

Посебна издања Факултета педагошких наука Универзитета у Крагујевцу
Научни скупови, књ. 19



ФАКУЛТЕТ ПЕДАГОШКИХ НАУКА
УНИВЕРЗИТЕТА У КРАГУЈЕВЦУ

Посебна издања
Научни скупови, књ. 19

МЕТОДИЧКИ АСПЕКТИ
НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ
III

Јагодина, 2015.

МЕТОДИЧКИ АСПЕКТИ
НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ
III

Зборник радова са трећег међународног научног скупа одржаног 14–15. јуна
2014. године на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Штампање Зборника радова финансирао је Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике
Србије

Издавач

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу
Милана Мијалковића 14, 35000 Јагодина

За издавача: проф. др Виолета Јовановић

Главни и одговорни уредник: доц. др Александра Михајловић
Технички уредник: доц. др Александра Михајловић

Дизајн корица: Далибор Видовић
Обрада на рачунару: Радомир Ивановић

Рецензенти

Проф. др Милана Егерић, проф. др Aslanbek Naziev, проф. др Јасмина Милинковић, доц. др Оливера Ђокић,
доц. др Сања Маричић, доц. др Александра Михајловић, ас. др Владимир Ристић, ас. др Верица Милутиновић,
ас. др Бранка Арсовић

Лектура и коректура

Проф. др Илијана Чутура, доц. др Снежана Марковић, ас. др Бранко Илић, ас. мр Маја Димитријевић, мр
Марија Ђорђевић, ас. Јелена Спасић, ас. мр Нина Марковић

Превод на енглески језик: мр Вера Савић, др Ивана Ћирковић-Миладиновић, мр Марија Ђорђевић

Штампа: NAIS-PRINT, Ниш
Тираж: 300

Програмски одбор

Проф. Dirk De Bock, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, проф. др Aslanbek Naziev, Ryazan State University,
Ryazan, Russian Federation, проф. др Даниел А. Романо, Педагошки факултет у Бијељини, Универзитет у
Источно Сарајеву, доц. др Веселин Мићановић, Филозофски факултет у Никшићу, Универзитет Црне Горе,
Црна Гора; проф. др Милана Егерић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Србија; проф.
др Бранислав Поповић, Природно-математички факултет у Крагујевцу, Универзитет у Крагујевцу, Србија;
доц. др Ненад Вуловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Србија; доц. др Александра
Михајловић, Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Србија; ас. др Верица Милутиновић,
Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Србија. ас. др Владимир Ристић, Факултет педагош-
ких наука Универзитета у Крагујевцу, Србија.

Организациони одбор

Проф. др Милана Егерић, доц. др Ненад Вуловић, доц. др Александра Михајловић,
ас. др Верица Милутиновић, ас. др Владимир Ристић, ас. мр Милан Миликић.

ISBN 978-86-7604-141-1



Improving educational effectiveness of primary schools 538992-LLP-1-2013-1-RS-COMENIUS-CMP. This project
has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author,
and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

САДРЖАЈ

Уводна реч	7
1. НОВИ ПРИСТУПИ, ТРЕНДОВИ И ИСТРАЖИВАЊА У МАТЕМАТИЧКОМ ОБРАЗОВАЊУ	
DIRK DE BOCK Primary school students' illusion of linearity: visiting research and practice in Belgian mathematics education	11
Синиша Црвенковић, Даниел А. Романо Рана алгебра и раноалгебарско мишљење.....	27
ÁRPÁD FEKETE Techniques for teaching probability to elementary students	49
Сања М. Маричић, Ненад Милинковић Диференцирана настава и ученици потенцијално даровити за математику.....	61
Јасмина Милинковић Метод постављања математичког проблема трансформацијом репрезентације	75
IBOLYA SZILÁGYINÉ SZINGER Should parents help or how should they do it in solving open sentences (equations, inequalities) in lower primary classes?	83
BOJAN RADIŠIĆ, ALEKSANDRA ANDRIĆ RADIŠIĆ Alternativne metode računanja u početnoj nastavi matematike	93
ASLANBEK NAZIEV Semantic reading in mathematics teaching.....	107
Ненад Вуловић, Милан Миликић Национални оквир исхода математичких такмичења ученика четвртог разреда.....	119
Сања М. Маричић, Крстивоје М. Шпиљуновић Образовни стандарди у планирању и припремању почетне наставе математике из угла учитеља.....	131
Славиша Јењић, Желимир Драгић Математичка радионица у функцији популаризације разредне наставе математике	143
Милан Миликић Примена аудиовизуелних наставних средстава у овладавању почетним математичким појмовима	159
2. МУЛТИДИСЦИПЛИНАРНОСТ У МЕТОДИЦИ И НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	
Ђоко G. MARKOVIĆ Primjeri primjene didaktičkog principa poliformnosti u nastavi matematike osmogodišnje i srednje škole	167

TAMÁS GYÖRFI	
Applying <i>Imagine Logo</i> program in teaching.....	177
IVAN BUDIMIR	
Geometrijske optičke iluzije.....	187
3. ИНФОРМАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ	
ZORAN TRIFUNOV, TATJANA ATANASOVA-PACHEMSKA,SANJA PACHEMSKA	
Use of free software in mathematics classes and presenting the results of the research	203
ВЕРИЦА МИЛУТИНОВИЋ	
Анализа искуства и намере употребе рачунара у настави математике будућих учитеља и наставника математике.....	213
ЉУБИЦА ДИКОВИЋ	
Интерактивни метод учења матрица и детерминанти	231
БРАНКА АРСОВИЋ	
Адаптивни системи за е-учење – изазови и могућности примене у настави математике	241
SLAVIŠA RADOVIĆ, MIROSLAV MARIĆ, LJILJANA GOLUBOVIĆ	
Mogućnosti upotrebe IKT-a i platforme <i>eZbirka</i> u nastavnim aktivnostima	249
ЈЕЛЕНА ВРАГОВИЋ ЦВЕТКОВИЋ	
Развијање интересовања за математику код деце школског узраста применом компјутера у настави.....	259
4. ИСТОРИЈА МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА	
СУНЧИЦА МАЦУРА МИЛОВАНОВИЋ, МАРИЈАНА ЗЕЉИЋ, НАТАША ВУЛИСИЋ ЖИВКОВИЋ	
Карактер промена у наставним плановима и програмима из математике у основним школама у Србији 1804–1941. године.....	279
АЛЕКСАНДРА МИХАЛЛОВИЋ, ВЛАДИМИР РИСТИЋ	
Појам бесконачности – историјски осврт и схватања ученика млађег школског узраста	293
5. ПЕДАГОШКО-ПСИХОЛОШКИ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА	
ЕМИНА КОПАС-ВУКАШИНОВИЋ	
Значај игре за развој математичких појмова код деце у предшколској установи и школи.....	305
НАТАША ВУКИЋЕВИЋ, ИРЕНА ГОЛУБОВИЋ-ИЛИЋ	
Улога компаративне методе у процесу усвајања знања у млађим разредима основне школе	319
МИЛОШ ЂОРЂЕВИЋ	
Комплементарност естетике и наставе математике	333
АНДРИЈАНА ЈАКОВЉЕВИЋ, ОЛИВЕРА ЦЕКИЋ – ЈОВАНОВИЋ	
Свет око нас/природа и друштво и математика у систему међупредметне повезаности – ставови учитеља	341

УВОДНА РЕЧ

Прва научна конференција *Методички аспекти наставе математике* одржана је 2008. године на Педагошком факултету у Јагодини. Зборник радова са конференције садржао је укупно 11 радова саопштених на самом скупу. Примарни циљ ове конференције био је окупљање домаћих стручњака који су се бавили проблемима и истраживањем математичког образовања и унапређивањем наставе математике у основној школи. Због великог интересовања не само учесника из земље, већ и из иностранства, одлучено је да се конференција организује на сваке три године. С обзиром на то да на нашим просторима не постоји окупљање сличне врсте, *Методички аспекти наставе математике* представљају јединствену прилику свима који се професионално баве истраживањем математичког образовања да размене сопствена искуства, али и да се упознају са актуелним трендовима и проблемима савремене наставе математике, са могућностима развијања, унапређивања и модернизације наставног процеса и учења математике. Друга међународна конференција *Методички аспекти наставе математике II* одржана је 2011. године на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, а као резултат рада ове конференције објављен је зборник радова са 42 рада страних и домаћих аутора.

Већ традиционални трећи скуп, *Методички аспекти наставе математике III*, организован је 2014. године на Факултету педагошких наука Универзитета у Крагујевцу. Тада је своје радове саопштио 51 учесник из земље и иностранства. Програмски одбор конференције чинили су еминентни домаћи и страни стручњаци. Одржавање ове конференције и публиковање зборника радова омогућило је и финансијски подржало Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Зборник радова са треће међународне конференције садржи укупно 27 радова, који представљају један део радова саопштених у оквиру следећих пет тематских група: 1. Нови приступи, трендови и истраживања у математичком образовању 2. Мултидисциплинарност у методици и настави математике, 3. Информационе технологије у настави математике, 4. Историја математике и математичког образовања и 5. Педагошко-психолошки аспекти математичког образовања. Овај део радова нашао је своје место у публикацији искључиво по

два критеријума. Први критеријум је квалитет, чему су значајан допринос дали рецензенти из Србије и иностранства, а други је био везан за саму тематику и актуелност радова. Радови су посвећени различитим теоријским и практичним питањима математичког образовања и наставе математике, различитим прилазима и могућностима методичке трансформације математичких садржаја, примени савремених информационих технологија, као и вези са осталим наставним предметима.

Објављивање овог зборника представља такође успешан корак ка очувању и подстицању сарадње са колегама и научним институцијама из Србије и иностранства. Неки од радова везани су за развојне пројекте, од којих посебно истичемо међународни програм *Коменијус Improving educational effectiveness of primary schools* (538992-LLP-1-2013-1-RS-COMENIUS-CMP) који је усмерен на унапређивање квалитета образовања у нашој земљи.

Ипак, највећи подстицај за организовање овог скупа јесте уверење да ће резултати који су пред нама обогатити и унапредити како теорију, тако и школску праксу, и послужити као инспирација за нека даља изучавања ових проблема и подстаћи нека будућа истраживања.

Доц. др Александра Михајловић

1

НОВИ ПРИСТУПИ, ТРЕНДОВИ И ИСТРАЖИВАЊА У МАТЕМАТИЧКОМ ОБРАЗОВАЊУ

Dirk De Bock

Katholieke Universiteit Leuven

Belgium

dirk.debock@kuleuven.be

PRIMARY SCHOOL STUDENTS' ILLUSION OF LINEARITY: VISITING RESEARCH AND PRACTICE IN BELGIAN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. This paper has two main components: educational practice and research. We start with a discussion on the practice of mathematics education in Belgian primary schools. Although our main focus will be the current situation, our perspective will be a historical one. We briefly describe how mathematics education in Belgium, coming from a mechanistic tradition in the fifties and after having participated in a short but intense *New Math* movement in the seventies, evolved towards a moderate realistic or eclectic approach. In the second part we exemplify mathematics education research in Belgium. A main line of research during the last decade focused on students' *illusion of linearity*, i.e. their tendency to use linear methods in non-linear situations. This research will be exemplified with three empirical studies on primary school students' solving of arithmetic word problems. The main results of that research and its relevance for educational practice will be discussed.

Keywords: primary level, Belgium, arithmetic, word problems, illusion of linearity

Introduction

In the first part of this paper, we sketch the history of Belgian mathematics education at the primary level. This outline, based on De Bock, D'hoker, and Vandenberghe (2011a, 2011b), starts with traditional mathematics education in the period before World War II. Then we focus on the rise of *New Math* in the 1970s, on its implementation in the classroom, and on its fall in the 1990s. This leads us to the current curricula that are inspired by the Dutch model of *realistic mathematics education*, but we maintained valuable elements of our own strong tradition in developing pupils' mental and algorithmic calculation skills. We describe these curricula in some detail as well as some new challenges that arise on the horizon.

The second part of this paper exemplifies mathematics education research in Belgium. One of the main lines in this research during the last decade focused on

students' *illusion of linearity*. Three empirical studies in this research tradition are discussed. The first study has an explorative character and investigates how the *illusion of linearity* intervenes in pupils' solving of different types of arithmetic word problems (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005). A second study examines the effect of number structures on students' tendency to improperly apply linear methods while solving this type of word problems (Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2009). In a third study we focus on the potential positive effect of a classification task preceding a classical word problem solution task (Van Dooren, De Bock, Vleugels & Verschaffel, 2010).

Brief history and current situation of primary mathematics education in Belgium

From traditional to modern mathematics

Often mathematics education before World War II and in the period shortly after is labeled as “mechanistic”, which stands for a one-sided emphasis on the inculcation, memorization, and practice of technical calculation skills. Of course, in a pre-computer era, these skills were considered very important in all countries. In countries such as Belgium, however, there has always been some attention for “meaning”, “illustrations” and “applications” of concepts and skills and, from the 1930s on, there was a focus on child-centeredness and on connecting mathematics with children's concrete daily-life experiences. At that time, the official school curricula were influenced by the so-called *Reform Pedagogics*, a movement that strived for a harmonic and broad child education and of which the Belgian teacher and psychologist dr. Ovide Decroly (1871–1932) was one of the main inspirers.

In the 1960s and 1970s, mathematics education in Belgium – and in many other countries – changed drastically: *New Math* or “modern mathematics” was introduced. This revolution first took place at the secondary level: from 1968 on, modern mathematics became compulsory in the first year of all secondary schools in Belgium (and from then on gradually in the subsequent years). A main argument for introducing modern mathematics at that level was that mathematics education should be updated and that the gap between school mathematics and mathematics “as a living science” should be narrowed.

Inspiration was found in the work of Nicolas Bourbaki, a collective pseudonym for a group of merely French mathematicians who, from the 1930s on, started the ambitious project to rebuild and restructure the mathematical knowledge of that time, a project quite similar to that of Euclid in the 3rd century BC. Starting points were basic logical and mathematical structures and Bourbaki's method was a strict deductive one. Modern mathematics is the application of the model that Bourbaki

developed for the *science* of mathematics as a model for mathematics *education*. So the reasoning by the math reformers of that time was more or less as follows: if we start from basic, abstract and empty concepts, such as sets and relations, and we then gradually introduce the more concrete and rich concepts, using a clean deductive method, then pupils will be able to better understand and appreciate mathematics. To attain this latter goal, however, not only a modernization of the mathematical content was needed, but also a modernization of didactics and even of the language to communicate about the new mathematical ideas. Venn- and arrow diagrams, log blocs and all kind of new conventions were introduced in math lessons. At that time the multi-colored textbooks written by the Belgian mathematician and math educator Georges Papy (1920–2011), the figurehead of modern mathematics in our country, were translated in several languages and became quite influential in many European countries and even beyond (Papy, 1964–).

At the primary level, modern mathematics was introduced in 1976 in the Belgian catholic schools and two years later in the publicly run schools. Two main reasons were given to make modern mathematics compulsory at the primary level too. First, according to its defenders, the primary level had to prepare pupils already for the modern mathematics of the secondary level. Second, Papy himself strongly plead for starting the teaching of modern mathematics as soon as possible, at an age children are not yet *contaminated* by the bad habits of traditional, old-fashioned math education. Experiments at that time by Papy and his collaborators were quite promising in that respect.

So, at the end of the 1970s, sets and relations became the most important ingredients of math education at the primary level in Belgium, not only as educational goals in itself, but also to describe all kind of situations within and outside mathematics. Probably the most radical change took place in the teaching of geometry: the plane became an “infinite set of points” and lines and geometrical figures became subsets of the plane. In particular, the hierarchical order of the different plane figures was considered as essential. Relations, such as “all rectangles are parallelograms”, were highlighted and visualized in the language of sets. Solving applied problems about geometrical figures was considered less important. Besides, the correct use of a unequivocal terminology was of highest importance. Therefore inaccuracies from the earlier programs were eliminated, so, for instance, a clear distinction was made between a “circle” and a “disk”. A circle only referred to the border of the plane figure, and thus its area was no longer πr^2 but 0. The geometry course also provided an introduction to transformation geometry. New topics, such as “reflection through an axis” and “axes of symmetry”, had to prepare pupils to an extensive study of transformation geometry that followed at the secondary level.

In the *New Math* period, elementary school children were also introduced to what was called “logical thinking”. In that part of the mathematics course, children

learned to correctly use the connectives “and” and “or” and their negation by the logical operator “not”. They also were trained in correctly using expressions such as “at least”, “at most”, “not all”, “only if”, “if and only if” and so on. Even, there was a frisky initiation to algebraic structures at the primary level. This should help pupils to more deeply understand the basic properties of operations.

To be honest, basic computational and measurement skills, parts of the “old curriculum”, were not dropped during the *New Math* period. These skills were still considered as important, although it was less evident to integrate them in the *New Math* philosophy.

Moderate realism or “eclecticism”?

For about twenty years, primary mathematics education in Belgium followed the *New Math* or structuralist approach and it was also at the primary level that this approach was first openly criticized. In 1982, the Flemish pedagogue Raf Feys wrote a virulent pamphlet in which he firmly criticized the starting-points of *New Math* and the way it was introduced and dictated at the primary level (Feys, 1982). In his close contacts with schools, Feys did not see appearing a fascinating world, but “artificial results in a fake reality” and also little enthusiasm in children, but “more disgust, disorientation and desperation”. In his pamphlet, Feys also suggested how mathematics education at the primary level should evolve: the model he had in mind was the *realistic mathematics education*, developed in the Netherlands under the inspiring leadership of the mathematician and math educator Hans Freudenthal (1905–1990). According to this model, the starting-point of mathematics education should not be the structure of mathematics, but the intuitive, informal and real-world knowledge and skills of the children and these should be gradually developed. Of course, Feys’ point of view did not lead to an overall agreement, but at least the debate was opened and a consensus that “something” had to be changed was growing. Moreover, there was an agreement that we couldn’t neglect the evolutions that took place in other countries, especially in The Netherlands.

