educa.

Gilfeather, M., Del Regato, J. (1999). *Routine and Non-Routine Problem Solving*. Pentathlon Institute, Inc.

Гојков, Г. (1999). Рана идентификација даровитости. *Зборник 5*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача, 12–27.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 14–17.

Guilford, J. P. (1963). Intellectual resources and their values as seen by scientists. In C. W. Taylor, F. Barron (Eds.), *Scientific creativity: Its recognition and development* (pp. 101–118). New York: Wiley.

Davis, R. B. (1984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Дејић, М. (1997). Математичке способности и њихово развијање. *Зборник 3*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача, 172–178.

Дејић, М., Егерић, М., Михајловић, А. (2022). *Методика математике у разредној настави*. Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.

Дејић, М., Милинковић, Ј., Токић, О. (2009). *Уџбеник за четврти разред основне школе*, први и други део, четврто издање. Београд: Креативни центар.

Дејић, М., Михајловић, А. (2003). Нека светска искуства у идентификацији и развијању даровитости за математику. *Месео даровитих у курикуларној реформи, Зборник 9* (стр. 299–309). Вршац: Висока школа струковних студија за образовање васпитача „Михаило Палов”.

Дејић, М., Михајловић, А. (2014). *Математичка даровитост*. Београд: Учитељски факултет.

Дејић, М., Ђебић, С., Михајловић, А. (2009). *Математичка даровитост и креативност*. Панчево: Регионални центар за таленте „Михајло Пупин”.

Devlin, K. (2000). *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip*. Basic Books.

Драшковић, Б. (1998). *Даровити и образовна одлука: Све је почело њима*. Менџорски рад – да или не? Београд: АБЦ Графика.

Dyer, M., Moynihan, C. (2000). *Open-ended Question in Elementary Mathematics Instruction & Assessment*. Larchmont. New York: Eye on Education.

Ђорђевић, Ј. (1997). *Настава и учење у савременој школи*. Београд: Учитељски факултет у Београду и Савез педагошких друштава Југославије.

Ђорђевић, В. (1999). Могућности ране идентификације даровитих. *Зборник Више школе за образовање васпитача*, 5, 94–112.

Ђорђевић, Ј. (2011). Процес глобализације и креативност. *Зборник радова са међународног научног скупа „Даровити у процесу глобализације”* (стр. 160–172). Вршац: Висока школа струковних студија за образовање васпитача „Михаило Палов”, Arad, Romania: Universitatea de Vest „Aurel Vlaicu”.

Ђорђевић, Ј., Ђорђевић, В. (2016). *Природа даровитости и подстицање развоја*. Београд: Српска академија образовања.

Ђурић, Т. (1999). Идентификација и рад са даровитим у предшколским установама. *Зборник 5*. Вршац: Виша школа за образовање васпитача, 147–163.

Eckert, T. L., Dunn, E. K., Coddington, R. S., Begen, J. C., Kleinmann, A. E. (2006). Assessment of mathematics and reading performance: An examination of the correspondence between direct assessment of student performance and teacher report. *Psychology in the Schools*, 43, 247–265.

Erdeš Babić, N., Miroslavljević, A. (2021). Могућности имплементације ефикасних приступа раду с даровитим ученицима. *Acta Iadertina*, 18(1), 4–73.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer Academic.

Eysenck, H. J. (1993). Creativity and personality: Suggestions for a theory. *Psychological Inquiry*, 4(3), 147–178.

Закон о основама система образовања и васпитања. *Службени јасник РС*, бр. 88/2017, 27/2018.

Закон о основном образовању и васпитању. *Службени јасник РС*, бр. 55/2013, 101/2017, 10/2019, 27/2018.

Закон о средњем образовању и васпитању. *Службени јасник РС*, бр. 55/2013, 101/2017, 27/2018.

Imai, T. (2010). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 187–193, <https://doi.org/10.1080/002073900287246>.

Jaenudin, A., Kartono, Sukestiyarno, Y., Mariani, S. (2020). The Identification of Students' Mathematical Creative Thinking Ability on Transformation Geometry. *Social Science, Education and Humanities Research*, 443, 101–104, <https://doi.org/10.2991/assehr.k.200620.020>.

Jin, S., Moon, S. M. (2006). A study of well-Being and school satisfaction among academically talented students attending a science high school in Korea. *Gifted Child Quarterly*, 50(2), 169–184.

Joklitschke, J., Rott, B., Schindler, M. (2022). Notions of Creativity in Mathematics Education Research: a Systematic Literature Review. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1161–1181, <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10192-z>.

Jukić, S. (2005). *Didaktičko-metodički fragmenti*. Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača.

Jung, J., Gross, M. (2015). Radical acceleration. In S. Assouline, N. Colangelo, J. VanTassel-Baska (Eds.), *A nation empowered: Evidence trumps the excuses holding back America's brightest students*, Vol. 2 (pp. 199–208). Iowa City, IA: The Connie Belin & Jacqueline N. Blank International Centre for Gifted Education and Talent Development.

Kadum-Bošnjak, S. (2013). *Darovitost i daroviti u nastavi (matematike) primarnog obrazovanja*. Koper: Univerza na Primorskem, Pedagoška Fakulteta.