At the end of the 1980s, the educational landscape in Belgium changed drastically. Belgium became a Federal State consisting of three Communities: the Flemish, the French and the (small) German-speaking Community. These Communities are based on “language”, or more broadly on “culture”. In 1989, the Communities became responsible for educational matters. From now on, I will focus on the situation in the Flemish Community to which I belong. One of the realizations of the Flemish Community with respect to mainstream primary education was the development of attainment targets. Those are minimum objectives, which the government considers necessary and attainable for primary school children. These objectives refer either to knowledge, to skills or to attitudes. To realize these objectives, the educational networks of the publicly run and of the catholic schools had to develop

new curricula, also for mathematics. So the occasion to officially break with modern mathematics was there. New curricula were implemented in 1998 and they are still applicable. So the situation I will further describe is the actual situation of primary mathematics education in Flanders (although the situation in the two other Communities of Belgium does not differ fundamentally).

The new curricula broke with their predecessors. First, the typical *New Math* topics, such as sets and relations, logical thinking and the initiation to structures, as well as the corresponding didactical approaches and the abstract spirit, were skipped. However, related and appraised skills such as structuring, making connections, seeing patterns and relationships were not omitted. Second, there was a re-valuation of traditional topics and skills. Objectives again referred to mathematical domains such as numbers, operations and computation, to measurement and geometry. Traditional skills such as mental calculation and column arithmetic were, at least partly, revised and re-valued. However, a third and most important characteristic of the new curricula refers to *new* objectives, inspired by the Dutch model of *realistic mathematics education*. According to that model, mathematics is seen as a tool to mathematize reality. Pupils should learn to use mathematics to describe situations derived from their own living environment. Mathematical problems should not be artificial, but experienced as “real” by the pupils themselves. The new orientation related to content, was also accompanied by a plea for opening the range of mathematical solution techniques to more flexible procedures, based on pupils’ insight in the structure of numbers or in the properties of operations, and to informal strategies that pupils generated themselves.

Let’s look at the current curricula in some more details. Next to the objectives related to the traditional content domains of mathematics, the curriculum developers introduced some objectives that exceeded these domains. A first type of domain-exceeding objectives refers to problem-solving skills and strategies, replacing, in some sense, the traditional culture of word problem solving. Problem-solving skills and strategies refer to the *process* that leads to the solution of a problem. Main steps in that process are the analysis of the situation, the selection or building of a mathematical model, the application of mathematical techniques within that model, and the interpretation and evaluation of the results. People who are confident with the literature on mathematical modeling and applications will recognize the so-called “modeling cycle”. So, word problems are no longer exclusively seen as a means to apply mathematics that has just been learned, but also to introduce some basic ideas about “mathematical modeling” at the primary level. Modeling brings a new question to the forefront: “which mathematical model or operation is appropriate in a given situation?” A second type of domain-exceeding objectives refers to attitudes. Examples are learning to value mathematics as a dimension of human activity, to appreciate smart search strategies in problem-solving activities, to develop a critical

disposition towards facts and figures that are used, consciously or not, to inform, to convince but also to mislead people.

But how did the “realistic inspiration” affect to the different mathematical sub domains? In the domain of *numbers and operations*, the attention shifted from obtaining insight in the structure of numbers and their operations to linking numbers to quantities, and operations to concrete and meaningful situations. Competent use of calculators is encouraged, e.g. for solving realistic problems or for checking the result of an operation. In parallel, depending on the problem situation, mental calculation and estimation receive attention. Besides the standard algorithms for the different operations, flexible procedures got their place in the curriculum. A typical example is the use of ratio tables in proportional reasoning (instead of the old “rule of three”).

Also the domain of *measurement* was drastically changed. Where in the previous periods the emphasis was on conversion between all kinds of units, often artificial ones, the curriculum now focuses on understanding the attributes of length, weight, area, and so on, and on the process of measurement, namely choosing an adequate unit, comparing the unit to the object to be measured and reporting the number of units. Pupils are invited to visualize the results of their measurement activities in tables and graphs. Besides standard units, natural units such as body parts are used to come to a better understanding of measurement. Lessons in measurement nowadays are really active ones in which pupils measure real objects with different tools or make objects of given sizes. Pupils are also encouraged to use estimations, and activities are provided to develop estimation strategies. To develop some “measurement sense”, pupils need some natural references, e.g. the volume of a dessert spoon is about one centiliter, the length of a football pitch is 100 meters, or one metric ton is about the weight of a passenger car. There is still some emphasis on metric conversion, but only between “natural” units or units that are often used. Therefore, pupils can use conversion tables which are the analogue of ratio tables.

With respect to *geometry* education, Freudenthal wrote: “*Geometry is grasping space... that space in which the child lives, breathes and moves. The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe and move better in it*” (Freudenthal, 1973: 403). Starting point in geometry is observation and experience. Pupils first learn to recognize geometrical shapes in plane and in space by seeing and doing. Geometrical concepts are discovered in realistic contexts. So, e.g., the concept of an angle is related the angle made by an opened door or straight lines first arise as “vision lines”. For the concept of area, the starting point is the area of a rectangle that pupils can determine by counting squares. Other area formulas are found by cutting and pasting activities. Only later on, this experiential approach can lead to more abstract notions of geometry, such as parallel and perpendicular lines, equality of shape and size, or symmetry. However, the goal of geometry education is

no longer the development of an abstract framework, but teaching pupils to apply geometry in solving realistic problems in the space in which they live.

By focusing on realistic elements in our current curricula we might have given the impression that Belgian mathematics education nowadays is just a copy of the Dutch model of *realistic mathematics education*. This is not the case! Although there is a clear influence of that Dutch model, elements of the mechanistic or “drill and practice” approach were *not* abandoned. On the contrary, current curricula point, at several places, to our strong tradition in developing pupils’ mental and algorithmic calculation skills and ask to *not* neglect this valuable part of our patrimony. As I explained too, also some elements of the *New Math* or structuralist approach continue to be part of our curricula. Still, pupils learn to structure and to understand that and why, for instance, all squares are rectangles and all rectangles are parallelograms. So I think we were able to find some balance between mechanistic, structuralist and realistic elements, a balance that seems to work.

Of course, this does not mean that there is no room for improvement. One of the issues under discussion nowadays in Belgium is how to narrow the gap that exists between primary and secondary mathematics education. These two educational levels are still “different worlds”, with their own traditions, teachers and networks. Pupils however just continue their school career and what they have learned at the primary level should help them instead of being an obstacle for what they have to learn at the secondary level. This is a challenge. Let me just mention two elements. At the primary level, problems are typically approached in a numerical way, while at the secondary level, pupils switch to an algebraic approach (and a numerical approach is typically no longer accepted). We think there are possibilities to make that transition more fluent. A second element refers to numbers. Research has shown that prior knowledge about natural numbers can hinder pupils to understand rational numbers. This phenomenon is often referred to as the “natural number bias”. E.g. pupils may believe that “multiplication always makes bigger”, that $1/4 > 1/3$ because $4 > 3$ or that there are only two numbers between 0.2 and 0.5, namely 0.3 and 0.4. Without going in detail about these issues, I think that the transition between the primary and the secondary level should be an important concern in the forthcoming years.

Exemplification of mathematics education research in Belgium

The illusion of linearity

One of our main lines of research during the last decade focused on students’ *illusion of linearity*. According to Freudenthal, it refers to students’ tendency to deal with each numerical relation as though it were linear (or proportional) (Freudenthal,

1983). Examples can be found in different domains of mathematics and science education and, typically, the phenomenon already emerges at the primary level.

From 4th grade on, pupils are frequently confronted with proportionality problems, most often stated in a missing-value format (a format in which three numbers are given and the problem solver is asked to determine a fourth, unknown number). Often, it is claimed that such word problems can act as a substitute for the everyday-life situations in which pupils will need these mathematical skills. Several studies have shown that pupils tend to use proportional solution methods, also for solving arithmetic word problems for which proportionality is not applicable. Often this tendency is related to pupils' lack of sense-making in solving mathematics word problems. Examples of "pseudo-proportionality" problems that were used in research are: "*A shop sells 312 Christmas Cards in December. About how many do you think it will sell altogether in January, February and March?*", "*John's best time to run 100 m is 17 seconds. How much time will it take him to run 1 km?*" Only very few pupils appeared to show awareness of the fact that this type of problems is "unsolvable" and that direct proportionality will not lead to an exact answer but only – in the best case – to an approximate answer (Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994). E.g. for the runner problem, percentages of pupils showing such awareness varied from 0% to 7% in a range of replication studies in many countries.

An example in the field of geometry refers to the context of enlarging and reducing geometrical figures (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998). In an explorative study, large groups of secondary school students were confronted with the following non-proportional problem: "*Carl needs 8 bags of seed to put grass on a square lawn with sides of 20 m. How many bags of grass seed will he approximately need for a square lawn with sides of 60 m?*" While proportional problems (about the perimeter of a square) in the same study were solved correctly by more than 90% of the students, non-proportional problems, such as the one listed above, elicited only 2% of correct answers in a group of 12–13 year olds and about 17% in a group of 15–16 year olds, due to a strong tendency to also approach the non-proportional problems with proportional methods.

A third introductory example refers to the domain of probability. Fischbein and Schnarch (1997) proposed the following problem to students from grade 5 to 11: "*Is the probability to get at least 3 heads in 5 coin tosses larger than, equal to or smaller than the probability to get at least 300 heads in 500 coin tosses?*" It was found that a substantial number of students at each grade level argued that these probabilities are equal, most often justifying this by the equality of ratios: $3/5 = 300/500$. Evidently, this type of reasoning is incorrect, the second probability is smaller due to the law of large numbers. Fischbein and Schnarch(1997) even found that this misconception increased rather than decreased with age (from 30% of the 5th graders to 80% of the 11th graders).

The *illusion of linearity* has different, interrelated roots. De Bock, Van Dooren, Janssens, and Verschaffel (2007) explain this phenomenon by referring to (1) the intuitive, heuristic nature of the linear model for students, (2) students' experiences in the mathematics classroom and their beliefs toward mathematical modeling and problem solving, and (3) elements related to the mathematical particularities of the problem situation in which the linear error occurs.

We will now discuss in some detail three empirical studies on the *illusion of linearity* in the domain of arithmetic word problem solving at the primary level. Due to space restrictions, we cannot provide all technical details about these studies here. Readers who are interested in more details about the applied methodology, hypotheses and statistical analyses can be referred to the original papers that are published in easily-accessible international journals (see the respective references).

Study 1: A first exploration in the domain of arithmetic

The immediate reason for Study 1 (Van Dooren et al, 2005) was a striking observation by Cramer, Post and Currier (1993). These researchers confronted 33 pre-service elementary teachers with the following additive problem: “*Sue and Julie were running equally fast around a track. Sue started first. When she had run 9 laps, Julie had run 3 laps. When Julie had completed 15 laps, how many laps had Sue run?*” and observed that thirty-two of the pre-service elementary teachers responded to this problem by setting up and solving a proportion: $9 / 3 = x / 15$; $3x = 135$; $x = 45$. In contrast with the “pseudo-proportionality” problems that were used by Verschaffel et al. (1994) on students' suspension of sense-making in a mathematics classroom, the problem used by Cramer et al. (1993) is clearly “solvable”; moreover, these pre-service teachers possessed all necessary mathematical tools to solve it. In our interpretation, what lured them into the proportionality trap was the presentation of this additive situation in a missing-value format. This format strongly cues proportional schemes and procedures because most proportional reasoning tasks students encounter in their school careers are stated in a missing-value format (whereas non-proportional problems are rarely, if ever, stated in a missing-value format).

Study 1 systematically addressed the overuse of linearity in pupils' solving of arithmetic word problems. It was investigated when this tendency originated and how it developed with age in relation to pupils' learning experiences and their emerging proportional reasoning skills. A total of 1062 pupils from Grade 2 to 8 participated and was confronted with a written test consisting of 8 missing-value word problems: 2 proportional ones (for which a proportional solution was correct) and 6 non-proportional ones (requiring other strategies). The non-proportional problems belonged to three different categories: 2 additive, 2 affine and 2 constant prob-

lems. Here, we give an example of a proportional problem and of a non-proportional problem from each category:

- Proportional problem: “4 packs of pencils cost 8 euro. Our teacher wants to buy a pack for every pupil. He has to buy 24 packs. How much does he have to pay?” (correct answer: 48 euro)
- Additive problem: “Ellen and Kim are running around a track. They run equally fast but Ellen started later. When Ellen has run 5 laps, Kim has run 15 laps. When Ellen has run 30 laps, how many has Kim run?” (correct answer: 40 laps, proportional answer: 90 laps)
- Affine problem: “The locomotive of a train is 12 m long. If there are 4 carriages connected to the locomotive, the train is 52 m long. How long is the train if there are 8 carriages connected to the locomotive?” (correct answer: 92 m, proportional answer: 104 m)
- Constant problem: “Mama put 3 towels on the clothesline. After 12 hours they were dry. Grandma put 6 towels on the clothesline. How long did it take them to get dry?” (correct answer: 12 hours, proportional answer: 24 hours)

The results showed that, although 2nd-graders already showed some emerging proportional reasoning skills, most progress in correctly solving the proportional word problems was made between 3rd and 6th grade. With respect to the non-proportional problems, more than one third of all answers involved the erroneous application of the proportional model. Not surprisingly, the tendency to over-rely on proportionality developed in parallel with the ability to solve proportional word problems: It was noticeable already in 2nd grade, but increased considerably in the next years, with a peak in 5th grade, where more than half of the answers to the non-proportional problems were proportional errors. After this peak, the number of proportional errors gradually decreased, but they did not disappear completely. In 8th grade still more than one fifth of the answers reflected a misapplication of proportionality.

There were some remarkable differences according to the mathematical model underlying the non-proportional problems. One would expect that the word problems with a “constant” model (like the “clothesline” problem mentioned above) would be the easiest problems in the test (since there was no need for calculations), but they got the highest rate of proportional errors (up to 80% in 5th grade). For some word problems (like the additive “runners” problem), the percentage of correct answers even *decreased* by 30% from Grade 3 to 5, whereas the percentage of erroneous proportional answers increased accordingly.

Study 1 showed that primary school pupils strongly tend to apply proportional solution strategies when confronted with non-proportional missing-value word problems in the domain of elementary arithmetic. The tendency already emerged in the 2nd grade, but increased considerably up to 5th grade. By then, pupils had received

intensive training in solving proportionality problems. Although the size of the increase differed between the distinct problem categories, this trend was general.

Study 2: How numbers may change solutions

Study 1, as well as other research on the over-use of proportionality, might have overlooked an important issue: the nature of the numbers in the problems, and its possible impact on pupils' responses. The proportional reasoning literature (e.g. Hart, 1984; Karplus, Pulos & Stage, 1983) indicates that inexperienced proportional reasoners sometimes are affected by the numbers in missing-value problems. If the numbers form non-integer ratios (e.g. "Mixture A has 4 oranges to 10 parts of water. Mixture B tastes the same and has 6 oranges. How many parts of water does it have?", in which the multiplicative jumps $4 \rightarrow 6$ and $4 \rightarrow 10$ are both non-integer), pupils more often respond "additively" (" $10 + 2 = 12$ parts") instead of proportionally than when the multiplicative jumps are integer.

The rationale underlying Study 2 (Van Dooren et al, 2009) is that this finding about number influence also applies to the over-use of proportional methods in non-proportional problems. So we aimed at finding out whether the "easy" integer ratios in Study 1 were an additional "seducing" element. A total of 508 pupils from Grades 4, 5 and 6 participated in this study and solved 8 missing-value word problems (identical to those used in Study 1): 2 proportional ones and 6 non-proportional ones (2 additive, 2 affine and 2 constant problems).

The numbers in the problems were manipulated so that when reasoning proportionally, one needs to work with integer ratios (I-version) or with non-integer ratios (N-version). For each problem pupils received at random the I- or N-version. For example, compared to the I-version of the "runner" problem, as given in the list of problems for Study 1, with given numbers 5, 15 and 30, leading to "easy" proportional jumps, the N-version was: "Ellen and Kim are running around a track. They run equally fast, but Ellen started later. When Ellen has run 16 laps, Kim has run 24 laps. When Ellen has run 36 laps, how many has Kim run?" Correct (additive) reasoning for the I-version and N-version is equally easy, but proportional reasoning is far less easy (though still possible, of course) for the N-version.

Pupils' answers were categorised as correct (C), proportional (P), or other error (O). For proportional problems, only C and O were used as categories.

With respect to the proportional problems, the I-version elicited 82% correct answers while the N-version only elicited 57% correct answers. Results showed an evolution by age. The difference between both versions was very strong in 4th grade, smaller in 5th grade, and no longer significant in 6th grade. These effects are similar to the ones reported by Hart (1984) and Karplus et al. (1983): I-versions elicit more correct answers than N-versions, and this effect is stronger in younger, less experienced proportional reasoners.

As expected, for the non-proportional problems, N-versions elicited considerably less P-answers than I-versions. For the additive problems, the I-version elicited 29% P-answers, and N-versions 12%. Percentages of C-answers showed the opposite trend: 52% for the I-version and 73% for the N-version. So the non-integer ratios seemed to prevent students from improper proportional reasoning and to apply the additive strategy which is correct for this type of problems. For affine problems, percentages of P-answers were 57% and 34% for, respectively, the I- and N-versions, but instead the decrease of unwarranted proportional answers for the N-version did lead to significantly more “other” errors (and not to significantly more correct answers). For constant problems, percentages of P-answers were 62% and 36% for, respectively, the I- and N-versions, but, here again the lower percentage of unwarranted proportional answers in the N-group did not lead to more correct answers but to more other errors.

In conclusion, for the proportional problems, Study 2 confirmed the findings from the literature: integer ratios facilitate correct reasoning. But for the non-proportional problems, integer ratios also facilitate the over-use of proportional reasoning. 4th graders are particularly sensitive to this effect. On the other hand, non-integer ratios prevent the over-use of proportional reasoning. For additive problems, the decrease of unwarranted proportional answers resulted in better performances, but for constant and affine problems, pupils started committing other errors.

Study 3: The effect of a problem classification task

During in-depth interviews (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002) in which pupils solved non-proportional geometrical problems, it was found that pupils generally did not consciously and deliberately choose a proportional strategy. In a mature mathematical modeling approach (see, e.g. Verschaffel, Greer & De Corte, 2000), essential steps would be: (1) understanding the problem, (2) selecting relevant relations and translating them into mathematical statements, (3) carrying out the necessary calculations, (4) interpreting and evaluating the result. The pupils from De Bock et al.’s (2002) study, however, seemed to bypass almost completely all steps except step 3. Their decision on the mathematical operations mainly resulted from a routine-based recognition of the problem type, the actual computational work received most time and attention, and, after checking for basic calculation errors, the result was immediately communicated as the answer.

In line with such observations, the overuse of proportionality might be weakened if pupils paid more attention to the initial steps of the modeling cycle, that is, the understanding of relationships between the relevant aspects of the problem situation and their translation into mathematical terms. So, when pupils are engaged in a task with proportional and non-proportional word problems without the need to actually produce computational answers, they might be stimulated to engage in a

qualitatively different kind of mathematical thinking and develop a disposition toward differentiating proportional and non-proportional problems. This assumption was tested in Study 3 by administering a type of task that is rather uncommon in the mathematics classroom: the classification of a set of word problems.

Interest in the value of problem classification and reflection on the relatedness of problems is rather old. Polya (1957) already indicated that when devising a plan to solve a mathematical problem, a useful heuristic is to think about related problems. Seminal work was also done by Kruketskii (1976) who indicated that high-ability students differ from low-ability students in terms of their skills in distinguishing relevant information, related to mathematical structure, from irrelevant information, related to contextual details. Studies that actually used problem classification tasks, however, are rare. Our main interest was to investigate whether pupils' tendency towards improper proportional reasoning could be weakened if pupils first had to fulfil a problem classification task, a task in which they were not required to produce computational answers.

A total of 74 6th grade pupils participated in this new study (Van Dooren et al, 2011). Half of these pupils first had to solve a set of nine problems and then were asked to classify a set of parallel problems (SC-condition). The other half had to fulfil the same tasks but in the opposite order (CS-condition). Problems were either proportional, additive or constant, so affine problems were not included in this study. The classification task was introduced by the following instruction: *This box contains 9 cards with word problems. You don't need to solve them. Rather, you need to figure out which word problems belong together. Try to make groups of problems that – in your view – have something in common. Put each group in an envelope, and write on the envelope what the word problems have in common. Use as many envelopes as necessary.*

Pupils' classifications were analyzed as follows. First, a P-group was identified. This is the group with the largest number of proportional problems. This group acted as a kind of reference group. Next, an A- and a C-group was identified, respectively containing the largest number of additive and constant problems. When more than one group could be labeled as an A-group, the group with the higher score was selected. Scores were defined as follows: the uncorrected score referred to the number of P-problems in the P-group, the number of A-problems in the A-group and the number of C-problems in the C-group. The corrected score was the uncorrected score minus the number of other problems that were in a group. For instance, the uncorrected score of a P-group containing one "other" problem was subtracted by one to get the corrected score.

Results with respect to the classification task first revealed a high mean uncorrected P-score of 2.37 (out of a total of 3). So most pupils put at least 2 – many even all three proportional problems in one group. In contrast, the corrected score is only

0.4, indicating that pupils frequently also put some, on average almost 2, non-proportional problems in the P-group. For the non-proportional problems, the uncorrected scores were lower, which also has to do with our scoring rules, but nevertheless reveal that many pupils did make separate groups for the additive and constant problems.

Our main question, however, was: did the classification task have a beneficial impact on the solution task, especially with respect to the non-proportional problems? One way to answer that question is to look at the individual solution profiles. A frequency histogram of the number of correct answers to the six non-proportional problems in the two conditions revealed that twenty two students in the SC-condition answered none of the non-proportional problems correctly. In case of the CS-condition, this was the case for only 11 pupils. At the other extreme, only one student in the SC-condition answered five or more non-proportional problems correctly. In the CS-condition, this was the case for 7 pupils. So, although the classification task was not beneficial for all pupils, those who first did the classification task performed substantially better than the other group. When pupils work on a task that invites them to analyse commonalities and differences between word problems, they apparently engage in a deeper kind of mathematical thinking, which is beneficial for later problem solving.

In conclusion, we can state that although pupils' classifications were of rather low quality there was still a moderately positive effect on problem solving afterwards. This is promising, especially given the fact that the type of intervention was very limited, with no explicit instructions, no feedback and no link between the classifying and solving task mentioned to the pupils.

Conclusion

The first part of this paper briefly sketched the recent history of Belgian mathematics education at the primary level. A crucial episode in this history was the rise (and fall) of *New Math* in the 1960s and 1970s. At least, *New Math* opened the debate about how mathematics could be adequately taught to our youngsters. In Belgium this debate led to a "balanced" curriculum with elements from the old "mechanistic" tradition, with still some (minor) *New Math* accents, but quite strongly inspired by the Dutch model of *realistic mathematics education*. New evolutions aimed at making pupils' transition between primary and secondary mathematics education more fluently, seem to appear on the horizon.

Belgium also has a tradition in mathematics education research. A main research line during the last decade focused on the *illusion of linearity*. This research, exemplified in the second part of this paper, revealed, among other things, that the tendency in young children to over-use additive reasoning in proportional situations,

as it was revealed in many older studies in our field, is replaced in older pupils by an over-use of proportional methods in non-proportional situations. This latter tendency goes along with the development of pupils' proportional reasoning skills.

From the three empirical studies briefly reported in this paper, we can draw conclusions at different levels. A *theoretical* conclusion we can draw is that not only key words or problem formulations, but also the (combination of) numbers in a problem can be associated with a solution method. This association interacts with students' prior knowledge. From a *methodological* point of view, we can conclude that assessing proportional reasoning should include also non-proportional problems, and in assessing the over-use of proportionality, one should realise that using problems with integer ratios may strengthen the effect. For *classroom teaching* of proportionality, we think we can draw a few recommendations: discuss explicitly the (validity of) criteria pupils choose to apply proportional methods. Take care to use a variety of examples, not sharing the same superficial task characteristics, and vary the kind of tasks provided, in particular classification tasks seem to have a lot of potential.

References

- Cramer, K, Post, T. & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159–178). New York: Macmillan.
- De Bock, D, D'hoker, M. & Vandenberghe, K. (2011a). Terugblik op een eeuw wiskundeonderwijs in de Vlaamse lagere scholen – 1: van 'traditioneel' naar modern [Looking back over one century of mathematics education in Flemish primary schools – 1: from 'traditional' to modern]. *Basis – Schoolwijzer*, 118(19), 13–16.
- De Bock, D, D'hoker, M. & Vandenberghe, K. (2011b). Terugblik op een eeuw wiskundeonderwijs in de Vlaamse lagere scholen – 2: gematigd realisme of "eclecticisme"? [Looking back over one century of mathematics education in Flemish primary schools – 2: moderate realism or "eclecticism"?]. *Basis – Schoolwijzer*, 118(20), 13–17.
- De Bock, D, Van Dooren, W, Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311–334.
- De Bock, D, Van Dooren, W, Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Mathematics Education Library). New York: Springer.
- De Bock, D, Verschaffel, L. & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65–83.
- Feys, R. (1982). Moderne wiskunde: een vlag op een modderschuit [Modern mathematics: a flag on a mud barge]. *Onderwijskrant*, 24, 3–37.
- Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96–105.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

- Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London: Murray.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 45–89). New York: Academic Press.
- Krucketskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Papy, G. (1964–). *Mathématique moderne [Modern mathematics]* (Vols. 1, 2, 3, 5, 6). Paris, Bruxelles, Montréal: Editions Didier.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Van Dooren, W, De Bock, D, Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Pupils' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187–211.
- Van Dooren, W, De Bock, D, Hessels, A, Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57–86.
- Van Dooren, W, De Bock, D, Vleugels, K. & Verschaffel, L. (2010). Just answering... or thinking? Contrasting pupils' solutions and classifications of missing-value word problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 20–35.
- Verschaffel, L, De Corte, E. & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273–294.
- Verschaffel, L, Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets&Zeitlinger.

СХВАТАЊЕ ЛИНЕАРНОСТИ КОД УЧЕНИКА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ: ПРЕГЛЕД ИСТРАЖИВАЊА И ПРАКСЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме. Овај рад се састоји из два дела: наставне праксе и истраживања. На почетку говоримо о пракси у настави математике у белгијским основним школама. Иако ће акценат бити стављен на тренутну ситуацију, наш приступ ће бити историјски. Укратко ћемо описати како се настава математике, полазећи од механицистичке традиције из педесетих година, након кратког али интензивног новог периода током седамдесетих, развијала у правцу умерено реалистичког или еклектичког приступа. У другом делу дајемо примере истраживања у настави математике у Белгији. Главни предмет истраживања у последњој деценији било је схватање линеарности код ученика, тј. њихова тенденција да користе линеарне методе у нелинеарним ситуацијама. Посебну пажњу посвећујемо нашем истраживању о начину на који ученици основне школе решавају аритметичке текстуалне задатке. Разматраћемо најважније резултате тог истраживања и његов значај за наставну праксу.

Кључне речи: основна школа, Белгија, аритметика, текстуални задаци, илузија о линеарности.

Синиша Црвенковић

Департман за математику, Универзитет у Новом Саду

Даниел А. Романо

Педагошки факултет Бијељина, Универзитет у Источном Сарајеву

bato49@hotmail.com

РАНА АЛГЕБРА И РАНОАЛГЕБАРСКО МИШЉЕЊЕ¹

Ајсџиракџи. У овом тексту настојимо дадамо свој допринос концептуализацији домена 'рана алгебра' и појма 'раноалгебарско мишљење' успостављањем корелације ових конструката са теоријским конструктима 'математичко знање концепата' и 'математичко знање процеса'. Термини рана алгебра и раноалгебарско мишљење (и појмови покривени тим терминима) описани су на бази проучавања доступне литературе о овим доменима али и властитих промишљања о потреби академске заједнице реализатора наставе математике да инволвира елементе алгебре у аритметичке структуре. У нас, у Босни и Херцеговини, и у нашем непосредном окружењу, ови термини још увијек се не прихватају у потпуности. У раду су наведени разлози за које процијењујемо да могу бити подстицај академским заједницама истраживача математичког образовања, математичара, али и реализатора наставе математике у нас, да посвете пажњу раноалгебарском приступу аритметичким садржајима математике у нижим разредима основне школе.

Кључне ријечи и фразе. аритметичко и раноалгебарско мишљење, математичка знања концепата и процеса.

1. Увод

Прије двије године ови аутори понудили су једном од локалних часописа чланак „Рана алгебра – једно истраживање о концептима рјешавања једначина и неједначина студената учитељског програма“. Рад је одбијен са образложењем да се „не може ѿговориџи о раној алџебри ако се исијџијују сијугениџи“. Други аутор овог текста, као дугогодишњи предавач курсева методике наставе математике на учитељском програму али и програму образовања средњошколских наставника математике, у потпуности прихвата став међународне зајед-

¹ Садржај текста је саопштен на Трећој међународној конференцији „Методски аспекти наставе математике“, одржаној 14–15. јуна 2014. године на Факултету педагошких наука у Јагодини.

нице истраживача математичког образовања да ученичко и студентско овладавање врстама математичког промишљања (као што су, на примјер, скуповно-релацијско мишљење, аритметичко мишљење, аритметичко-раноалгебарско мишљење, алгебарско мишљење, геометријско мишљење, логичко мишљење, и томе слично...) не зависи од узраста онога који учи. Иако овакво прихватање није спорно када је у питању развој геометријског мишљења код ученика или студената, јер је Теорија ван Хиелеових о нивоима развоја геометријског мишљења, настала 1956, одавно опште прихваћен оквир за процјењивање успјешности у ученичком и студентском овладавању елементима тог мишљења, такво прихватање још увијек не постоји када су у питању алгебарски садржаји унутар домена 'школска математика', али и домена 'математичка знања неопходна реализаторима наставе математике'. У нас, термини 'рана алгебра' и 'раноалгебарско мишљење' још увијек нису прихваћени унутар домена 'Истраживање математичког образовања' и 'Методика наставе математике' од цјелокупне академске заједнице.

У овом раду ми желимо да опишемо шта међународна заједница истраживача математичког образовања подразумева под термином 'рана алгебра' на основу прегледа доступне литературе о овим доменима, али и на основу власитих промишљања. При томе, наравно, превасходно мислимо на књиге:

- T. Carpenter, M. Franke and L. Levi, *Thinking Algebraically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*, Heinemann, Portsmouth, NH, 2003;
- J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades*, Lawrence Erlbaum Associates / National Council of Teachers of Mathematics, 2008;
- J. Cai and E. Knuth (eds.) *Early Algebarization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Springer 2011,

али и научне чланке публиковане у водећим часописима и зборницима радова који покривају домен 'Истраживање математичког образовања'. На примјер, часопис ZDM посветио је скоро цијели број 37(1)(2005) развоју ученичког алгебарског мишљења у нижим разредима основне школе. Часопис *Teaching Children Mathematics*, у намјери да помогне учитељима у инволвирању алгебарских садржаја у аритметичке структуре, започео је фебруара 2012. године серију чланака о овим концептима.

Овдје ћемо изложити разлоге зашто треба инсистирати на инволвирању елемената алгебарског мишљења у основношколску аритметику. У том циљу, повезаћемо теоријске конструкте 'рана алгебра' и 'раноалгебарско мишљење', са једне стране, са конструктима 'концептуална математичка знања' и 'процесна математичка знања' са друге стране. Анализираћемо ове концепте са различитих аспеката / унутар различитих окружења: у категорији математич-

ких знања неопходних учитељима, унутар скупа вјештина 'методичка знања неопходна учитељима', али и унутар домена 'разумијевање процеса учитељског подучавања и ученичког учења' у нижим разредима основне школе.

Текст, иако је у првој намјени био намјењен нашим студентима другог циклуса студијског програма за образовање професора разредне наставе (учитеља), може послужити и другим читаоцима који желе да се обавијесте о концептима 'рана алгебра' и 'раноалгебарско промишљање'.

2. Компоненте алгебарског мишљења

Алгебарско мишљење, слиједећи Шели Крејглер [31] (Kriegler: 1997, 2006), организовано је у двије главне компоненте: развој математичког мишљења и сагледавање фундаменталних алгебарских идеја. Алатима математичког мишљења сматрамо: аналитичка средства свијести, специјалне вјештине рјешавање проблема, вјештине резоновања и посебне репрезентативне вјештине. Фундаменталне алгебарске идеје представљене су доменом у којем средства математичког мишљења могу да се развијају. Алгебарске идеје су представљене посредством три различита аспекта: алгебра као апстракција аритметике, алгебра као језик и алгебра као један алат који нам омогућава да анализирамо функције и математичке моделе.

О компонентама алгебарског мишљења мање упознат читалац може погледати текстове: [Б] – [Е], или текст [44] (Романо, 2009) на нашем језику.

3. Рана алгебра и раноалгебарско мишљење

Џејмс Капут је у свом тексту „*Шта је алгебра? Шта је алгебарско мишљење?*” [25] (Caput, 2008) окарактерисао алгебарско мишљење посредством слиједећа два аспекта: (1) уочавање и исказивање генерализација посредством формалног и конвенционалног система симбола; и (2) расуђивање посредством тих симболичних форми, укључујући синтетички вођеним манипулацијама тим симболичким формама. Као резултат тих оперијења, језгра алгебарских аспеката у школској математици су: (а) Алгебра као студије о структурама и системима апстрахованим од аритметичког рачуна са бројевима али и њихових међусобних односа, тј. алгебра као генерализација аритметике; (б) Алгебра као студије о функцијама, релацијама и са њима повезанима варијацијама; и (в) Алгебра као један кластер моделовања језика у циљу исказивања и подршке размишљањима о ситуацијама при том моделовању.

Закључивања у алгебри су дедуктивна [42] (Radford, 2014. – у штампи). Луис Редфорд у поменутом тексту износи констатацију да су процеси генерализације аритметичких правилности посредством пробања и нагађања елемент ари-

метричког мишљења, а не алгебарског. Он прихвата становишта да се аритметика и алгебра разликују и са епистемиолошког али и са семиотичког становишта, а не само са когнитивног становишта [51] (Sriraman and Lee, 2011). У аритметици се бавимо израчунавањима кориштењем конкретних објеката, док се у алгебри бавимо процесима са апстрактним концептима. Према томе, до изражаја долазе знања и разумјевања концепата (дакле, концептуална математичка знања), али и знања и разумјевања процеса са тим концептима (дакле, процесна математичка знања²). У циљу дубљег разумјевања ових теоријских конструката, сугеришемо читаоцу да, на примјер, погледа текстове [48] (Schneider and Stern, 2005) и [43] (Rittle-Johnson and Schneider, 2014. – у штампи).

На нивоу основношколске математике, ученицима показујемо како нешто функционише не објашњавајући те процесе. Алгебра се појављује чим се поставе питања *'Зашто?'*, *'Како?'*, *'Како ми знамо да иако треба?'*, *'Да ли се то може показати и на неки други начин?'* и томе слично и покушамо понудити нека промишљања која се могу прихватити као валидна објашњења за постављена питања. Подстицана непрекидним извјештајима о ученичким потешкоћама у овладавању алгебарским идејама, академска заједница истраживача математичког образовања определијелила се за концепт постепеног увођења алгебарских концепата у аритметичке садржаје на основу прихваћених процјена да такво определијење омогућава успјешнији развој алгебарског мишљења код ученика.

У документу „Принципи и стандарди за школску математику“ Националног савјета учитеља математике Сједињених Држава из 2000. године (видј. [A]), понуђена је слиједећа детерминација:

- Разумијети обрасце, односе и функције;
- Представљати и анализирати математичке ситуације и структуре користећи се алгебарском симболиком;
- Користити моделовање за представљање и разумјевање квантитативних односа;
- Уочавати и анализирати промјене у различитим контекстима.

Према изнесеном ставу Мајкла Мареја [36] (Murray, 2010), важно је прихватити да се ови пожељни исходи односе не само на ученике средњих школа, већ и на ученике основних школа почевши од најранијих разреда. Према одређењу знатног броја чланова академске заједнице истраживача математичког образовања, подучавање ученика алгебри не треба одвајати од подучавања

²Скрећемо пажњу читаоцима да овај конструкт не треба поистовјетити са знањима и разумјевањима одвијања процедура, дакле, процедуралних знања. Процедурална знања више личе на познавање рецепата и посједовање искуства са примјеном тих рецепата.