Kadum, S., Hozjan, D. (2015). *Darovitost u nastavi*. Pula: Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilišta Jurja Dobrile u Puli.

Kantowski M. G. (1981). Problem solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research* (pp. 111–126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Karwowski, M., Jankowska, D. M., Brzeski, A., Czerwotka, M., Gajda, A., Lebeda, I., Beghetto, R. A. (2020). Delving into Creativity and Learning. *Creativity Research Journal*, 32(1), 4–16, <https://doi.org/10.1080/10400419.2020.1712165>.

Kaufman, J. C. (2009). *Creativity 101*. Springer Publishing Company.

Квашчев, Р. (1981). *Психолоија сѝваралашѝва*. Београд: Завод за уѝбенике и наставна средства.

Квашчев, Р., Милинковић, М. (1984). Утицај склопа особина личности на успех испитаника у школском учењу. *Психолошка исѝраживања*, 3, 54–81.

Kenderov, P. S. (2022). Mathematics competitions: an integral part of the educational process. *ZDM Mathematics Education*, 54, 983–996, <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01348-4>.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3–38). New York: Macmillan.

Kim, H., Cho, S., Ahn, D. (2003). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of gifted in math. *Gifted Education International*, 18, 164–174, <https://doi.org/10.1177/026142940301800206>.

Kitano, M., Kirby, D. (1986). *Gifted education: A comprehensive view*. Boston: Little brown & Company.

Kozlowski, J. S., Chamberlin, S. A., Mann, E. (2019). Factors that Influence Mathematical Creativity. *The Mathematics Enthusiast*, 16(1), 505–540. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1471>

Колмогоров, А. Н. (1988). *О профессии математика*. Москва: Изд-во Московского Университета.

Koren, I. (1971). *Eksperimentalni doprinos metodici sistematskog identifikiranja nadarene omladine*. Zagreb: Republički zavod za zapošljavanje.

Koren, I. (1989). *Kako prepoznati i identificirati nadarenog učenika*. Zagreb: Školske novine.

Koren, I. (2013). Povijesni osvrt na konceptualizaciju pojave nadarenosti. *Napredak, časopis za pedagogijsku teoriju i praksu*, 154(3), 339–361.

Kroll, D. L., Miller, T. (1993). Insights from research on mathematical problem solving in middle grades. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom, middle grade mathematics* (pp. 58–74). New York: NCTM.

Krüger, N., Johannsen, M., Smoydzin, L. F., Genzel, H., Peritz, M. I., Meyer, J., Fiedler, S., Daseking, M. (2019). Research within the framework of the hamburger model for the promotion of particularly mathematically gifted children and adolescents. In M. Nolte (Ed.), *Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (MCG11): Including the highly gifted and creative students: current ideas and future directions* (pp. 358–365). Hamburg: Universität Hamburg.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Kunac, S. (2015). Kreativnost i pedagogija. *Napredak*, 156(4), 423–446.

Kurnik, Z. (2000). Matematički zadatak. *Matematika i škola*, 7, 51–58.

Kurnik, Z. (2001). Matematičke sposobnosti. *Matematika i škola*, 10, 195–199.

Kwon O. N., Park J. S., Park J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51–61.

Lee, K. H. (2017). Convergent and divergent thinking in task modification: a case of Korean prospective mathematics teachers' exploration. *ZDM Mathematics Education*, 49, 995–1008, <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0889-x>.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383–409). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. (2018). Giftedness and High Ability in Mathematics. In S. Lerman (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_65-4.

Leikin, R. (2021). When practice needs more research: the nature and nurture of mathematical giftedness. *ZDM Mathematics Education*, 53(7), 1579–1589, doi: 10.1007/s11858-021-01276-9.

Leikin, R., Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 161–168). Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Leikin, R., Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Proceedings*, http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/7/Leikin_Kloss_CERME7-WG7.pdf.

Lester, F. K. (1980). Problem solving: Is it a problem? In M. M. Lindsquist (Ed.), *Selected issues in mathematics* (pp. 29–45). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Letić, M. (2015). *Značaj moralnih i liderskih svojstava za ostvarenje darovitosti* [Doktorska disertacija]. Novi Sad: Univerzitet u Novom Sadu, Filozofski fakultet.

Leung S. K. S. (1997). On the open-ended nature in mathematical problem posing. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom, Research report 176* (pp. 26–33). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *Arithmetic Teacher*, 17, 325–328.

Liljedahl, P., Allan, D. (2013). Mathematical Discovery. In E. G. Carayannis (Ed.), *Encyclopedia of Creativity, Invention, Innovation and Entrepreneurship*. New York, NY: Springer, https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3858-8_376.

London, R. (1993). *A curriculum of nonroutine problems*. Paper represented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Lou, S. J., Chou, Y. C., Shih, R. C., Chung, C. C. (2017). A Study of Creativity in CaC2 Steamship-Derived STEM Project-Based Learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 2387–2404.

Mainali, B. (2021). Preference for Solution Methods and Mathematical Performance: A Critical Review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0651. <https://doi.org/10.29333/iejme/11089>.

Maksić, S. (1993). *Kako prepoznati darovitog učenika*. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.