аритметици већ, напротив, треба инволвирати алгебарске концепте у аритметичке садржаје кад год је то могуће.

Такође, важно је прихвати да се термином 'рана алгебра' не покрива оно што је требало научити у средњој школи. Већина истраживача прихвата став, који су својевремено изнијели Томас Карпентер и Линда Леви[8] (Carpenter and Levi, 2000), да је наш главни циљ унутар домена рана алгебра да се обезбиједе учioniчки услови који омогућавају развој алгебарског размишљања код ученика. Они, као и други истраживачи у овој области ([4] (Boulton-Lewis at all, 1998); [29] (Kieran, 2004); [17] (Domoney and Price, 2004); [37] (Nathan at all, 1996); [38] (Nathan and Koedinger, 2000); [39] (Norton and Cooper (int.)); [46] (Schifter, 2009), [47] (Schifter at all, 2009)), промовишу концепт да рад у домену рана алгебра подразумева изградњу, размијевање, дескрипцију и оправданост генерализација аритметичких концепата, прихватање и размијевање репрезентација математичких идеја, али и њихово записивање помоћу симбола и, користећи те симболе, размијевање и рјешавање проблема ([23] (Kaput, 1993), [24] (Kaput, 1998), [25] (Kaput, 2008), [13] (Carragher at all, 2006), [10] (Carragher at all, 2008), [47] (Schifter at all, 2009)).

Активности у математици нижих разреда могу се описати као активности посредством именица / објеката (као што су бројеви, фигуре и варијабле), својстава објеката, тј. веза између њих (тј. предикатима) и трансформацијама објеката (дакле, глаголима). Према мишљењу Елизабете Верен и Тома Купера ([54] (Warren and Cooper, 2005)), моћ математике лежи у релацијама и трансформацијама које настају уочавањем правилности и њиховим генералисањем, а не у објектима. Конструкција апстрактних појмова циљ је математичког учења ([49] (Sfard, 1991), [22] (Johnassen at all, 1993)). Дакле, при подучавању математичким садржајима, требало би да је фокус на ученичком овладавању стварним фундаменталним вјештинама у уопштавању, препознавању, размијевању и кориштењу репрезентација објеката, концепата, процеса и својстава, али и процјењивања сврсисходности математичких генерализација ([26] (Kaput and Blanton, 2001)). Ученичко стицање искустава у претходно набројаним активностима подстиче њихов развој елемената алгебарског мишљења.

Прихвата се[52] (Стевановић и сарадници, 2014 – у штампи) да су међу најприкладнијим подстицајима раноалгебарског промишљања којима треба подвргавати ученике нижих разреда основне школе слиједећи:

- генерализација аритметике,
- уочавање функционалних веза,
- уочавање релацијских веза,
- везано размишљање,
- преиспитивање улоге знака једнакости.

3.1. Генерализација аритметичких концепата.

Овај термин се односи на закључивање које се експонира у процесима када ученици уочавају неке правилности које се појављују током њиховог рада са операцијама сабирања и множења (и њиховим инверзима – одузимањем и дијелењем), и тврдњама чију ће оправданост разумијевати знатно касније а коју сада могу записивати кориштењем симболичке нотације. Ево неколико примјера:

При овладавању вјештинама сабирања и одузимања природних бројева унутар скупа $\{0, 1, \dots, 20\}$ (други разред), или скупа $\{0, 1, \dots, 20, 21, \dots, 99, 100\}$ (трећи разред), ученици уочавају да:

(а) неки бројеви се могу добити, између осталог, и као збир два једнака броја:

$$(0 = 0 + 0), 2 = 1 + 1, 4 = 2 + 2, \dots, 20 = 10 + 10.$$

Ове бројеве зовемо *парни бројеви*. Ови и они други, $1, 3, \dots, 19$, који се не могу тако представити, чине читав поменути скуп. Бројеве који нису парни бројеви, зовемо *непарни бројеви*. Ако са a означимо било који природан број, тада се збир $a + a$ може записивати овако: $2a$. Послије увођења ове репрезентације, сасвим природно је поставити питање: *Како ћемо представљати непарне бројеве?*

Проблем представљања парних бројева може се илустровати слиједећим фигурама /цртежима:



Фигура 1.



Фигура 2.



Фигура 3.



Фигура 4.

(Конструисано по угледу на: [40] (Radford, 2011), [41] (Radford, 2012))

Зашто је концепт парног броја важан?

Прво, концепт парног броја отвара могућност да се ученици другог разреда упознају са логичким алатима:

- *Принцип искључења шрећег*: Природан број је паран или непаран, и
- *Принцип неконтрадикције*: Природан не може истовремено бити паран и непаран.

Друго, концепт парног броја отвара могућност усвајања алгебарске нотације али и правила закључивања 'Modus ponens'. На питање: *Како ми знамо да је збир два парна броја опет паран број?* можемо, како је то уобичајено у низим разредима основне школе, понудити неколико примјера, као што су:

Бројеви 2 и 4 су парни бројеви (хипотеза) Бројеви 6 и 12 су парни бројеви (хипотеза)

$$2 + 4 = 6 \text{ (6 је паран број јер је } 6 = 3 + 3 \text{)} \quad 6 + 12 = 18 \text{ (18 је паран број јер је } 18 = 9 + 9 \text{)}$$

Збир парних бројева 2 и 4 је паран број 6. Збир парних бројева 6 и 12 је паран број 18.

Наравно, закључак да је збир бројева 2 и 4 опет паран број можемо посматрати на слиједећи начин:

Бројеви 2 и 4 су парни бројеви, јер се могу написати у облику

$$2 = 1 + 1 \text{ и } 4 = 2 + 2.$$

Ако саберимо бројеве 2 и 4 овако представљене, имамо

$$2 + 4 = (1 + 1) + (2 + 2) = (1 + 2) + (1 + 2) = 3 + 3.$$

Збир бројева 2 и 4 представљен је у облику збира два једнака броја. Дакле, према прихваћеној дескрипцији термина 'паран број', тај збир $2 + 4$ је такође паран број. Захтијевањем од ученика да прихвате оваква промишљања као валидна стављамо их у позицију да на знак једнакости не гледају као на сигнал да треба извршити нека израчунавања. Од њих се на овај начин захтијева да прихватају да ако у некој једнакости $L = D$ десна страна има, или описује, неко својство, тада то својство има и лијева страна ове једнакости.

Наравно, можемо понудити и слиједеће промишљање, које представља генерализацију управо изложеног закључивања.

Претпоставка 1: Први број је паран, па се може представити као збир два једнака броја, рецимо $a + a$.

Претпоставка 2: Други број је паран, па се може представити као збир два једнака броја, рецимо $b + b$.

Закључивање: Саберемо збир $a + a$ са збиром $b + b$. Добијамо:

$$(a + a) + (b + b) = (a + b) + (a + b).$$

Закључак: Будући да су сабирци на десној страни претходне једнакости једнаки (препознавање репрезентације парног броја), закључујемо да збир $(a + b) + (a + b)$ представља паран број. Дакле, збир $(a + a) + (b + b)$ на лијевој страни горње једнакости је паран број.

По аналогiji, изводимо закључке:

Разлика два парна броја је паран број.

Збир или разлика два непарна броја је паран број.

Збир или разлика јарној и нејарној броја је нејаран број.

(б) код сабирања двоцифрених бројева, на примјер $37 + 28$, може се поступити, између осталог, на слиједећи начин

$$37 + 28 = (37 + 3) + (28 - 3) = 40 + 25 = 65$$

или, на примјер, на слиједећи начин

$$37 + 28 = (37 - 2) + (28 + 2) = 35 + 30 = 65$$

У почетку, ученик може да наведе уочену правилност ријечима: Збир два броја се неће промијенити ако једном сабирку додамо неки број а тај исти број одузмемо од другог сабирка, или обрнуто. Ово служи као основа за симболичан израз односа,

$$\begin{aligned} a + b &= (a + c) + (b - c) \quad (\text{уз услов да је } c \leq b) \\ &= (a - c) + (b + c) \quad (\text{уз услов да је } c \leq a). \end{aligned}$$

(в) кад одузимамо број од збира два броја, на примјер $(35 + 47) - 27$, то се може обавити на више начина, рецимо

$$(35 + 47) - 27 = (35 - 27) + (47 - 0) = 8 + 47 = 55$$

$$(35 + 47) - 27 = (47 - 27) + 35 = 20 + 35 = 55$$

$$(35 + 47) - 27 = (35 + 47) - (13 + 14) = (35 - 13) + (47 - 14) = 22 + 33 = 55$$

$$(35 + 47) - 27 = 82 - 27 = (82 + 3) - (27 + 3) = 85 - 30 = 55$$

$$(35 + 47) - 27 = 82 - 27 = (70 + 12) - (20 + 7) = (70 - 20) + (12 - 7) = 50 + 5 = 55$$

Дакле, прво упоредимо број c који одузимамо од збира $a + b$ са сабирцима a и b али и са самим збиром $a + b$. Током тог упоређивања до изражаја долази ученичко разумијевање релације поретка међу природним бројевима. Имамо (наравно, слиједећи закључци су намјењени учитељима³):

- ако је $c \leq a$, можемо примјенити поступак $(a + b) - c = (a - c) + b$,
- ако је $c \leq b$, можемо примјенити поступак $(a + b) - c = a + (b - c)$,
- ако је $a \leq c$ и $b \leq c$, а $c \leq a + b$, можемо примјенити поступак

$$(a + b) - c = (a - a) + (b - (c - a))$$

Представимо умањилац c као збир два броја. На примјер $d + e = c$ при чему је број d мањи од броја a а број e од броја b . Сада имамо

$$\begin{aligned} (a + b) - c &= (a + b) - (d + e) \quad \text{Умањилац је приказан као збир бројева} \\ &= (a - d) + (b - e) \quad \text{Извршено је прегруписање бројева.} \end{aligned}$$

Који начин ћемо употребити зависи од међусобних односа бројева о којима се конкретно ради у конкретном одузимању. Важно је да разумијемо иде-

³ Закључивање експонирано овдје превасходно има намјеру доградње математичких знања учитеља, тј. сврставамо га у парадигну 'математичка знања неопходна учитељима'.

ју која се налази у основи ових израчунавања. Нашим записивањем помоћу слова само назначавачемо поступке које можемо примјенити.

3.2. Уочавање функционалних веза.

Овај термин се односи на уопштавање нумеричких модела. Такви обрасци често настају од контекстуалних ситуација и могу се представити сликама, бројевним линијама, функцијским табелама, симболичком нотацијом, графиконима, или на неки други начин. Као примјер концептуализације функцијских веза, Елизабет Верен и Том Купер у тексту [54] (Warren and Cooper, 2005) наводе слиједећи примјер:

Учитељ: *Да ли неко зна шџа је функција?*

Ученик: Јели то је нешто као фабричка машина?

Учитељ: *Шџа је фабричка машина?*

Ученик: Мој тата ради у једној фабрици за машином и мијења ствари.

На пример, у другом разреду, када ученике подучавамо бројевима 1, 2, 3, 4, 5 ослањајући се на тзв. објектски приступ том подучавању, тј. када ове природне бројеве представљамо као кардинале коначних скупова, може се прећи на процесни приступ подучавању и скренути пажња ученицима на слиједеће чињенице:

- број 1 је први природан број,
- иза броја 1 долази број 2, иза броја 2 долази број 3, ..., иза броја 4 долази број 5, и тако даље.

У нас, у Републици Српској, број 0 се подучава послѣје броја 5. Ту треба настојати да ученици прихвате да у бројевном низу 1, 2, ..., 5, број 0 стављамо испред природног броја 1. Дакле, настојимо да ученици прихвате концепт да иза сваког броја долази број. Концепт описан глаголом 'долазити' је, у бити, функционална веза између бројева. Будући да број 2 слиједи иза броја 1, односно број 3 слиједи иза броја 2, и тако даље, те да иза различитих бројева долазе / слиједе различити бројеви, овај концепт називамо 'следбеник'. То је, у основи, придруживање које сваком броју придружује тачно један број.

Као други примјер у циљу уочавања функционалних веза може послужити објашњавање операције сабирања:

$$1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, \dots, 9+1=10, \dots$$

Дакле, број сабирамо са бројем 1 тако што у резултату увијек добијамо његов следбеник. Ако са a означим било који природан број, а са a' следбеник броја a , тада можемо прихватити да једнакост

$$a+1=a'$$

описује придруживање које пару бројева a и 1 придружује број a' . Плаузибилно прихватљив одговор

$$a + 2 = (a + 1) + 1$$

на питање 'Како сабирамо неки број са бројем 2?', односно једнакост

$$a + 3 = (a + 2) + 1,$$

која описује како сабирамо неки број са бројем 3 (ако већ знамо како се сабира са бројем 2), можемо уопштити и ту генерализацију описати ријечима:

- Треба сабрати број a са бројем c (при чему c није број 1).
- Број c је следбеник неког броја. Рецимо да је $c = b + 1$.
- Предпоставимо да знамо колико је $a + b$.
- Прихватамо да је $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Сада можемо одговорити на питање како представљати непарне природне бројеве. Будући да је очигледно да су непарни природни бројеви следбеници парних природних бројева, непарне природне бројеве представљамо тако да репрезентацији парног броја додамо број 1:

$$2a + 1,$$

при чему смо словом a означили било који природан број. Дакле, слово a можемо замјенити било којим бројем из скупа бројева $\{0, 1, \dots, 20\}$ (други разред), или скупа $\{0, 1, \dots, 20, 21, \dots, 99, 100\}$ (трећи разред).

Проблем представљања непарних бројева може се илустровати слиједелим фигурама



Фигура 5.



Фигура 6.



Фигура 7.



Фигура 8.

(Конструисано по угледу на: [40] (Radford, 2011), [41] (Radford, 2012))

Понудимо сада размишљање како би се ученицима могла репрезентовати тврдња *Збир два нејарна броја је јаран број*. Из нумеричких примјера:

$$5 + 7 = 12 \text{ (12 је паран број јер је } 12 = 6 + 6 \text{)}$$

$$7 + 13 = 20 \text{ (20 је паран број јер је } 20 = 10 + 10 \text{)}$$

односно из 'аритметичког доказивања примјерима':

- Треба доказати да је збор $3 + 5$ паран број;

- б) Број 5 је непаран број па се може представити у облику $5 = 4 + 1 = 2 + 2 + 1$;
- с) Број 7 је непаран број па се може представити у облику $7 = 6 + 1 = 3 + 3 + 1$;
- д) Зато се збир $5 + 7$ може представити у облику
- $$5 + 7 = (4 + 1) + (6 + 1) = (2 + 2 + 1) + (3 + 3 + 1) \\ = (2 + 3 + 1) + (2 + 3 + 1)$$
- е) Будући да збир $(2 + 3 + 1) + (2 + 3 + 1)$ на десној страни горње једнакости представља паран број јер је збир два иста броја, закључујемо и да је збир $5 + 7$ на лијевој страни горње једнакости такође паран број;

уопштавањем конструишемо закључивање:

Претпоставка 1: Први број је непаран па се може представити као збир два једнака броја и броја 1, рецимо $a + a + 1$.

Претпоставка 2: Други број је непаран па се може представити као збир два једнака броја и броја 1, рецимо $b + b + 1$.

Закључивање: Саберемо збир $a + a + 1$ са збиром $b + b + 1$. Добијамо

$$(a + a + 1) + (b + b + 1) = (a + b + 1) + (a + b + 1)$$

Закључак. Будући да су сабирци на десној страни претходне једнакости једнаки (препознавање репрезентације парног броја), закључујемо да збир $(a + b + 1) + (a + b + 1)$ представља паран број. Дакле, збир $(a + a + 1) + (b + b + 1)$ на лијевој страни горње једнакости је такође паран број.

Сабирање у скупу $\square$ природних бројева је (подсјећамо читаоце овог текста) функција $+: \square \times \square \rightarrow \square$ од двије варијабле која задовољава слиједеће услове:

$$(\forall a)(a + 1 = a'), \\ (\forall a)(\forall b)(a + (b + 1) = (a + b) + 1).$$

Наравно, може се доказати, али докази нису једноставни, да таква функција постоји и да је јединствена. Подсјећамо читаоце, такође, на чињеницу да термин 'функција' подразумијева слиједеће двије ствари:

- а) За сваки пар природних бројева a и b постоји компонат $a + b$, тј. сабирање је дефинисано за сваки пар природних бројева; и
- б) $(\forall a, a', b, b' \in \square)((a = u \wedge b = v) \Rightarrow a + b = u + v)$, тј. за пар бројева a и b компонат $a + b$ је јединствен.

Слиједећи промишљања Ерика Смита ([50] (Smith 2008)), Марије Блантом и Џејмса Капута([3] (Blanton and Kaput, 2011)), разликујемо три модела анализирања правилности и веза као врста функционалног мишљења: (1) рекурзивно препозна-

вање правилности укључује проналажење варијација унутар низова вриједности; (2) коваријантно мишљење је засновано на анализирању како се двије квантитативне различите величине истовремено повезују; и (3) кореспондентно повезивање је засновано на идентификацији корелација међу варијаблама.

3.3. Уочавање релацијских веза.

Саставни дио раноалгебарског подучавања је фокус на ученичко резонување и дискурс који омогућава ученицима да идентификују везе међу концептима, а затим да, кроз разумијевање тих веза, раде на формирању генерализација. Овај дискурс не долази природно сам по себи, већ мора бити резултат добро дизајнираног наставничког плана. Наравно, за то је потребно да тај наставник разумије основне алгебарске аспекте садржаја којим настоји подучавати своје ученике.

Како ученици нижих разреда основне школе почињу учити о бројевима и операцијама са њима, они одмах почињу уочавати регуларности у нашем нумеричком систему. Они без проблема уочавају промјене. Правилност, или генерализација, илустрована овдје – ако је један број мањи него други и ако сваком од њих додамо исти број, тада ће први сабирак бити мањи од другог сабирка – један је примјер уочавања релацијских веза. Ова констатација је тачна за свака три природна броја, на примјер: будући да је 36 мање од 54, тада је и $36 + 58$ мање од $54 + 58$. Ова се идеја може приказати алгебарском нотацијом на слиједећи начин: Ако су a , b и c било који природни бројеви и ако је a мање од b , тада је $a + c$ мање од $b + c$.