Maksić, S. (1996). Ganjeovo shvatanje darovitosti, talenata i kreativnosti. U G. Gojkov (ur.), *Darovitost i kreativnost na predškolskom i ranoškolskom uzrastu: Zbornik 2* (str. 55–64). Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača.

Mann, E. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. Berlin: Springer.

Маричић, С. (2006). Подсїицање сїваралачкої пага у маїемайици. Ужиче: Учїтельскї факултет.

Maslow, A. H. (1968). *Toward a psychology of being* (2nd edition). Princeton: Van Nostrand.

Метельскїй, Н. В. (1989). *Пути совершенствованиу обученоу математике*. Минск: Университетское.

Maker, C. J., Nielson, A. B. (1996). *Curriculum development and teaching strategies for gifted learners*. Austin, TX: PRO-ED.

Maksić, S. (1998). *Darovito dete u školi*. Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.

Марковић, Ж. (2006). Проблемска настава. *Образовна теџнолоїја*, 2–3, 65–67.

Мартиновић, И. (2019). *Проблемска насїава и вешїина їисања у насїави енїлескої їословної језика* [Докторска дисертација]. Нови Сад: Универзитет у Новом Саду, Филозофскї факултет, <https://nardus.mpn.gov.rs/handle/123456789/11590>.

Mayer, R. E., Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg, T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 29–54). Lawrence Erlbaum Associates.

Mijanović, N. (2018). Teorijsko određenje, otkrivanje i identifikovanje darovitih učenika. U G. Gojkov, A. Stojanović (ur.), *Tematski zbornik 23 – Darovitost i kreativni pristup učenju* (str. 264–276). Vršac: Visoka škola strukovnih studija za vaspitače „Mihailo Palov”, Arad, Romania: Universitatea de Vest „Aurel Vlaicu”.

Милановић, А. (2017). Теорије о даровитима. *Годишњак Педагошкої факултета у Врању*, 8(1), 191–201.

Milgram, R., Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: causes and solutions. In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 149–163). Rotterdam: Sense Publishers.

Milićević, J., Milić, N., Maksimović, G., Erić, M., Bjekić, J. (2015). Psihometrijska provera testa opšte kreativnosti. U N. Milićević, I. Ristić, V. Nešić, S. Vidanović (ur.), *O kreativnosti i umetnosti – savremena psihološka istraživanja* (str. 29–46). Niš: Izdavački centar Filozofskog fakulteta u Nišu.

Михајловић, А. (2006). *Идентификација и рад са математички даровитим ученицима у разредној настави* [Магистарска теза]. Јагодина: Учитељски факултет.

Михајловић, А. (2012). *Развијање креативности у њојој настави математике методом овореној иприсуја* [Докторска дисертација]. Јагодина: Универзитет у Крагујевцу, Педагошки факултет.

Myers, T., Carey, E., Szűcs, D. (2017) Cognitive and neural correlates of mathematical giftedness in adults and children: a review. *Frontiers in Psychology*, 8, 1646, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01646>.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N. (2013). The frontage of creativity and mathematical creativity. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 90, 344–350.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nickerson, R. S. (1999). Enhancing creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity*. New York, NY: Cambridge University Press (pp. 392–430).

Nolte, M. (Ed.). (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. Fragen zur Talentsuche im Rahmen eines Forschungs und Förderprojekts zu besonderen mathematischen Begabungen im Grundschulalter*. Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. (2024). Questions about the identification of mathematically gifted students. *The Mathematics Enthusiast*, 21(1): 18 (Preprint). DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1630>

Nolte, M., Kießwetter, K. (1996). Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden? Ein Bericht über einschlägige Überlegungen und erste Erfahrungen. *ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 143–157.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. In T. Nakahara, M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 1 (pp. 39–53). Hiroshima: Hiroshima University.

Özdemir, D., Işıksal, M. (2021). Adaptation study of mathematical ability test (TOMAGS) to Turkish. *Bartın University Journal of Faculty of Education*, 10(1), 200–217, <https://doi.org/10.1016/buefad.801589>.

Pavleković, M. (2009). *Matematika i nadareni učenici – Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Zagreb: Element.

Page, A. (2006). Three models for understanding gifted education. *Kairaranga*, 7(2), 11–15.

Parish, L. (2014). Defining mathematical giftedness. In J. Anderson, M. Cavanagh, A. Prescott (Eds.), *Curriculum in focus: Research guided practice, Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 509–516). Sydney: MERGA.

Perkins, D. N. (1988). Creativity and the quest for mechanism. In R. J. Sternberg, E. E. Smith (Eds.), *The psychology of human thought* (pp. 309–336). New York: Cambridge University Press.

Petrill, S. A., Kovas, Y., Hart, S. A., Thompson, L. A., Plomin, R. (2009). The genetic and environmental etiology of high math performance in 10-year-old twins. *Behavior Genetics*, 39(4), 371–379, <https://doi.org/10.1007/s10519-009-9258-z>.

Pehkonen, E. (1997a). Introduction to the concept “open-ended” problem. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom, Research report 176* (pp. 8–11). Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.

Pehkonen, E. (1997b). Use of problem fields as a method for educational change. In E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 73–84). Helsinki: University of Helsinki.

Pehkonen, E. (1997c). The state-of-art in mathematical creativity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 29, 63–67, <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0001-z>.