Наравно, остаје отворено питање: Који концепт је покривен термином 'мање од'? Зашто говоримо да је '1 мање од 2'? Раније смо се освједичили да прихватамо једнакости ' $1 + 1 = 2$ ', ' $2 + 1 = 3$ ', и тако даље. Њих можемо разумијети, између осталог, и на слиједећи начин: Броју a треба додати број 1 да би се добио следбеник a броја a . Ученицима другог разреда основне школе у нас овај концепт можемо исказати ријечима: Број a је мањи од броја $a + 1$, односно број $a + 1$ је већи од броја a . По аналогији, једнакост ' $3 + 2 = 5$ ' можемо разумијети на слиједећи начин: Да би се од броја 3 добио број 5 потребно је броју 3 додати број 2. Дакле, 3 је мање од 5 јер је $3 + 2 = 5$. Генерализација претходног размишљања може се извршити на слиједећи начин: Да би казали да је број a мањи од броја b потребно је да постоји такав природан број u да је $a + u = b$. Зато, на примјер:

- '5 је мање од 9', јер је $5 + 4 = 9$;
- Исказ '36 је мање од 17' није тачан, већ обрнуто '17 је мање од 36' будући да је $17 + 19 = 36$;
- '36 је мање од 54' јер је $36 + 18 = 54$.

Установљавање особина релације 'бити мањи од' омогућава ученичко разумијевање немогућег контекста. На примјер, слиједећа процедура установљавања особине ове релације:

Наставник. Да ли је 1 мање од 1?, Да ли је 2 мање од 2? и тако даље...

Ученик. Не. Није. 1 је једнако 1 и 2 је једнако 2.

Наставник. Како ћемо то исказати ријечима?

Ученик. Будући да је 1 једнако 1, не може бити 1 мање од 1. Аналогно, како је 2 једнако 2, не може бити 2 мање од 2.

Наставник. Да ли то вриједи за било који природан број? Како ћемо то исказати ријечима?

Ученик. Ниједан број не може бити мањи од самог себе.

Наставник. Да закључимо: Будући да за природан број вриједи Сваки број је једнак самом себи можемо закључити да не може бити да је број мањи од самог себе.

омогућава да ученици уочавају постојања неприхватљивих ситуација ако постоји нека ситуација која је већ раније прихваћена.

Подсјећамо читаоце да се претходно описана релација *мање од*, у ознаци ' $<$ ', у скупу $\mathbb{N}$ природних бројева формално уводи на слиједећи начин:

$$(\forall a)(\forall b)(a < b \Leftrightarrow (\exists u)(a + u = b))$$

Може се показати, али докази нису тривијални, да релација $<$ има слиједеће особине:

$$\begin{aligned} &(\forall a)\neg(a < a) && \text{(конзистентност),} \\ &(\forall a)(\forall b)(a < b \Rightarrow \neg(b < a)) && \text{(несиметричност),} \\ &(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c) && \text{(транзитивност), и} \\ &(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a < b \Rightarrow a + c < b + c) && \text{(сагласност са сабирањем).} \end{aligned}$$

Дакле, структура $(\mathbb{N}, =, +, <)$ је уређена алгебарска структура.

3.4. Везано размишљање.

Кад кажемо да ученик везано размишља или да користи везано размишљање онда мислимо на то да када рјешава математички проблем испитује двије или више математичких идеја алтернативно гледајући на везу између њих и анализирајући их користи те односе у намјери да ријеша проблем, формира неку тврдњу или покаже да разумије ситуацију или концепт у који је укључен. У контексту аритметике, овај термин је схваћен у слиједећем смислу: „Ученици могу да препознају много различитих односа између бројева, операција и релација са њима“ ([35] M. Molina at all, 2008). Овако разумијевање је од великог значаја у математици будући да многе основне математичке идеје укључују односе између различитих репрезентација бројева, али и операција и релаци-

ја између њих. Сматра се да је језгро математичког разумијевања успостављање односа између математичких идеја и концепата. Зато везано размишљање омогућује да ученици остваре дубље разумијевање у аритметици. Након тога, апстракције које претходе уласку у алгебру, будући да су добро засноване, омогућавају квалитетније базирање основних компонената алгебарског размишљања. Везано размишљање се може развити на различитим активностима помажући ученицима да обрате пажњу на односе између бројева, с једне стране, и операција и релација с друге стране. Ова знања не само да помажу у развијању аритметичког знања него оснажују вјештине рачунања. Да би се почело са оваквим начином размишљања, ученицима треба омогућавати да третирају математичке проблеме у којима су једначине и неједначине објекти који се анализирају

Пет кључних идеја подупиरे нашу теоријску позицију о везаном размишљању (О везаном размишљању, погледати текст [36] (Murray, 2010) или текст [52] (Стевановић и сарадници, 2014 – у штампи) на нашем језику. Оне праве мост између бројева и операција са њима и представљају врло важне компоненте раноалгебарског мишљења. У претходној деценији слиједећи концепти били су предмет истраживања:

- Унутрашња структура низова са бројевима ([7] (Cai at all, 2011), [21] (Jacobs at all, 2007));
- Еквиваленције ([27] (Kaput at all, 2008), [35] (Molina at all, 2006), [32] (Lins and Kaput, 2004));
- Разумијевање специфичности операција – одузимања и компензирања кориштењем еквиваленција ([5] (Britt and Irwin, 2011), [53] (Stephens and Wang, 2009), [20] (Irwin and Britt, 2005));
- Бројеви који се могу мијењати ([15] (Cooper and Warren, 2011), [19] (Fujii and Stephens, 2001)), и
- Генерализације ([15] (Cooper and Warren, 2011), [34] (Mason at all, 2009)).

4. Закључне опсервације

У свом чланку ([33] (Livneh and Linchevski, 2007)), Дрора Ливне и Лиора Линчевски расправљају о теоријском конструкту 'подучавање аритметике за алгебарске циљеве' ([16] (Davis, 1985), [1] (Arcavi, 1994), [18] (English and Sharry, 1996)) анализирајући ученичке потешкоће са нумеричким структурама. Оне су упоређивале ученичке аритметичке компетенције са развојем алгебарских способности и овладаним алгебарским вјештинама у току двије године у четири различите школе посматрајући двије групе ученика. Према информацијама изнесеним у том тексту, ученици који су подучавани алгебарским идејама

посредством аритметичких садржаја касније са пуном мање потешкоћа овладавају базним (али и напреднијим) алгебарским идејама и алгебарским вјештинама од контролне групе ученика којима није пружена таква могућност. Чак је и група ученика, процијењена као ризична група будући да су њихове аритметичке компетенције биле скромније од стандардних, имала значајан успјех у овладавању алгебарским садржајима од исте такве контролне групе.

Дакле, рана алгебра није само одговарајући садржај, већ превасходно посебна методика наставе математике која снажније доприноси развоју способности (на примјер, логичког мишљења, аритметичког мишљења, али и аритметичко-раноалгебарског мишљења) али и почетних алгебарских вјештина код особа које се подучавају.

Прихватање концепта 'рана алгебра' у циљу побољшања елементарне математике у нижим разредима основне школе подразумијева промјене наставних програма математике за те разреде. Наставни програми, усмјерени ка инволвирању алгебарских елемената у аритметичке концепте, требало да су много кохерентнији него је то сада случај. Једна група истраживача – Дејвид Карахер, Аналуција Шлиман, Барбара Бризуела и Дарел Ернест ([13] (Carragher et al, 2006)) – слиједећи рад Џејмса Капута([24] (Kaput, 1998)) изнијела је став да је то могуће радити а да се при томе не захтијева прерада читавог наставног програма математике за ниже разреде основне школе. Ова алгебраизација аритметичких садржаја подразумијева конципирање активности са неколико различитих аспеката гледања на алгебру, али и учитељских прихватања тих концепата ([36] (Murray 2010)).

Џејмс Капут и Марија Блантон су изнијели став ([26] (Kaput and Blanton, 2001)) да основношколски реализатори наставе математике имају недовољна знања, али и врло мало искуства у досезању циљева повезивања аритметичких тврдњи са активностима уопштавања и формализације. Једну предвидљиву последицу овог недостатка можемо описати као недостатак разумијевања и не баш успјешног процјењивања дубине досезања успјешности у ученичким активностима. Ако прихватамо процјену да реализаторима наставе математике у нижим разредима основне школе (учитељима) у нас недостаје бар једно од знања – математичка знања неопходна учитељима, методичка знања неопходна учитељима или знања о процесима подучавања и учења усмјерена на раноалгебарско промишљање, тада је потпуно прихватљива констатација да је њихово укључивање у овај домен доста важно за њихов даљи професионални развој.

Неколико група истраживача математичког образовања својевремено су саопштавали резултате својих истраживања у настојањима да процесе подучавања основних математичких појмова ученика нижих разреда основне школе посматрају кроз алгебарско сочиво. Међу њима истичемо слиједеће: Томас

Карпенер, Линда Леви, Марија Блантон, Џон Капут, Дебора Шифтер, Вирџинија Бастабл, Сузан Расел, Лиза Сејферт, Викторија Џејкобс, Меган Франк и Маргарет Ридл будући да су нам њихови радови доступни ([9] (Carpenter at all, 2003), [2] (Blanton and Kaput, 2003), [21] (Jacobs at all, 2007), [45] (Schifter at all, 2008)). Аспекти ових истраживача репрезентују стратегију алгебраизације аритметичких садржаја поступком који су започели Марија Блантон и Џејмс Капут својим текстом „Развој основношколских учитеља – очи и уши за алгебру“ („Developing Elementary Teachers – Algebra Eyes and Ears“) публикованом 2003. године у чувеном часопису *Teaching Children Mathematics*. Ова стратегија је фокусирана на слиједеће три промјене наставничких активности у учионици:

- а) 'алгебраизација' инструкционог материјала;
- б) подстицај ученичког алгебарског мишљења;
- в) стварање учионичке културе и наставе праксе које подржавају алгебарско резоновање.

Наравно, фокусирање на инволвирање алгебарских елемената у аритметичке садржаје у нижим разредима основне школе, иако није баш потпуно ново, ипак потражује од академских заједница истраживача математичког образовања и математичара, али и заједнице учитеља да прихвате промјену принципијелно-филозофске основе инволвиране у курикулуме математике за те разреде. Аутори овог текста заступају став да су окружења 'Теорија реалистичког математичког образовања' или 'Теорија дидактичких ситуација' много погоднији миље од традиционалног приступа какав се примјењује у већини наших основних школа. Те промјене треба да озваничи Министарство просвјете и културе Републике Српске, у складу са нашим Законом о основном образовању и васпитању.

Кад ученици нижих разреда основне школе (ограничени својим аритметичким знањима) почињу учити неке алгебарске концепте подвргнути су захтјевима да разумију те алгебарске идеје, те да овладавају одговарајућим алгебарским вјештинама манипулисања наученим алгебарским концептима (као што су, на примјер, алгебарски аспект рјешавања једначина и неједначина, генерализација аритметичких правилности, и томе слично). Ти захтјеви подстичу развој њихових алгебарских способности. Те способности називамо 'раноалгебарско мишљење'.

Рана алгебра и раноалгебарско резоновање је релативно нова област истраживања у математичком образовању. У недавно публикованој књизи „Рана алгебраизација“ ([6] (Cai and Knuth, 2011)), Каролин Киран је у свом прилогу ([30] (Kieran, 2011)) сублимирала интенције академске заједнице истраживача математичког образовања да се наставе истраживања у намјери да се додатно

расвијетле процеси развоја раноалгебарског мишљења фокусирајући се на слиједеће теме:

- размишљања о општости уочавајући их у посебностима;
- размишљање о значењима уочених правилности;
- везано размишљање о количинама, бројевима и нумеричким операцијама;
- размишљање о реалним односима објеката контекстуалних проблема;
- категоријално / појмовно размишљање о процедурама;
- предвиђање, претпостављање и процјењивање; и
- поступање, сагледавање и описивање развоја елемената раноалгебарског мишљења код особа које уче.

На крају, али не мање важно од претходног, могло би се констатовати да концептуализација домена 'Рана алгебра' и 'раноалгебарско мишљење' подразумијева да учитељу разумију и могу користити бенефите конструктора 'концептуално математичко знање' и 'математичка знања процеса'. Требало би да је намјера учитеља, прихватањем раноалгебарског приступа подучавању аритметичких садржаја својих ученика, да дизајнира дидактички миље у коме се омогућава ученицима да прихватају постојање објеката који настају уопштавањем, генерализацијама и апстраховањем, те да без већих потешкоћа барањају тим објектима. Дакле, прихватањем концепта рана алгебра и подстицањем развоја раноалгебарског мишљења код својих ученика, намјера учитеља би требало да је конструисање когнитивних равни код ученика које подучавају, али и ученичко прихватање владања тим знањима, способностима и вјештинама интегрисаним у тим равнима у којима су смјештени концепти појмова и концепти процеса са тим појмовима који настају само у њиховим умовима.

Литература

- [1] A. Arcavi (1994): "Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 24–35.
- [2] M. Blanton and J. Kaput (2003), "Developing Elementary Teachers 'Algebra Eyes and Ears'", *Teaching Children Mathematics*, 10 (2), 70–77.
- [3] M. Blanton and J. Kaput (2011), "Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades", In: J. Cai and E. Knuth (2011), *Early Algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Springer. (pp. 5–24)
- [4] G. M. Boulton-Lewis, T. Cooper, H. Pillay and L. Wilss (1998), "Arithmetic, pre-algebra, and algebra: a model of transition", In: C. Kanes, M. Goos and E. Warren (eds.), *Teaching Mathematics in New Times*, Proceedings of the Twenty First Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, Gold Coast, Australia, 5–8 July, (pp. 114–120)

- [5] M. Britt and K. Irwin (2011). "Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning". In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, Springer. (pp. 137–159).
- [6] J. Cai and E. Knuth (2011), *Early Algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Springer.
- [7] J. Cai, S. Ng and J. C. Moyer (2011). "Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore". In: J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, Springer. (pp. 25–41)
- [8] T. Carpenter and L. Levi (2000), *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades*, National Centre for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Madison, WI; Internet: <http://www.wisc.wcer.edu/ncisla>.
- [9] T. Carpenter, M. Franke and L. Levi, *Thinking Algebraically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*, Heinemann, Portsmouth, NH, 2003.
- [10] D. W. Carraher, A. D. Schliemann and J. L. Schwartz (2007). "Early algebra is not the same as algebra early". In: J. Kaput, D. Carraher and M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah: Erlbaum. (pp. 235–272).
- [11] T. Carpenter, M. Franke, and L. Levi (2003), *Thinking Algebraically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*, Heinemann, Portsmouth, NH.
- [12] D.W.Carraher, M.V. Martinez and A.D. Schliemann (2008), *Early algebra and mathematical generalization*, ZDM, 40(1), 3–22
- [13] D. Carraher, A. Schliemann, B. Brizuela and D. Earnest (2006), *Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education*, Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87–115.
- [14] D. Carraher, A. Schliemann, and J. Schwartz (2008), "Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early", In: J. Kaput, D. Carraher, and M. Blanton (eds.), *Algebra in the Early Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, Mahwah, NJ.
- [15] T. Cooper and E. Warren (2011). "Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning". In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*, Heidelberg.(pp. 187–214)
- [16] R. B. Davis (1985), *ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades*. Journal of Mathematical Behavior, 4, 195–208.
- [17] B. Domoney and A. Price (2004), "Thinking Algebraically about early numbers", In: A. Noyes (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 24(3), 45–50
- [18] L. D. English and P. V. Sharpy (1996): *Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction*, Educational Studies in Mathematics, 30, 135–157.
- [19] T. Fujii and M. Stephens (2001). "Fostering understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables". In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra*, Melbourne, Australia: University of Melbourne. (Vol. 1, pp. 258–264).
- [20] K. Irwin and M. Britt. (2005). *The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project*. Educational Studies in Mathematics 58(2), 169–188.
- [21] V. Jacobs, M. Franke, T. Carpenter, L. Levi, and D. Battey (2007), *Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School*, Journal for Research in Mathematics Education, 38(3), 258–288.