Pehkonen E. (2007). *Problem solving in mathematics education in Finland*, Unpublished manuscript. University of Helsinki, Finland, Retrieved on February 2012 from <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ALL/Papers/PEHKON.pdf>.

Poincare, H. (1908). *Science and method*. New York: Dover Publications Inc.

Poincaré, H. (1948). *Science and method*. New York: Dover.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Polya, G. (1966). *Kako riješiti matematički zadatak?*. Zagreb: Školska knjiga.

Popović, D. (2010): Individualizacija u nastavi. U P. Vukotić (ur.), *Crna Gora u XXI stoljeću – u eri kompetitivnosti, obrazovanje* (str. 161–182). Podgorica: CANU, 73/10.

Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019). *Службени гласник РС*, 11/2019-1.

Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). *Службени гласник РС*, 10/2017-1.

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). *Службени гласник РС*, 16/2018-47.

Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019). *Службени гласник РС*, 5/2019-6.

Правилник о наставном плану и програму за ученике 7. и 8. разреда основног образовања и васпитања обдарене за математку (2019). *Службени гласник РС*, 12/2019.

Радић, А. (2018). Brainstorming као једна од техника одлучивања. *Engineering management*, 4(2), 134–142.

Ракић, Д., Лазић, Б. (2019). Откривање и рад са ученицима потенцијално даровитим за математику. *Норма*, 24(2), 91–106.

Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 53–92). Cambridge: Cambridge University Press.

Renzulli, J. S. (2005). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for promoting creative productivity. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 246–279). New York: Cambridge University Press.

Rehman, N., Zhang, W., Mahmood, A., Fareed, M. Z., Batool, S. (2023). Fostering twenty-first century skills among primary school students through math project-based learning. *Humanities & Social Sciences Communications*, 10, 424, <https://doi.org/10.1057/s41599-023-01914-5>.

Robinson, A., Clinkenbeard, P. R. (2008). History of giftedness: Perspectives from the past presage modern scholarship. In S. I. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of Giftedness in Children* (pp. 13–31). Springer, https://doi.org/10.1007/978-0-387-74401-8_2.

Rogers, K. (2015). Academic effects research synthesis. In S. Assouline, N. Colangelo, J. VanTassel-Baska, A. Lupkowski-Shoplik (Eds.), *A nation empowered: Evidence trumps the excuses holding back America's brightest students* (pp. 19–30). Iowa City, IA: The Connie Belin & Jacqueline N. Blank International Centre for Gifted Education and Talent Development.

Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient?. *School Science and Mathematics*, 70, 3–8.

Runco, M. A. (2007). *Creativity. Theories and Themes: Research, Development, and Practice*. Burlington MA: Elsevier Academic Press.

Sak, U., Maker, C. J. (2005). Divergence and convergence of mental forces in open and closed mathematical problems. *International Education Journal*, 6 (2), 252–260.

Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování v matematice. *Scientia in educatione*, 6, 91–122.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, S. Shimada (Eds.), *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics* (pp. 1–9). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38.

Szabo, A. (2015). Mathematical problem-solving by high-achieving students: Interaction of mathematical abilities and the role of the mathematical memory. *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 108–1093). Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education.

Szabo, A. (2017). *Mathematical abilities and mathematical memory during problem solving and some aspects of mathematics education for gifted pupils* [Doctoral dissertation], Stockholm University. DIVA portal, <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1143981/FULLTEXT01.pdf>.

Szabo, A., Andrews, P. (2017). Examining the interaction of mathematical abilities and mathematical memory: A study of problem-solving activity of high-achieving Swedish upper secondary students. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1), 10. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1392>

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. A. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 95(2), 67–72.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through construction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM International Reviews on Mathematical Education*, 29, 75–80. DOI: 10.1007/s11858-997-0003-x

Silverman, L. K. (1998). Perfectionism. *Gifted Education International*, 13(3), 216–255.

Симић, В., Милинковић, Н. (2022). Методичке вредности диференциране наставе у почетној настави математике из угла учитеља. *Учење и настава*, 8(1), 139–162.

Siswono, T. Y. E. (2011). Level of student's creative thinking in classroom mathematics. *Educational Research and Reviews*, 6, 548–553.

Skinner, P. (1991). *What's your problem? Posing and solving mathematical problems, K-2*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator*, 14(1), 19–34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 20–36.

Stanley, J. C. (1988). Some Characteristics of SMPY's "700-800 on SAT-M Before Age 13 Group": Youths Who Reason Extremely Well Mathematically. *Gifted Child Quarterly*, 32(1), 205–209, <https://doi.org/10.1177/001698628803200104>.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the classroom: Schools of curious delight*, 4th Edition. New York, NY: Routledge.

Starko, A. J. (2022). Creativity and mathematics: A beginning look. In S. A. Chamberlin, P. Liljedahl, M. Savić (Eds.), *Mathematical creativity: A developmental perspective* (pp. 3–14). Cham: Springer.

Stepanek, J. (1999). *The inclusive classroom. Meeting the needs of gifted Students: Differentiating Mathematics and Science Instruction*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Lab.

Sternberg, J. R. (1981). A componential theory of intellectual giftedness. *Gifted Child Quarterly*, 25(2), 86–93, <https://doi.org/10.1177/001698628102500208>.

Sternberg, R. J. (1986). A triarchic theory of intellectual giftedness. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 223–243). Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1996). *Cognitive psychology*. Fort Worth: Harcourt Brace & Company.

Sternberg, R. J. (1999). Intelligence. In M. A. Runco, S. R. Pritzker (Eds.), *Encyclopedia of creativity*, Vol. 2 (pp. 81–88). San Diego, CA: Academic Press.

Sternberg, R. J. (2000a). Patterns of giftedness: A triarchic analysis. *Roeper Review*, 22(4), 231–235.

Sternberg, R. J. (2000b). *Handbook of creativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., Grigorenko, E. L. (2002). The Theory of Successful Intelligence as a Basis for Gifted Education. *Gifted Child Quarterly*, 46(4), 265–277, <https://doi.org/10.1177/001698620204600403>.

Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (1985). Cognitive development in the gifted and talented. In F. D. Horowitz, M. O'Brien (Eds.), *The gifted and talented: Developmental perspectives* (pp. 37–74). American Psychological Association, <https://doi.org/10.1037/10054-002>.

Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (1986). Conceptions of giftedness: A map of the terrain. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (3–18). New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist*, 51, 77–88.

Sternberg, R. J., Lubart, T. I. (1999). The concept of creativity: Prospects and paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 3–15). Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., Lubart, T. I., Kaufman, J. C., Pretz, J. E. (2005). Creativity. In K. J. Holyoak, R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 351–369). Cambridge: Cambridge University Press.

Стевановић, Б. (1979). *Педагошка психологија*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Stevanović, M. (2003). *Modeli kreativne nastave*. Tisak, Znanje d. d.

Стефановић А. (2009). *Уџбеник за ђређи разред основне школе, ђрви и груђи гео*, пето издање. Београд: Креативни центар.

Stojaković, P. D. (2022). *Psihologija darovitosti i kreativnosti*. Beograd: Srpska Akademija Obrazovanja.

Sullivan, P. (2011). Teaching mathematics: Using research-informed strategies. *Australian Education Review*, 59. Camberwell, Australia: Australian Council for Educational Research.

Tabach, M., Friedlander, A. (2013). School mathematics and creativity at the elementary and middle-grade levels: How are they related? *ZDM*, 45, 227–238. DOI: 10.1007/s11858-012-0471-5

Takahashi, A. (2000). Current trends and issues in lesson study in Japan and the United States. *Journal of Japan Society of Mathematical Education*, 82(12), 15–21.

Tannenbaum, A. J. (1983). *Gifted children: Psychological and educational perspectives*. New York: Macmillan.

Tannenbaum, A. J. (1986). Giftedness: a psychosocial approach. In R. J. Sternberg, J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of Giftedness* (pp. 21–52). Cambridge: Cambridge University Press.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests of Creative Thinking: norms and technical manual*. Bensenville: Scholastic Testing Service.

Tosto, M. G., Hanscombe, K. B., Haworth, C. M., Davis, O. S., Petrill, S. A., Dale, P. S., Kovas, Y. (2014). Why do spatial abilities predict mathematical performance?. *Developmental Science*, 17(3), 462–470. doi: 10.1111/desc.12138

United Nations (2015). *Transforming our world: The 2030 agenda for sustainable development*, <https://sustainabledevelopment.un.org/content/documents/21252030%20Agenda%20for%20Sustainable%20Development%20web.pdf>.

Fetterly, J. M. (2010). An exploratory study of the use of a problem-posing approach on pre-service elementary education teachers' mathematical creativity, beliefs, and anxiety [Doctoral dissertation], Florida State University. DigiNole: FSU's digital repository. <http://etd.lib.fsu.edu/theses/available/etd-07312010-124514/>

Foong P. Y. (2000). Open-ended problems for higher-order thinking in mathematics. *Teaching and Learning*, 20(2), 49–57.

Foong P. Y. (2002). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference: The Humanistic Renaissance in Mathematics Education* (pp. 135–140), <http://math.unipa.it/~grim/SiFoong.pdf>.

Foster, C. (2019). The fundamental problem with teaching problem solving. *Mathematics Teaching*, 265, 8–10, <https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT265/MT265 03.pdf>.

Foster, C. (2021). Problem solving and prior knowledge. *Mathematics in School*, 50(4), 6–8.

Foster, C. (2023). Problem solving in the mathematics curriculum: from domain-general strategies to domain-specific tactics. *The Curriculum Journal*, 34(4), 594–612, <https://doi.org/10.1002/curj.213>.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.

Hartmann, L. M., Krawitz, J. Schukajlow, S. (2021). Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems?. *ZDM Mathematics Education*, 53, 919–935, <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01224-7>.

Hatfield, L. (1978). Heuristic emphases in the instruction of mathematical problem solving: rationales and research. In L. Hatfield, D. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 21–42). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Haylock, D. W. (1987). Mathematical Creativity in School children. *The Journal of Creative Behavior*, 21, 48–59.

Haylock, D. (1997). Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren. *ZDM Mathematics Education*, 29, 68–74.

Healy, C. C. (1993). *Creating miracles: A story of student discovery*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Heid, M. K. (1983). Characteristics and special needs of the gifted student in mathematics. *Mathematics Teacher*, 76, 221–226.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4), 12–21.