- [22] D. H. Johnassen, K. Beissner and M. Yacci (1993), *Structural Knowledge: techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- [23] J. Kaput (1993), "Teaching and Learning a New Algebra", In: E. Fennema and T. Romberg (eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.
- [24] J. Kaput (1998), "Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by Algebrafying the K-12 Curriculum", In: *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium*, Washington, DC.
- [25] J. Kaput (2008), "What is Algebra? What is Algebraic Reasoning?" In: J. Kaput, D. Carraher, and M. Blanton (eds.), *Algebra in the Early Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, Mahwah, NJ.
- [26] J. Kaput and M. Blanton (2001), "Algebrafying the Elementary Mathematics Experience", In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, and J. Vincent (eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Vol. 1, 344-351.
- [27] J. Kaput, D.W. Carraher, and M.L. Blanton (2008), "Skeptics's Guide to Algebra in the Early Grades", In: J. Kaput, J. D. Carraher, and M. Blanton (eds.), *Algebra in the Early Grades*, Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, Mahwah, NJ.
- [28] J. J. Kaput, D. W. Carraher and M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades*, Lawrence Erlbaum Associates / National Council of Teachers of Mathematics, 2008.
- [29] C. Kieran (2004), *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?* The Mathematics Educator, 8(1), 139-151
- [30] C. Kieran (2011): "Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching". In: J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Springer(pp. 579-593)
- [31] S. Kriegler (1997, 2006), *Just what is algebraic thinking?*
Интернет (31.12.2013.) http://mathandteaching.org/uploads/Articles_PDF/articles-01-kriegler.pdf
- [32] R. Lins and J. Kaput (2004). "The early development of algebraic reasoning: The current state of the field". In: K. Stacey, H. Chick and M. Kendal (Eds.), *The Future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study*, Boston, U.S.A: Kluwer Academic Publishers, (pp.47-70).
- [33] D. Livneh and L. Linchevski (2007): "Algebraification of Arithmetic: Developing algebraic structure sense in the context of Arithmetic", In: Woo, J. H., Lew, H. C. Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Seoul (Vol. 3, pp. 217-224).
- [34] J. Mason, M. Stephens and A. Watson (2009). *Appreciating mathematical structure for all*. Mathematics Education Research Journal 21(2), 10-32.
- [35] M. Molina, E. Castro and J. Mason (2008). *Elementary school students' approaches to solving true/false number sentences*. PNA, 2 (2), 75-86.
- [36] M.K. Murray (2010), *Early Algebra and Mathematics Specialists*, The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations, 12 , 73-81
- [37] M. J. Nathan, K. R. Koedinger and H.Tabachnech (1996), *Teachers' and Researchers' Beliefs of Early Algebra Development*, The American Educational Research Association (AERA), annual meeting 1996, (pp. 554-559)

- [38] M. J. Nathan and K. R. Koedinger (2000), *Teachers' and Researchers' Beliefs About the Development of Algebraic Reasoning*, Journal for Research in Mathematics Education, 31(2), 168–190
- [39] S. J. Norton and T. J. Cooper (int.), *Do our students really have the arithmetic knowledge to start algebra? Analysing misconceptions*. Доступно на Интернету (Увид направљен 29.12.2013.):
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.41.6162&rep=rep1&type=pdf>
- [40] L. Radford (2011), “Embodiment, perception and symbols in the development of Early Algebraic thinking”, In: B. Ubuz (Eds.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Ankara, Turkey: PME. (Vol. 4, pp. 17–24)
- [41] L. Radford (2012), *On the development of early algebraic thinking*. PNA, 6(4), 117–133.
- [42] L. Radford (2014 – in press): “Early algebraic thinking epistemological, semiotic and developmental issues”, In: *Proceeding of the 12th International Congress on Mathematical Education*, COEX, Seoul, Korea.
Доступно на Интернету на адреси: http://www.icme12.org/upload/submission/1942_F.pdf
- [43] B. Rittle-Johnson and M. Schneider (2014 – у штампи): „Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics”, To appear in: R. Cohen Kadosh and A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*, Oxford University Press.
- [44] Д. А. Романо (2009): *Шта је алгебарско мишљење?* МАТ-КОЛ (Бања Лука), XV(2), 19–29
- [45] D. Schifter, V. Bastable, S. J. Russell, L. Seyforth, and M. Riddle (2008), “Algebra in the K-5 Classroom: Learning Opportunities for Students and Teachers”, In: C. E. Greene and R. Rubenstein (eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- [46] D. Schifter(2009), “Representation-Based Proof in the Elementary Grades”. In D. A. Stylianou, M. Blanton and E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 Perspective*. Oxford: Routledge – Taylor Francis and National Council of Teachers of Mathematics.
- [47] D. Schifter, S.J. Russell, and V. Bastable (2009), *Early Algebra to Reach the Range of Learners*, Teaching Children Mathematics, 16(4), 230–237.
- [48] M. Schneider and E. Stern (2005): “Conceptual and Procedural Knowledge of a Mathematics Problem: Their Measurement and Their Causal Interrelations”, In: B. G. Bara, L. Barsalov and M. Buccuiarelli (Eds.) *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, July 21–27, Stresa, Italy, (pp. 1955–1960)
- [49] A. Sfard (1991): *On the Dual Nature of Mathematical Concepts: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22(1), 191–228.
- [50] E. Smith (2008). “Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum”. In: J. Kaput, D. Carraher and M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Lawrence Erlbaum Associates/Taylor Francis Group, Mahwah, NJ.
- [51] B. Sriraman and K-H. Lee (2011), “Commentary on the Cognitive aspects of Early Algebraization”, In: J. Cai and E. Knuth (Eds). *Early Algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, Advances in Mathematics Education, Vol. 2, Springer, Berlin – Heidelberg.

- [52] С. Стевановић, С. Црвенковић и Д. А. Романо (2014 – у штампи): “Један примјер анализе аритметичког и раноалгебарског мишљења”: *Иновације у настави*, Београд, 1–18 стр.
- [53] M. Stephens and X. Wang (2008). *Investigating Some Junctures in Relational Thinking: A study of Year 6 and Year 7 Students from Australia and China*. Journal of Mathematics Education, 1(1), 28–39.
- [54] E. Warren and T. Cooper (2005), *Introducing Functional Thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching*, Contemporary Issues in Early Childhood, 6 (2), 150–162
- [A] *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 2000.
- [B] *Algebra: What, When, and for Whom: A Position Paper of the National Council of Teachers of Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 2008; Internet: <http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=16229>.
- [B] A. Arcavi, L. Bazzini, C. Sackur and P. Tsamir (Eds.) (2003), *Algebraic Thinking*, CERME III, WG 6
- [Г] J.-P. Drouhard, M. Panizza, L. Puig and L. Radford (Eds.) (2005), *Algebraic Thinking*, CERME IV, WG 6
- [Д] L. Puig, J. Ainley, A. Arcavi, G. Bagni (Eds.) (2007), *Algebraic Thinking*, CERME V, WG 6. (pp. 811–953)
- [E] J. Ainley, L. Hefendehl-Hebekerr, J.-B. Lagrange and G. T. Bagni (Eds.) (2009), *Algebraic Thinking*, CERME VI, WG 4

Early algebra and early algebraic reasoning

Summary. In this text we have intention to give our contribution to conceptualize domains Early Algebra and Early Algebraic thinking making connections of these notions with theoretical constructs ‘Mathematics knowledge of concepts and processes’. These terms – Early Algebra and Early algebraic thinking - (and notions covered by these terms) are described based on our own research and readings from the body of literature focused on Early Algebra and Early Algebraic reasoning. In this article we offer some reasons to be motive to academic societies of researchers of mathematics education, mathematicians and teachers in our area to focus on Early Algebraic approach of elementary school Arithmetics.

Key words and phrases: Arithmetics and Early Algebraic thinking, mathematics knowledge of concepts and processes

Árpád Fekete

Department of Mathematics and Informatics, Eötvös József College,
Baja, Hungary
fekete.arpad@ejf.hu

TECHNIQUES FOR TEACHING PROBABILITY TO ELEMENTARY STUDENTS

Summary. Probability is the branch of mathematics that describes randomness. The development of students' mathematical reasoning through the study of probability is essential in daily life. The inclusion of activities dealing with experimental probability in the elementary school enhances children's problem-solving skills and provides challenges for children in a mathematics program. Making experiments is a helpful tool because they allow children to visualize and experience probability in understandable and memorable ways. We give some techniques for teachers how to introduce kids to the theory of probability.

Key words: experimental probability, probability activities, probability games, understanding of randomness

Introduction – The importance of teaching probability in the elementary classroom

We live in an information society. We are confronted with quantitative information at all levels of endeavour. Charts, graphs, rates, percentages, averages, forecasts, and trend lines are an inescapable part of our everyday lives. We are confronted with arguments that demand logical, scientific reasoning, even if we are not trained scientists. We must be able to make our way successfully through a maze of reported “facts” in order to separate credible conclusions from specious ones. Milton (1975) suggested the following reasons for introducing probability as early as the primary level:

- The basic role which probability theory plays in modern society both in the daily lives of the public at large, and the professional activities of groups within the society, e.g. in the sciences (natural and social), medicine and technology.

- Probability theory calls upon many mathematical ideas and skills developed in other areas of school course, e.g. set, mapping, number, counting, and graphs.
- Students are able to work in a branch of mathematics, which is relevant to current activities in life. (p. 169)

The committee for the *Goal for School Mathematics*, the report of the 1963 Cambridge Conference, recommended introducing basic ideas of probability very early in the school program. The study of probability allows a learner to make sense of experiences involving chance. If students are to understand probability at a deeper level in high school and college, then the skills necessary for its mastery must begin in the elementary grades (NCTM, 2000), as early in the school year as possible. The kind of reasoning used in probability is not always intuitive, and so it may not be developed in young children if it is not included in the curriculum (NCTM, 2000). Recommendations concerning school curricula suggest that statistics and probability be studied as early as elementary school (MSEB, 1990; NCTM, 2000). The learning of probability in early grades will provide students with a stronger foundation for further study of statistics and probability in high school. Many middle and high school students have difficulty understanding how to report a probability. Inadequacies in prerequisite mathematics skills and abstract reasoning are part of the problem (Garfield & Ahlgren, 1988). These difficulties may be due to little or no curriculum instruction for probability given at the elementary school level. The challenge is to relate to children and engage them in learning experiences in which they construct their own understanding of probability concepts. There are a number of games and activities that teachers can incorporate into their lesson plans to help explain the theory of probability and statistics to pupils in a creative and interactive way.

Experimental probability in the elementary school

Experience with probability can contribute to students' conceptual knowledge of working with data and chance. This experience involves two types of probability-theoretical and experimental.

Experimental probability refers to the probability of an event occurring when an experiment was conducted. In such a case, the probability of an event is being determined through an actual experiment. Mathematically,

$$\text{Experimental probability} = \frac{\text{Number of event occurrences}}{\text{Total number of trials}}.$$

For example, if a dice is rolled 6000 times and the number '5' occurs 990 times, then the experimental probability that '5' shows up on the dice is $990/6000 = 0.165$.

On the other hand, theoretical probability is determined by noting all the possible outcomes theoretically, and determining how likely the given outcome is. Mathematically,

$$\text{Theoretical probability} = \frac{\text{Number of favorable outcomes}}{\text{Total number of outcomes}}.$$

For example, the theoretical probability that the number '5' shows up on a dice when rolled is $1/6 = 0.167$. This is because of the 6 possible outcomes (dice showing '1', '2', '3', '4', '5', '6'), only 1 outcome (dice showing '5') is favourable. As the number of trials keeps increasing, the experimental probability tends towards the theoretical probability. To see this, the number of trials should be sufficiently large in number. (The Law of Large Numbers)

Experimental probability is frequently used in research and experiments of social sciences, behavioural sciences, economics and medicine. In cases where the theoretical probability cannot be calculated, we need to rely on experimental probability.

Current and past recommendations for the mathematics curriculum identify experimental probability as one of several critical basic skill areas that should occupy a more prominent place in the school curricula than in the past (Mathematical Sciences Education Board [MSEB], 1990; NCTM, 2000). Probability activities push children to devise ways to deal with uncertainty and provide opportunities for them to formulate and test ideas. In addition, experiments in probability provide contexts in which students apply the arithmetic they are learning.

Teaching probability games or activities – Dice sums

This activity [10] focuses children's attention on investigating the probabilities of the sums that come up when two dice are tossed.

- Students play with a partner.
- Partners will need 11 counters and a 2-to-12 number line.
- The students arrange their counters on their number line. They can do this in any way they wish: one counter per number, all counters stacked on one number, or counters grouped in any way they would like.
- Once all teams have placed their counters on the number line, the teacher rolls the dice and calls out the sum of the dice.
- If they have a counter on that number, they remove it. For example: If the teacher rolls an 8 and they have a counter on 8, they remove the counter from the number line. If they have more than one counter on 8, they only remove one counter per roll.

- The idea is to be the first team to remove all their counters. The teacher encourages students to talk with their partner about how they would like to arrange their counters to be the first team to have them all removed.
- Students are not allowed to re-arrange their counters once the game begins.
- As the game is played, the teacher asks students what numbers they are waiting to be rolled. Discussion should take place during the game about numbers that were “good” ones and numbers that did not come up as quickly.
- The teacher can discuss which sums seem to be coming up more often than others and he asks winners to report their winning arrangement.
- The teacher hands out additional number lines and two dice to each pair of students so they can play the game with each other. The teacher encourages them to discuss their arrangements to see what they can learn.

Possible discussion questions:

- Which number comes up most often? Why do you think this is so?

The teacher have to lead students to discuss how many ways there are to arrive at each sum. For example: There is only one way to get 12: a six and a six. There are several ways to get 7: a three and a four, a five and a two, a six and a one, etc.

The teacher asks students to think about how they would now arrange the counters to try to win the game. The teacher leaves materials out for as long as there is interest in the game. This will give students a chance to solidify their strategies for winning the game; hopefully understanding that some numbers come up more often than others for very good reasons.

In connection with dice sums the teacher can motivate children with a short part of history of probability. First dice game mentioned in literature of the Christian era was called Hazard. Played with 2 or 3 dice. Dante mentions this game. A commentator of Dante puts further thought into this game: the thought was that with 3 dice, the lowest number you can get is 3, an ace (one) for every die. Achieving a 4 can be done with 3 die by having a two on one die and aces on the other two dice. Cardano also thought about the throwing of three die. 3 dice are thrown: there are the same number of ways to throw a 9 as there are a 10. For a 9: (621) (531) (522) (441) (432) (333) and for 10: (631) (622) (541) (532) (442) (433). From this, Cardano found that the probability of throwing a 9 is less than that of throwing a 10. In addition, Galileo wrote about die-throwing sometime between 1613 and 1623 (Hald, 1990). Essentially thought about Cardano's problem, about the probability of throwing a 9 is less than throwing a 10. Galileo had the following to say: Certain numbers have the ability to be thrown because there are more ways to create that number. Although 9 and 10 have the same number of ways to be created, 10 is considered by dice players to be more common than 9.

One-Die Game – Game of Pig

Students need many experiences tossing one die, collecting data and analyzing that data to construct meaning for the probability of the different outcomes. Since a small student sample is often skewed, it is necessary for teachers to help students collate class data to better approximate the theoretical probability that the outcomes of tossing a single die are equally likely.

In the Game of Pig [11] students collect points for each toss of the die unless a ONE is tossed, which means they lose all of the points they have collected in the round. To prevent losing their points, students may elect to stop at any point in the game before a ONE is tossed and they get to keep the points they collected but get no further points. Students love the game and begin to appreciate that theoretical probability and experimental probability are often quite different. Directions:

- The teacher needs one die.
- Toss the die and announce the results.
- Students write down that number.
- Toss the die and announce the results.
- Students write down that number and add it to the previous number.
- Toss the die and announce the results.
- Students write down that number and add it to the previous total.
- Continue playing and accumulating points.
- Players may continue to accumulate points until a one is tossed. When a one is tossed, every student still playing loses all of his/her points for that round.
- A player may decide to stop at any point before the die is thrown again. He/she puts down his/her pencil and stands quietly at the desk. Once standing, the student may not collect any more points. He/she gets to keep all of the points earned before standing. Play continues until a one is thrown, or until all students are standing.
- A game is three rounds. Highest point total wins the game.

The game of Pig is simple to describe, but is it simple to play well? More specifically, how can we play the game optimally? Knizia (1999) describes simple tactics where each roll is viewed as a bet that a 1 will not be rolled: „... we know that the true odds of such a bet are 1 to 5. If you ask yourself how much you should risk, you need to know how much there is to gain. A successful throw produces one of the numbers 2, 3, 4, 5, and 6. On average, you will gain four points. If you put 20 points at stake this brings the odds to 4 to 20, that is 1 to 5, and makes a fair game. ...Whenever your accumulated points are less than 20, you should continue throwing, because the odds are in your favor.”

Heads & Tails Game

This activity [12] provides pupils a possibility to realize that the probability of throwing a heads or tails is equally likely. A coin is a great tool for introducing the idea of probability, since young students are familiar with the concept of heads or tails and many have observed coin flips at the beginning of athletic events. Discuss the likelihood of either side landing face-up as $1/2$ or 50 percent.

One student is heads and one student is tails. Students start their markers on the star in the middle of the snake. If the coin lands on heads, the heads person moves his/her marker one space toward the head of snake. If the coin lands on tails, the tails person moves his/her marker one space toward the tail of the snake. The first person to reach the head or tail of the snake wins the game. Students should enter the winner on the class tally chart as a data collection exercise. Class discussion should focus on analyzing the data to determine if the game is fair or not.



Figure 1. Gameboard

In connection with this game students can calculate the number of heads if we toss a coin several times. We tell a method to help students in this calculation.

When we toss a coin, there are two possible outcomes. It can be a head or a tail, which are both equally likely. (We demonstrated it in the previous game.) Say that you are going to toss three coins, and you want to work out the probability of only one head (and so two tails). The possible outcomes are: TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH. All these outcomes are different, and they are all equally likely. There are 8 of them. There are 3 tosses with only one head: TTH, THT, HTT. So the probability is $3/8$.

The counting method works, and is very good for getting the right answer with a small number of coins. However, for larger numbers, we need a more mathematical approach. We know that the probability will be a fraction, and we know that the denominator is 2^n for n coins. The problem is working out the numerator. We don't want to count all the cases where it happens. What we can do is start with one coin, then add a coin at a time, and see what difference it makes to the probability. This starts to build up a pattern.

The probabilities for throwing a single coin are obvious:

	if coin is a head	if coin is a tail	total of these
chance of 1 head	1	0	1
chance of no heads	0	1	1

Figure 2. The chances with one coin

Now we add a coin. It will either be a head or a tail. We consider the probabilities separately. If it's a head, then the result for both coins will be either 2 heads or 1 head. If it's a tail, then the result will be either 2 tails (and so no heads) or 1 tail (and so 1 head). We can write down these probabilities, and get the final probability by adding them.

	if new coin is a head	if new coin is a tail	total of these
chance of 2 heads	1	0	1
chance of 1 head	1	1	2
chance of no heads	0	1	1

Figure 3. The chances with two coins

We add a third coin. The logic is the same, except we have more cases to consider. But you can see that we're just copying the probabilities from the previous case.

	if new coin is a head	if new coin is a tail	total of these
chance of 3 heads	1	0	1
chance of 2 heads	2	1	3
chance of 1 head	1	2	3
chance of no heads	0	1	1

Figure 4. The chances with three coins

We add a fourth coin.

	if new coin is a head	if new coin is a tail	total of these
chance of 4 heads	1	0	1
chance of 3 heads	3	1	4
chance of 2 heads	3	3	6
chance of 1 head	1	3	4
chance of no heads	0	1	1

Figure 5. The chances with four coins

The pattern that emerges from this example is something called Pascal's triangle. Every line is made by adding the two numbers in the line above. You assume that there are zeros at the start and end of each line, and you start with a one in the top row. Pascal's triangle crops up a lot in probability. In particular, take the n^{th} row of Pascal's triangle, and the m^{th} number in it, and you have the numerator of the probability of finding m heads when tossing n coins.