Huzjak, M. (2006). Darovitost, talent i kreativnost u odgojnom procesu. *Odgojne znanosti*, 8(1), 289–300.

Calik, B., Birgili, B. (2013). Multiple intelligence theory for gifted education: Criticism and implications. *Journal for the Education of the Young Scientist and Giftedness*, 1(2), 1–12, <https://doi.org/10.17478/JEYSG.201329002>.

Calkins, M. W. (1894). A study of the mathematical consciousness. *Educational Review*, 8, 269–286.

Carlton, L. V. (1959). *An analysis of the educational concepts of fourteen outstanding mathematicians, 1790–1940, in the areas of mental growth and development, creative thinking and symbolism and meaning* [Doctoral dissertation]. Northwestern University, IL.

Chamberlin, S. A., Moon, S. (2005). Model-Eliciting Activities: An Introduction to Gifted Education. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17, 37–47.

Chamorro-Premuzic, T., Artcehe, A., Furnham, A., Trickot, N. (2009). Assessing pupils' intelligence through self, parental, and teacher estimates. *Educational Psychology*, 29(1), 83–97.

Chan, C. M. E. (2007). Using open-ended mathematics problems: A classroom experience (Primary). In C. Shagar, R. B. A. Rahim (Eds.), *Redesigning pedagogy: Voices of practitioners* (pp. 129–146). Singapore: Pearson Education South Asia.

Charyton C., Snelbecker G. E. (2007). General, Artistic and Scientific Creativity Attributes of Engineering and Music Students. *Creativity Research Journal*, 19(2–3), 213–225

Chiu, M.-S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 55–79.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149–158.

Čižmešija, A. (2006). *Projektna nastava matematike*. Preuzeto sa <http://web.math.hr/nastava/mnm1/Projekt.ppt> 20 Mar 19.

Čudina-Obradović, M. (1990). *Nadarenost razumijevanje, prepoznavanje, razvijanje*. Zagreb: Školska knjiga.

Шпијуновић, К. (1994). *Такмичење из маџемаџике и развијање стваралачкој мишљења ученика*. Београд: Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета у Београду.

Шпијуновић, К. (2005). Развијање стваралачког мишљења ученика као циљ и задатак математичког образовања. *Зборник радова Учићелској факултета Ужице*, 6, 221–230.

Yavich, R., Rotnitsky, I. (2020). Multiple Intelligences and Success in School Studies. *International Journal of Higher Education*, 9(6), 107–117, doi:10.5430/ijhe.v9n6p107.

Yazgan, Y. (2016). Fourth graders and non-routine problems: are strategies decisive for success?. *European Journal of Education Studies*, 2(4), 100–120.

Yazgan-Sağ, G. (2022). Views on Mathematical Giftedness and Characteristics of Mathematically Gifted Students: The Case of Prospective Primary Mathematics Teachers. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(5), 12–140.

Yan, Z., Fong, T. F. K. (2005). An analysis of Singapore secondary students' performance on open-ended tasks in mathematics. Paper presented at International conference on education, *Redesigning Pedagogy: Research, Policy, Practice*. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University, Retrieved on February 2022 from <http://hdl.handle.net/10497/3346>.

Walia, P. (2012). Achievement in relation to mathematical creativity of eighth grade students. *Indian Streams Research Journal*, 2(2), 1–4.

Weisberg, R. W. (1993). *Creativity: Beyond the myth of genius*. New York: Freeman.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper.

Winebrenner, S. (1992). *Teaching gifted kids in the regular classroom: Strategies and techniques every teacher can use to meet the academic needs of the gifted and talented*. Minneapolis, MN: Free Spirit.

Wu, E. H. (2013). Enrichment and acceleration: best practices for the gifted and talented. *Gifted Education Press Quarterly*, 27(2), 2–8.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

А

акцелерација 60, 62, 63, 64
алгоритамске способности 43, 44, 45
аналитичка даровитост 26
аналитички тип даровитог ученика 50, 51
апсолутна даровитост 38
апсолутна креативност 125

В

верификација 118, 119, 120

Г

геометријске способности 43
геометријски тип даровитог ученика 50, 51
груписање 60, 61, 71, 74, 77

Д

даровитост 7, 8, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
дивергентно мишљење 50, 94, 96, 105, 109, 110, 111, 124, 126, 141, 142, 144
диференцијални модел даровитости 13, 14
диференцирана настава 71, 72, 74

Е

елаборација 110, 111, 124, 126, 138, 141, 142
етапа алгоритамске активности 120
етапа креативне активности 121

И

идентификација даровитих 27, 28, 29, 31, 32

илуминација 118, 119, 120, 146
инвестициона теорија креативности 113, 114
индивидуализована настава 69, 75, 76, 77
индивидуални образовни план (ИОП) 65, 77, 78, 79, 80, 81, 82
инкубација 118, 119, 120, 146, 147
интелектуална способност 8, 9, 13, 15, 16, 17, 19, 22, 25, 113, 114
интелектуална даровитост 24, 26
интуиција 35, 42, 43, 118, 146, 161
искуствена интелигенција 24, 25, 26