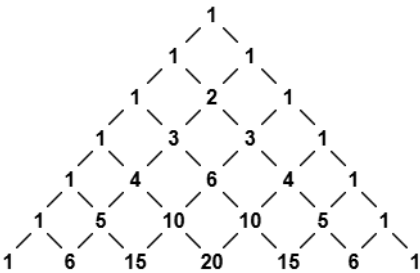


Figure 6. The Pascal's triangle

Adjustable Spinner

Adjustable Spinner [3] is an activity that allows pupils to measure probability according to the number of times a pointer is spun and how often it stops on the different sectors of a spinner. The teacher asks his/her pupils to adjust the number and the size of the sections on the spinner to vary the probability outcomes. The probability results will be reflected in a table that measures both experimental and theoretical probabilities so students can compare the results of each setting after they spin.

Materials of the game: spinners, game board, counters (for game pieces), paper clips, paper, pencils.



Figure 7. Accessories.

Procedures:

- Put the students in groups of four. One player will spin the paper clip on the spinner while the other three players move their individual game pieces based on the outcome of each spin. Students should use the paper clip as an arrow. (Figure 8.)
- Each student should choose a game piece before spinners are passed out.
- Give the students spinner to play the first round.
- Each player gets to move when the paper clip points to his/her color on the spinner.
- Have students discuss why the spinner causes this game to be unfair.
- Have students design a new spinner that is fair.
- Play the game again with the new spinner.
- As a class, discuss exactly what makes a spinner fair or unfair. Also discuss different ways to make fair spinners.

The teacher can ask students to design spinners that are more complicated but still remain fair (include several spaces, mix the colors, etc.) and can collect class data for which color won the first game.

This activity allows students to explore experimental and theoretical probabilities by changing the area of the colored regions of the circle. When a section is added it reduces the other sections by an equal amount in order to add the new sector. When this occurs, the probability that that particular color will be landed on will change.

Theoretical probability is the probability based on the size of the sector compared to the whole circle. So if there are two equal size sectors one would expect it to land on one of the sectors one out of two spins. The experimental probability is the actual outcome after running an experiment a given number of trials.

Conclusions and remarks

Randomness and uncertainty play an important part in scientific thinking as well, since many physical processes, such as the movement of subatomic particles are random, and need to be analysed in terms of probability.

Another good reason for people to be able to think rationally about randomness and uncertainty is that randomisation plays an important part in ensuring fairness in their every daily lives. Playing cards are shuffled and people are selected by lot to ensure that no one is given an unfair start.

Piaget and Inhelder (1975) were the first to study children's understanding of randomness. In a classic experiment they progressively randomised the position of marbles of two different colours, which were initially grouped by colour at one end

of a tray, by tilting the tray and letting the marbles roll to the other side, and then by tilting it back and forth repeatedly. Young children could not predict the consequent jumbling of the two colours. However, this context was probably strange to the children, and the study needs to be done again with forms of randomisation, like shuffling cards, that are more familiar to children.

A research using computer microworlds has shown that by the age of about ten many children realise that there is an association between randomness and fairness, and that randomisation can be an effective way of ensuring fair allocations (Pratt and Noss, 2002). This association could be used to teach children more about the nature of randomness.

Research on children's understanding of probability has produced many interesting and educationally valuable conclusions, such as children's understanding of randomness in the context of fairness and the difficulties they have in reasoning proportionally in the context of probability. However, some aspects of children's reasoning about probability have been relatively neglected, such as the cognitive basis for constructing the problem space and the relative effectiveness of presenting and calculating proportions as ratios or as fractions. Another serious gap in research on children's ideas about probability is in longitudinal research, which is needed to establish how well children's early understanding and insights predict their overall learning later on, and also how complete their understanding of probability is by the time they leave school.

References

- [1] Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- [2] Hald, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and their Application before 1750*. New York (Wiley)
- [3] Kimberley, R. (2007). *Are You Game? Explorations in Probability*. New York: The Actuarial Foundation. <http://www.actuarialfoundation.org/pdf/Math-Academy-Are-You-Game.pdf>
- [4] Knizia, R. (1999). *Dice Games Properly Explained*. U. K. : Elliot Right-Way Books
- [5] Mathematical Sciences Education Board. (1990). *Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum*. Washington, DC: National Academy Press.
- [6] Milton, K. C. (1975). Probability in the primary school. *Australian Mathematics Teacher*, 31(5), 169-178.
- [7] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- [8] Piaget, J. and Inhelder, B. (1975) *The Origin of the Idea of Chance in Children*. London: Routledge and Kegan Paul.
- [9] Pratt, D. and Noss, R. (2002) The microevolution of mathematical knowledge: The case of randomness. *Journal of the Learning Sciences*, 11 (4), 453-488.
- [10] [http://driscoll.brookline.k12.ma.us/sites/g/files/g463122/f/Twodice sum.pdf](http://driscoll.brookline.k12.ma.us/sites/g/files/g463122/f/Twodice%20sum.pdf)

[11] <http://users.humboldt.edu/rizzardi/Handouts.dir/pig.doc>

[12] <http://www.mathwire.com/games/headsandtails.pdf>

Технике настави вероватноће у основној школи

Резиме: Вероватноћа је грана математике која се бави анализом случајних догађаја. Развијање математичког размишљања код ученика кроз учење о вероватноћи кључно је за свакодневни живот. Увођење активности из области експерименталне вероватноће у основној школи код деце подстиче вештину решавања проблема и нуди им изазове у настави математике. Огледи представљају корисно средство зато што омогућавају деци да визуелизују и искусе вероватноћу на разумљив начин који је лак за памћење. У овом раду нудимо неке технике којима наставници могу да представе деци теорију вероватноће.

Кључне речи: експериментална вероватноћа, активности у вези са вероватноћом, игре вероватноће, разумевање случајности.

Сања М. Маричић

Ненад Милинковић

Универзитет у Крагујевцу, Учитељски факултет у Ужицу

sanjamaricic10@gmail.com

ДИФЕРЕНЦИРАНА НАСТАВА И УЧЕНИЦИ ПОТЕНЦИЈАЛНО ДАРОВИТИ ЗА МАТЕМАТИКУ¹

Апстракт: Данас је све израженија потреба да се у васпитно-образовном раду посебна пажња посвети раду са потенцијално даровитим ученицима, односно обезбеде услови у настави који ће бити прилагођени њиховим могућностима и потребама. У том контексту аутори у раду разматрају улогу и значај диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику. Из тог разлога, на узорку од 180 учитеља из Србије, организовали су истраживање с циљем да испитају мишљења учитеља о заступљености диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику, идентификују неке од проблема који прате организацију ове наставе, као и мере које би требало предузети како би ова настава била више заступљена у раду са овом категоријом ученика. Добијени резултати показују да се у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику, по мишљењу учитеља, најбољи ефекти постижу у оквиру индивидуализоване и проблемске, а затим диференциране наставе, коју учитељи *повремено* примењују у раду. Као највеће проблеме у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику учитељи издвајају *преобиман наставни програм и превелик број ученика у одељењу*, а од мера које треба да допринесу побољшању рада на овом плану *израду приручника и уједињавање и смањење броја ученика у одељењу*.

Кључне речи: ученици даровити за математику, диференцирана настава, учитељ, почетна настава математике.

Увод

Још у Старој Грчкој посебно је истицан значај људи који имају изнадпросечне способности и схватан је њихов значај за средину у којој живе, али и за свој народ. Данас, даровити представљају највеће богатство сваког друштва,

¹ Рад је настао у оквиру пројекта *Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе*, бр. 179026, чији је носилац Учитељски факултет у Ужицу, а који финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

односно „капитал и ресурс кога ниједно друштво не сме да се одрекне уколико жели да опстане у све суровијој конкуренцији у свим сферама људског живота“ (Маричић, Шпијуновић 2013: 222).

Интензивније интересовање за ученике даровите за математику, у нашој земљи, започето је још у другој половини прошлог века, када се оснивају регионални центри за таленте. Међутим, улога школе у овом процесу и даље је магловита и нејасно дефинисана. Већина захтева на овом плану само је декларативна, па је потребно да се садашње и будуће реформе школе и образовања крећу у правцу наглашавања значаја рада са даровитим ученицима (Шпијуновић 2009).

Проблеми на плану организовања рада и стварања услова за образовање делимично су последица бројних недоумица које постоје на теоријском плану. Као прво, не постоје јединствени критеријуми за идентификацију ученика даровитих за математику (Maričić et al. 2012). Тако имамо ситуацију да се у неким источним земљама сва деца сматрају потенцијално даровитом, а на западу да само нека спадају у ту групу. Осим тога, још увек постоје различита мишљења о томе у ком тренутку треба почети организован рад са њима, да ли је са њима довољно радити само на часовима редовне наставе, колико су математички клубови, секције, слободне активности, квизови, смотре, такмичења, олимпијаде, додатна настава, акцелерација, издвајање у посебна одељења, отварање посебних школа и слично ефикасни облици рада, на који начин пратити њихов развој, како их мотивисати, које видове подршке обезбедити од стране друштва и тако даље (Шпијуновић и сар. 2013).

Нажалост, не постоји ни јасна стратегија рада са ученицима даровитим за математику. Стратегије рада са даровитом децом у свету „крећу се од непостојања програма за надарену децу у Јапану и Скандинавским земљама, преко селективног одабира, какав је случај, рецимо, у САД, до масовног допуштања деци да одаберу сама себе за бројне курсеве за талентовану децу у Кини“ (Дејџић, Ћебић 2011: 143). У теорији и пракси рада са даровитима најчешће се нуде три основна начина рада са даровитим ученицима: сегрегација, акцелерација и обогаћивање (Максић 1996). Ако имамо на уму Платонов став да „смер образовања којим крене човек у младости одређује његову будућност“ онда немамо времена за губљење већ са почетком школовања морамо обезбедити образовање које ће бити у складу са његовим способностима и у коме ће он моћи максимално да испољи и развије своје потенцијале.

Ситуацију на плану обезбеђивања адекватних услова за образовање ученика потенцијално даровитих за математику отежава и чињеница, коју све више аутора истиче, да се у току основног образовања учитеља недовољно пажње поклања оспособљавању студената за рад са ученицима потенцијално

даровитим за математику (Грандић, Летић 2009; Мацура Миловановић и сар. 2011; Шпијуновић 2008; Špijunović, Maričić 2013).

Пред учитеља се поставља питање како организовати наставу математике да омогући сваком ученику, а тиме и потенцијално даровитом, да се потпуно развија према својим могућностима. Кроз историју образовања појављивали су се различите врсте, стратегије наставе, модели организације и идејна решења у тежњи да се створе услови у којима би се настава што више приближила потребама, интересовањима, могућностима и способностима ученика. У овом раду ми посебну пажњу скрећемо на диференцирану наставу математике, као једну од врста наставе и разматрамо је у контексту рада са ученицима потенцијално даровитим за математику.

Суштина диференциране наставе почива на принципу уважавања разлика између ученика и организовања наставе која прати ученичке способности и интересовања, а њен основни циљ је напредовање ученика према својим способностима. Диференцијација по мишљењу Д. Џорџа је „процес којим се циљеви наставног плана и програма, наставне методе, методе оцењивања, средства и активности учења планирају како би се задовољиле потребе ученика појединачно“ (George 2003: 106). Тако се „диференцирање може поставити као однос између поларитета нивелирајуће фронталне наставе и индивидуалне слободе, при чему се увек јавља однос: заједничко образовање – индивидуални развој, који, такође, показује границе диференцирања“ (Ђорђевић 1979: 263). Да би диференцирање у настави математике имало свој прави смисао, потребно је обезбедити везу између градива, која су обавезна за све ученике и градива које задовољава индивидуалне потребе сваког ученика понаособ.

Можемо издвојити бројне методичке вредности диференциране наставе које долазе до изражаја у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику. По мишљењу Ј. Ђорђевића (1981) у оваквој настави постављају се реалистичнији циљеви, настава се прилагођава потребама и могућностима ученика, ученици раде сопственим темпом, добијају непосредно одговор и помоћ, активније учествују у настави и учењу, више долази до изражаја њихова иницијатива и стваралаштво, потреба за такмичењем са самим собом, упознају своје могућности и границе. Осим тога, у овој врсти наставе ученик је принуђен да трага за информацијама, улаже максималне напоре да би дошао до одређених сазнања, мотивисан је за рад и не постоји празан ход у току наставног часа, упућен је на сарадњу са наставником, једном речју стављен је у нов положај у процесу наставе – положај самосталности у раду, али и одговорног односа према раду (Треšњак 1989).

Због наведених, али и бројних других методичких вредности, сматрамо да се диференцирањем наставе у оквиру редовне наставе математике могу створити услови који би обезбедили адекватнији третман ученика потенцијално

даровитих за математику. Из тих разлога смо се одлучили да истражимо у којој мери је диференцирана настава заступљена у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику, да идентификујемо неке од проблема који прате организацију ове наставе и утврдимо потребе учитеља на плану унапређивања рада у процесу планирања и организовања ове врсте наставе.

Методологија истраживања

Истраживање је реализовано на узорку од 180 учитеља који су школске 2012/2013. године радили у основним школама на територији Републике Србије. У истраживању су учествовали учитељи различитог радног искуства и различитог образовања. Међу њима 30 или 16.7% имало је мање од 12 година радног искуства у настави, 55 или 30.5% имало је више од 25 година рада у настави, док је највећи број учитеља (95 или 52.8%) имао између 13 и 25 година радног искуства. Три четвртине учитеља из узорка (75.6%) имало је високо образовање, док је 24.4% њих имало завршену вишу школу. Видимо да су у узорку преовладавали учитељи са академским образовањем и искусни учитељи у погледу радног стажа што је релевантно за истраживање.

У истраживању смо користили дескриптивну методу. Подаци за истраживање прикупљени су анкетирањем за чију сврху је конструисан анкетни упитник затвореног типа. Анкетни упитник је садржавао питања на која су учитељи одговарали заокруживањем понуђеног одговора или рангирањем наведених елемената по важности. Истраживање је било анонимно како би се осигурала искреност испитаника.

Зависну варијаблу представљала су мишљења учитеља о заступљености диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику и њихови ставови о неким проблемима који прате тај рад.

Као независне варијабле операционализовали смо следећа обележја учитеља: године рада у настави (до 12, од 13 до 24, више од 25 година) и стручна спрема (виша, висока).

Добијене податке смо обрадили у статистичком софтверском пакету IBM SPSS Statistics 20. Од мера дескриптивне статистике коришћене су фреквенције, проценти, аритметичка средина и стандардна девијација. За статистичко закључивање коришћен је хи квадрат тест и F тест.

Резултати истраживања

Заступљеност диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику

Првим истраживачким задатком желели смо да утврдимо заступљеност диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику. Учитељи су требали да се изјасне колико често у настави математике организују диференцирану наставу и на тај начин стварају услове за рад са ученицима потенцијално даровитим за математику. Понудили смо им три става: *често*, *понекад* и *никада*. Добијени резултати показују да највећи број анкетираних учитеља (82.8%) у настави математике *повремено* организује диференцирану наставу, док само 17.2% *често*. Нико од испитаника није се изјаснио да *никада* не користи диференцирану наставу у раду са потенцијално даровитим ученицима за математику (Табела 1).

Анализа мишљења учитеља у зависности од иницијалног образовања показује да су учитељи који *често* у раду користе диференцирану наставу у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику бројнији међу учитељима који имају завршене академске студије (17.6%) у односу на оне који имају ниже образовање (15.9%) (Табела 2). Вредност хи квадрат теста ($\chi^2 = .070$, $df = 1$, $p = .791$) упућује на закључак да међу учитељима различите стручне спреме не постоји статистички значајна разлика у мишљењу о заступљености диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику. То значи да примена диференциране наставе у настави математике у раду са ученицима директно није резултат иницијалног образовања учитеља, већ и други елементи одређују њену заступљеност.

Табела 1. Мишљења учитеља о заступљености диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику у зависности од стручне спреме

Стручна спрема	Често	Повремено	Никада	Укупно	$\chi^2 = .070$ $df = 1$ $p = .791$
Виша	7	37	0	44	
	5.9%	84.1%	0.0%	100%	
Висока	24	104	0	136	
	17.6%	82.4%	0.0%	100%	
Укупно:	31	149	0	180	
	17.2%	82.8%	0.0%	100%	

Анализа мишљења учитеља различитог радног искуства, такође, показује да међу учитељима не постоје статистички значајне разлике у мишљењима ($\chi^2 = .545$, $df = 2$, $p = .761$) (Табела 2).

Табела 2. Ставови учитеља о заступљености диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику у зависности од радног искуства

Радно искуство	Често	Повремено	Никада	Укупно	
До 12 година	4 13.3%	26 86.7%	0 0.0%	30 100%	$\chi^2 = .545$ $df = 2$ $p = .761$
Од 13 до 24 године	18 18.9%	77 81.7%	0 0.0%	95 100%	
Више од 25 година	9 16.4%	46 83.6%	0 0.0%	55 100%	
Укупно:	31 17.2%	149 82.8%	0 0.0%	180 100%	

Добијени резултати упућују на закључак да учитељи *повремено* организују диференцирану наставу у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику и мишљења учитеља о овом питању су уједначена. Можда се неки од разлога због којих учитељи диференцирану наставу у раду у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику повремено користе може пронаћи у чињеници да овај вид наставе није једноставан за припрему, да је знатно сложенији у односу на класичну наставу и да захтева додатно ангажовање учитеља.

Тешкоће које прате организацију диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику

Другим задатком истраживања желели смо да идентификујемо неке од проблема са којима се сусрећу учитељи при организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику. У том циљу смо у анкетном упитнику учитељима понудили елементе који потенцијално могу представљати проблем у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику (*преобиман наставни програм, недовољна мотивисаност ученика, недовољна особљеност учитеља, превелик број ученика у одељењу, преоптерећеност учитеља припремањем оваквог часа, незаинтересованост ученика за овакав вид рада, недостатак наставних и техничких средстава*), а које је требало да рангирају редним бројевима од 1. (највише) до 7. (најмање).