К

карактеристике математички даровитих 46, 50, 51
когнитивни приступ креативности 112
компонентна интелигенција 24, 25
конвергентно мишљење 105, 110, 124
конфлуентни приступ креативности 113
креативно-продуктивна даровитост 17

Л

логичко-математичка способност 43, 45

М

математичка даровитост 34, 35, 36, 37, 38, 39, 46, 48, 49, 59, 68
математичка креативност 117, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129, 140, 141, 142, 146
математичка такмичења 30, 56
математичке способности 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 45, 46, 49, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 86, 123, 193
математички потенцијал 37, 53

математички проблем 54, 55, 85, 86, 90, 92, 93, 99, 109, 118, 119, 121, 124, 141, 145, 161

методе процене 28

методе тестирања 28, 30

мистични приступ креативности 107, 108

Н

научне математичке способности 43

нерутински задатак 86, 88, 89

неструктурирани проблем 88, 89, 92, 93, 94, 125, 145

номинације вршњака 29

номинације наставника 53, 57

номинације родитеља 53

О

обогаћивање 60, 64, 65, 67, 75, 77

оригиналност 13, 18, 50, 93, 106, 107, 110, 111, 119, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 141, 142, 173

осетљивост за проблеме 48, 111, 124, 126, 136, 137, 141

осећај за број 44, 45

П

петофакторски модел даровитости 11, 12

постављање проблема 39, 95, 98, 99, 102, 103, 123, 124, 125, 141, 142, 143, 144, 147, 162, 167, 168, 179

прелиминарна техничка етапа 120

препарација 118, 119, 120, 146

проблем-варијације 95, 98, 102, 143

проблем затвореног типа 94, 163

проблем отвореног типа 93, 94, 96, 97, 98, 102, 125, 142, 143, 145, 147, 162, 163, 164, 169, 190

проблемска настава 69, 70, 71, 141

проблемска поља 95, 98, 99

прагматични приступ 107, 108

практична даровитост 26

практична интелигенција 25

пројектна настава 69, 141, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 190

процесна дијагностика 32

психодинамички приступ креативности 107, 109

психометријски приступ креативности 107, 109, 111

Р

развијање математичке креативности 141, 143, 183

реалне животне ситуације 92, 95, 97, 102, 103

редефиниција 126, 134, 135, 141

релативна даровитост 38

релативна креативност 125

рутински задатак 40, 87, 88, 89, 92, 93, 94, 98, 125, 147

С

синтетичка даровитост 26

системске теорије креативности 113, 114

социоперсонални приступ креативности 107, 112, 113

специјални математички тестови 53, 56

СТЕАМ 156, 157, 158

Т

таленат 11, 12, 13, 14, 15, 19, 37, 113, 142, 145

теорија вишеструких интелигенција 19, 20, 22, 35, 114

тест креативности 111, 124

тест математичких способности 55, 193

тестови интелигенције 17, 18, 26, 55

тестови постигнућа 56, 59

тријархијска теорија 24, 114

тропрстенасти модел даровитости 16

Ф

флексибилност 18, 42, 49, 50, 51, 53,
110, 111, 123, 124, 125, 126, 132, 133,
134, 141, 142, 143, 145, 149, 183

флуентност 18, 49, 110, 111, 124, 125,
126, 129, 130, 134, 141, 142, 143, 145,
149, 159, 173, 183

Х

хармонијски тип даровитог ученика
50, 51

Ч

четвороетапни модел решавања
проблема 90, 93, 99

Ш

школска даровитост 10, 16, 17
школске математичке способности 43

ИНДЕКС АУТОРА

А

Адамар 35, 41, 42, 119, 120, 122, 142
 Алтарас 9, 13, 16, 28, 29, 31, 36, 61, 65, 68, 71, 72, 74, 77, 78, 196
 Алтарас Димитријевић 9, 13, 28, 29, 31, 36, 61, 65, 68, 71, 72, 74, 77, 78, 196
 Амабил 113
 Арсланагић 51

Б

Балка 124

В

Вајсберг 112
 Виготски 41, 68
 Вилотијевић 72, 198

Г

Гање 13, 14, 15
 Гарднер 19, 20, 22, 23, 33, 114
 Гилфорд 105, 109, 110, 111, 116, 124, 126, 129, 132, 136, 138, 141
 Голтон 9

Д

Де Боно 214
 Девлин 43, 44, 45, 83
 Дејић 2, 10, 28, 30, 37, 38, 39, 43, 48, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 69, 70, 71, 72, 74, 85, 86, 135, 136, 138, 140, 148, 153, 161, 163, 165, 168, 169, 199
 Дејић, Егерић, Михајловић 38, 70, 74, 85, 86, 135, 136, 138, 148, 153
 Драшковић 45, 46, 47, 48, 61, 62, 64, 106, 199

Ј

Јаневски 9, 13, 28, 29, 31, 36, 60, 61, 65, 68, 71, 72, 74, 77, 78, 196

К

Калкинс 41
 Квашчев 75, 126, 127, 132, 136, 138, 141, 201
 Колмогоров 40, 43, 201
 Корен 28
 Крутетски 35, 42, 50, 51, 83, 123
 Курник 86, 87, 90

Л

Лејкин 37, 124, 125

М

Максић 11, 13, 31, 32, 60, 62, 64
 Ман 123
 Метељскиј 42, 58
 Михајловић 1, 2, 10, 28, 30, 37, 38, 39, 48, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 69, 70, 71, 72, 74, 85, 86, 107, 135, 136, 138, 140, 142, 148, 153, 161, 163, 169, 199, 204, 217

О

Озборн 108

П

Павлековић 49
 Пехконен 85, 94, 98, 99
 Пијаже 41, 140
 Поенкаре 35, 41, 43, 118, 119, 120, 122
 Поља 85, 87, 90, 91, 92, 99, 119, 120

Р

Рензули 16, 17, 18, 19

С

Савада 96

Силвер 94, 124, 144

Сираман 125, 126, 145

Старко 107

Степанек 49

Стернберг 24, 25, 26, 27, 35, 107, 111,
112, 114, 115, 144

Т

Такахаши 94

Таненбаум 11, 12

Татић Јаневски 9, 13, 28, 29, 31, 36, 60,
61, 65, 68, 71, 72, 74, 77, 78, 196

Терман 9, 10

Торенс 111, 124, 140

Ф

Фелдман 113, 114

Х

Хејлок 123, 147

Ш

Шпијуновић 126, 127, 128, 130, 132,
133, 135, 136, 138, 140, 141, 211

БЕЛЕШКА О АУТОРУ



Лета господњег 1975. године, у среду 13. августа у Јагодини рођена је Александра Михајловић. Од раног детињства Александра је развила љубав ка две области – математици и уметности, што се касније манифестовало и у њеној академској каријери. Дипломирала је на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, стекавши звање дипломираног математичара за рачунарство и информатику. Магистрирала је на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина, а затим и докторирала 2012. године одбранивши докторску дисертацију под називом *Развијање креативности у њојој настави математике методом ошвореној ирисјуа*. Доктор је методике наставе математике и ванредни професор на Факултету педагошких наука. Аутор је великог броја научних и стручних радова објављених у домаћим и међународним часописима, као и учесник бројних домаћих и међународних пројеката.

Залаже се за популаризацију математике међу децом и младима, а нарочито СТЕАМ приступа, са посебним акцентом на вези математике и уметности. Један је од оснивача Центра за промоцију науке Факултета педагошких наука и његов члан. Њена истраживачка интересовања су широка, бави се методиком наставе, историјом, филозофијом и психологијом математике. Од нарочитог значаја јесте њен истраживачки рад на расветљавању појма креативности у области математике, као и могућностима њеног развоја и рада са математички даровитим ученицима.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.091::51(075.8)(0.034.2)

37.015.311:159.928.23(075.8)(0.034.2)

МИХАЈЛОВИЋ, Александра, 1975-

Даровитост, креативност и математика [Електронски извор] /
Александра Михајловић. - Јагодина : Факултет педагошких наука
Универзитета у Крагујевцу, 2023 (Јагодина : Факултет педагошких
наука Универзитета у Крагујевцу). - 1 електронски оптички диск
(CD-ROM) : текст ; 12 см. - (Едиција Монографије / [Факултет
педагошких наука Универзитета у Крагујевцу])

Системски захтеви: Нису наведени. - Тираж 50. - Белешка о аутору. -
Напомене и библиографске референце уз текст. - Библиографија. -
Регистри.

ISBN 978-86-7604-228-9

а) Математика -- Настава -- Методика б) Даровитост

COBISS.SR-ID 129747209

Универзитетски уџбеник *Даровитости, креативности и математика* Александре Михајловић значајан је првенствено будућим учитељима како би се припремили за самосталан и систематски рад са математички даровитим ученицима, као и за развијање и подстицање математичке креативности у почетној настави математике. Ауторка се бави темом која није у довољној мери обрађена на нашим просторима. Проблематици приступа на теоријско-методолошки утемељен начин, при чему у обзир узима не само сазнања научне области методике наставе математике, већ и области других наука (математика, психологија, филозофија, педагогија итд.). Важно је истаћи да је ауторка врхунски стручњак за тематику која се обрађује у уџбенику, што потврђује њено научно опредељење оваплоћено у истраживачким радовима: *Идентификација и рад са математички даровитим ученицима у разредној настави* (магистарска теза, 2006) и *Развијање креативности у њоченој настави математике методом овореног приступа* (докторска дисертација, 2012).

Проф. др Мирко Дејић

Рукопис одликује оригиналан приступ проблематици рада са даровитим ученицима у математици и подстицања креативности у овој настави. Садржај рукописа одликују прецизни и широки теоријски приступи засновани на добро одабраној референтној литератури из ове области са научно утемељеним ставовима ауторке, научно засноване анализе, али и примери из праксе који су основа практичног деловања у раду са ученицима. Посебну добробит рукопис ће остварити не само код студената, будућих учитеља у оквиру студијског предмета, већ и код учитеља који раде у настави као вид подршке и помоћи у раду са математички даровитим ученицима у сегменту планирања и остваривања рада са њима, али и код свих који се теоријски и емпиријски баве овим питањима и проблемима. Уџбеник би требало уврстити у списак обавезне литературе за све студенте који су професионално везани за теорију и праксу математичког образовања.

Проф. др Сања Маричић