Увидом у Табелу 3 уочавамо да, по мишљењу учитеља, највећи проблем у организацији диференциране наставе математике у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику представља *преобиман наставни програм* ($M=2.80$, ранг I), затим *превелик број ученика у одељењу* ($M=3.03$, ранг II) и *преоптерећеност учитеља припремом оваквог часа* ($M=3.12$, ранг III). Поред тога, учитељи високо рангирају и *недостатак наставних и техничких средстава* ($M=3.72$, ранг IV) и *недовољну мотивисаност ученика* ($M=4.79$, ранг V)

као тешкоће који прате ораганизацију диференциране наставе. *Незаинијересованост ученика за овакав вид рада* (M=4.98, ранг VI) и *недовољна оспособљеност учитеља* (M=5.58, ранг VII), по мишљењу учитеља, представљају најмање проблеме у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику.

Табела 3. Ставови учитеља о тешкоћама у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику.

Тешкоће у организацији диференциране наставе	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7	M	Sd	Ранг
Преобиман наставни програм	66 36.7%	35 9.4%	22 12.2%	18 0.0%	15 8.3%	13 7.2%	11 6.1%	2.80	1.924	I
Недовољна мотивисаност ученика	11 6.1%	17 9.4%	13 7.2%	26 4.4%	33 8.3%	51 28.3%	29 6.1%	4.79	1.778	V
Недовољна оспособљеност учитеља	3 1.7%	8 4.4%	6 3.3%	23 2.8%	39 21.7%	27 15.0%	74 1.1%	5.58*	1.557	VII
Превелик број ученика у одељењу	46 25.6%	29 6.1%	44 4.4%	27 5.0%	11 6.1%	14 7.8%	9 5.0%	3.03	1.759	II
Преоптерећеност учитеља припремом оваког часа	31 17.2%	48 6.7%	39 1.7%	23 2.8%	15 8.3%	17 9.4%	7 3.9%	3.12**	1.700	III
Незаинтересованост ученика за овакав вид рада	11 6.1%	11 6.1%	14 7.8%	20 1.1%	40 2.2%	46 25.6%	38 21.8%	4.98	1.751	VI
Недостатак наставних и техничких средстава	13 7.2%	30 16.7%	42 23.3%	43 23.9%	27 15.0%	12 6.7%	13 7.2%	3.72**	1.597	IV

* статистички значајна разлика у ставовима учитеља на нивоу 0,05 с обзиром на стручну спрему

** статистички значајна разлика у ставовима учитеља на нивоу 0,05 с обзиром на радно искуство

У перцепцији тешкоћа са којима се сусрећу у процесу организовања диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику учитељи се разликују у оцени важности појединих елемената (1.557<Sd<1.924). Највећа разлика евидентирана је у мишљењима учитеља о

рангирању тешкоће *преобиман наставни програм* ($Sd=1.924$) и *недовољна мотивисаност ученика за овакав вид рада* ($Sd=1.778$), док најмање осцилација у одговорима учитеља имамо код става *недовољна оспособљеност учитеља* ($Sd=1.557$) се на листи тешкоћа налази на последњем месту.

Анализа ставова учитеља по независним варијаблама (године радног искуства и стручна спрема) показује да се учитељи статистички битно не разликују у оцени важности проблема *преобиман наставни програм*, *недовољна мотивисаност учитеља*, *превелик број ученика у одељењу*, *незаинтересованост ученика за овакав вид рада*. Статистички значајне разлике јављају се између учитеља различитог иницијалног образовања у оцени проблема *недовољна оспособљеност учитеља* ($F(2, 177)=3.205$, $p=.043$), где учитељи са завршеним академским студијама ($M=5.40$) овај проблем сматрају важнијим у односу на учитеље са завршеном вишом школом ($M=6.14$). То значи да дужина образовања учитеља није пресудна за стицање компетенција на овом плану.

Табела 4. Статистичка значајност разлика у перцепцији тешкоћа приликом организовања диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику у односу на стручну спрему и радно искуство

Проблеми у организацији наставе	Стручна спрема	Искуство
Преобиман наставни програм	$F(1, 178) = .143$ $p = .706$	$F(2, 177) = .750$ $p = .474$
Недовољна мотивисаност учитеља	$F(1, 178) = .005$ $p = .945$	$F(2, 177) = .444$ $p = .642$
Недовољна оспособљеност учитеља	$F(1, 178) = 7.855$ $p = .006$	$F(2, 177) = 1.882$ $p = .155$
Превише ученика у одељењу	$F(1, 178) = 2.343$ $p = .128$	$F(2, 177) = .031$ $p = .969$
Преоптерећеност учитеља коју ствара припрема за овакву врсту наставе	$F(1, 178) = 1.350$ $p = .247$	$F(2, 177) = 3.205$ $p = .043$
Незаинтересованост ученика за овакав вид рада	$F(1, 178) = .50$ $p = .823$	$F(2, 177) = .852$ $p = .428$
Недостатак наставних и техничких средстава	$F(1, 178) = .845$ $p = .359$	$F(2, 177) = 3.869$ $p = .023$

Поред тога, статистички значајне разлике јављају се и између учитеља различитог радног искуства у оцени тешкоће *преоптерећеност учитеља коју ствара припрема за овакву врсту наставе* ($F(2, 177)=.205$; $p=.043$) и *недостатак наставних и техничких средстава* ($F(2,177)=3.869$, $p=.023$). Припрема и организација диференциране наставе представља највећи проблем за учите-

ље који имају више од 25 година ($M=2.65$), а најмањи за учитеље који имају мање од 12 година радног искуства у настави ($M=3.47$). То показује да су млађи учитељи спремнији да организују неку другу врсту наставе у односу на класичну. Са друге стране за учитеље који имају мање од 12 година радног искуства ($M=3.00$) *недостатак наставних и техничких средстава* представља значајнију тешкоћу него за учитеље чије је искуство у раду веће. Овакав резултат директна је последица развоја нових наставних технологија са којима су више упознати млађи учитељи, него учитељи који дуже раде у школи и који су навикнути на традиционална наставна и техничка средства и помагала у раду.

Дакле, према мишљењу учитеља највећи проблем у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику представља *преобиман наставни програм, превелик број ученика у одељењу и преоптерећеност учитеља припремом оваквог часа*, а најмањи *незаинтересованост ученика за овакав вид рада и особљеност учитеља*. Видимо да учитељи, углавном, перципирају тешкоће које су саставни део рада и на које не могу утицати, али и да су свесни шта оваква припрема рада подразумева и колико је сложена.

Потребе учитеља на плану унапређивања рада у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику

Трећим задатком нашег истраживања желели смо да утврдимо које активности треба предузети како би се припрема и организација диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику унапредила. Учитељима смо у анкетном упитнику понудили неке од мера које су директно везане за њихово оспособљавање за организацију диференциране наставе (*дојунска обука учитеља кроз семинаре, скупове и групе; израда приручника и уједињава, ангажовање педагошко-психолошке службе*) и друге, који се односе на услове рада у школи (*смањење броја ученика у одељењу; смањење обавеза учитеља, сужавање наставног програма; израда уџбеника са диференцираним захтевима*). Учитељи су наведене елементе рангирали по важности редним бројевима од 1. (највише) до 7. (најмање).

Најважније мере које, по мишљењу учитеља, треба предузети како би се повећала заступљеност диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику представљају *израда уџбеника са диференцираним захтевима* ($M=2.75$, ранг I), *израда приручника и уједињава* ($M=3.27$, ранг II), *смањење броја ученика у одељењу* ($M=3.43$, ранг III) и *смањење обавеза учитеља* ($M=3.44$, ранг IV) (Табела 5). На последњим местима се налази *сужавање наставног програма* ($M=3.98$, ранг V), *дојунска обука учитеља кроз*

семинаре, скупове и групе ($M= 5.43$, ранг VI) и ангажовање педагошко-психолошке службе ($M=5.74$, ранг VII).

Табела 5. Ставови учитеља о значајности мера које треба предузети за већу заступљеност диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику

Предлози мера за квалитетнију диференцирану наставу мате- матике	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	M	Sd	Ранг
Израда приру- чника и упут- става	36 20.0%	48 26.7%	17 9.4%	25 13.9%	26 14.4%	20 11.1%	8 4.4%	3.27	1.855	II
Израда уџбени- ка са диферен- цира-ним захтевима	59 32.8%	35 19.4%	27 15.0%	31 17.2%	12 6.7%	11 6.1%	5 2.8%	2.75	1.701	I
Смањење броја ученика у одељењу	33 18.3%	36 20.0%	26 14.4%	31 17.2%	27 15.0%	13 7.2%	14 7.8%	3.43	1.852	III
Смањење обавеза учите- ља	19 10.6%	29 16.1%	56 31.1%	29 16.1%	31 17.2%	9 5.0%	7 3.9%	3.44	1.525	IV
Сужавање наставног програма	18 10.0%	18 10.0%	32 17.8%	34 18.9%	48 26.7%	20 11.1%	10 5.6%	3.98	1.644	V
Допунска обука учитеља кроз семинаре...	9 5.0%	5 2.8%	18 10.0%	19 10.6%	14 7.8%	47 26.1%	68 37.8%	5.43	1.778	VI
Ангажовање педагошко- психолошке службе	5 2.8%	8 4.4%	4 2.2%	12 6.7%	22 12.2%	60 33.3%	69 38.3%	5.74*	1.525	VII

* статистички значајна разлика у ставовима учитеља на нивоу 0,05 с обзиром на радно искуство

Ставови учитеља о мерама које су предложене варирају ($1.525 < Sd < 1.855$). Највећа разлика евидентирана је у ставовима учитеља о оцени потребе која се односи на израда приручника и уџбеника ($Sd=1.855$) и смањење броја ученика у одељењу ($Sd=1.852$). Најмање осцилација је у ставовима учитеља код оцене важности мере која се односи на смањење обавеза учитеља ($Sd=1.525$).

Анализа ставова учитеља различитог радног искуства и различите стручне спреме показује да се они статистички значајно разликују само у оцени важности потребе за ангажовањем педагошко-психолошке службе у циљу унапређивања рада у оквиру диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику ($F(2, 177)=5.457$, $p=.005$) (Табела 6). При томе учитељи који имају између 12 до 25 година изражавају већу потребу за сарадњом са педагошко-психолошком службом у организацији диференциране

наставе математике у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику у односу на остале учитеље.

Табела 6. Статистичка значајност перцепције мера које треба предузети за већу заступљеност диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику у односу на стручну спрему и искуство

Мере које треба предузети	Стручна спрема	Искуство
Израда приручника и упутства за овакву организацију рада	$F(1, 178) = .704$ $p = .403$	$F(2, 177) = 1.527$ $p = .220$
Израда уџбеника са диференцираним захтевима за ученике	$F(1, 178) = .000$ $p = 1.000$	$F(2, 177) = 1.303$ $p = .274$
Смањење броја ученика у одељењу	$F(1, 178) = 3.227$ $p = .074$	$F(2, 177) = .963$ $p = .384$
Смањење обавеза учитеља	$F(1, 178) = .093$ $p = .761$	$F(2, 177) = .144$ $p = .866$
Сужавање наставног плана и програма	$F(1, 178) = .707$ $p = .402$	$F(2, 177) = 2.615$ $p = .076$
Допунска обука учитеља кроз семинаре, скупове и друго	$F(1, 178) = .635$ $p = .427$	$F(2, 177) = .202$ $p = .818$
Ангажовање педагошко-психолошке службе	$F(1, 178) = .678$ $p = .411$	$F(2, 177) = 5.457$ $p = .005$

Добијени резултати показују да учитељи највеће потребе на плану унапређивања рада у диференцираној настави у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику имају на плану *израде уџбеника са диференцираним захтевима за ученике, израде приручника и упутства за организацију ове наставе и смањење броја ученика у одељењу*, а да најмање потребе имају на плану сопственог оспособљавања на овом плану.

Закључак

На основу добијених резултата можемо извести следеће закључке:

- Највећи број учитеља *повремено* користи диференцирану наставу у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику;
- *Преобиман наставни програм, превелик број ученика у одељењу и преоптерећеност учитеља припремом* представљају највеће проблеме са којима се учитељи сусрећу у организацији диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику, а најмање *незаинтересованост ученика за овакав вид рада и сопствена оспособљеност учитеља*;
- Најважније мере које треба предузети како би се рад у оквиру диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за

математику унапредио су: *израда уџбеника са диференцираним захтевима и израда љриручника и уџуџсџава за рад*, док је као најмање значајна мера *анџаовање љедаџошко-џсихолошке службе* као облика подршке у организацији оваквог вида наставе.

Видимо да у учитељи на првом месту перципирају тешкоће које су ван њихове надлежности (*џревелик број ученика у одељењу, џребобиман насџавни џроџрам*), а затим оне које су везане за њихов рад (ангажовање у процесу припремања ове врсте наставе), а знатно мање оне које су везане за њихову компетентност, мотивисаност и заинтересованост ученика за рад. У складу са оваквим ставовима је и њихово виђење мера које треба начинити на овом плану. Тако они, пре свега, очекују помоћ у виду доступности *уџбеника са диференцираним захтевима, џриручника и уџуџсџава за рад*, али и смањење административних обавеза и броја ученика у одељењу. Са друге стране увиђамо да за учитеље сопствена оспособљеност не представља потешкоћу, што потврђује и налаз да се у предлогу мера налази на крају те листе.

Ако се узму у обзир резултати који указују да се са ученицима потенцијално даровитим за математику, по мишљењу учитеља, најчешће и најорганизованије ради и оквиру додатне наставе, припреме за такмичења и слободних математичких активности, а најмање у оквиру редовне наставе (Маричић, Шпијуновић 2014: 237), онда морамо чинити све напоре да више афирмишемо диференцирање редовне наставе у подстакнемо учитеље да у оквиру ове наставе више раде са овом категоријом ученика. Неки од налаза овог рада могу се искористити у том циљу, како би се рад учитеља на овом плану унапредио, али и олакшао.

У сваком случају, „рад са ученицима потенцијално даровитим за математику је изузетно сложено и осетљиво питање па није реално очекивати да га било који поједини учитељ реши на одговарајући начин. За то су потребни напори и пажња свих оних који се на било који начин баве овом проблематиком. Без тога појединачни напори неће дати неки озбиљнији резултат“ (Маричић, Шпијуновић 2014: 237). Упркос томе што резултате овог истраживања, због ограниченог узорка, треба примити са одређеном резервом они, ипак, могу бити индикативни и помоћи да се свестраније сагледа стање, идентификују неки од проблема који прате организацију диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим, али и потребе учитеља у циљу унапређивања рада у овој области.

Литература

George, D. (2005). *Образовање даровитих: како идентифицирати и образовати даровите и талантне ученике*, Zagreb: Educa.

- Грандић, Р., Летић, М. (2009). Стање, проблеми и потребе у подручју бриге о даровитим ученицима у нашем образовном систему. у Зборник: *Даровити и друштвена елиита* (323–243). Вршац: Висока школа струковних студија за образовање васпитача „Михаило Павлов“.
- Дејић, М., Ђебић, С. (2011). Стратегије рада са математички даровитом децом у свету и код нас. у Г. Гојков, А. Стојановић (ур.). *Даровити у процесу глобализације* (142–159). Вршац: Висока школа за образовање васпитача „Михаило Павлов“, Арад: Universitatea de Vest „Aurel Vlaicu“.
- Ђорђевић, Ј. (1979). Савремени проблеми диференциране наставе, *Настава и васпитање*, 3, Београд, 261–281.
- Ђорђевић, Ј. (1981). *Настава и учење у савременој школи*, Научна књига, Београд.
- Мaksić, S (1996). Oblici vaspitno-obrazovnog rada sa darovitim učenicima. *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, 28, 279–294.
- Maričić, S., Špijunović, K., Arsović, B. (2012). Teachers' Qualifications For Identifying Students Potentially Gifted For Mathematics, R. Nikolić (ed.). *Current Trends in Educational Science and Practice I*, International proceedings of scientific studies, Nitra, Faculty of education „Constantine the Philosopher“ University in Nitra, Faculty of education „University of Jan Evangelista Purkyně“ in Usti nad Labem“, Teachers training faculty in Užice University of Kragujevac in Kragujevac, 109–118.
- Маричић, С. Шпијуновић К. (2013). Идентификација ученика потенцијално даровитих за математику у млађим разредима основне школе, *Зборник радова*, XVI(15), Ужице: Учитељски факултет, 221–236
- Маричић, С., Шпијуновић, К. (2014). Рад са ученицима потенцијално даровитим за математику у условима инклузивног образовања, у *Наука и глобализација (књига резимеа)*. Пале: Филозофски факултет, 229–239.
- Мацура Миловановић, С., Гера, И., Ковачевић, М. (2011). Припрема будућих учитеља за инклузивно образовање у Србији: тренутно стање и потребе. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 46(2). Београд, 208–222.
- Шпијуновић, К. (2008). Оспособљеност васпитача за идентификацију деце потенцијално даровите за математику. *Зборник радова*, 11 (9), Ужице: Учитељски факултет, 23–32.
- Шпијуновић, К. (2009). Школа и даровити ученици, у: *Будућа школа*, зборник радова са научног скупа (I део). Београд: Српска академија образовања.
- Špijunović, K., Maričić, S. (2013). Učitelj i rad sa učenicima potencijalno darovitim za matematiku u uslovima inkluzivnog obrazovanja. *Pedagogija*, 68(2), 242–256.
- Шпијуновић, К., Кундачина, М., Маричић, С. (2013). Методолошки проблеми проучавања даровитости за математику, у Г. Гојков, А. Стојановић (ур): *Методолошки проблеми истраживања даровитости* (382–388). Вршац: Висока школа струковних студија за образовање васпитача „Михаило Павлов“, Арад: Universitatea de Vest „Aurel Vlaicu“.

Application of Differentiated Instruction in the Education of Students Potentially Gifted for Mathematics

Summary. In contemporary educational work, there is growing need for paying special attention to the education of potentially gifted children, in other words, a need to educational provide conditions that will be adjusted to their abilities and needs. In this context, authors of this paper

analyze the role and significance of differentiated instruction in the education of students potentially gifted for mathematics. For this reason, we organized a research on a sample of 180 teachers from Serbia, in order to examine teachers' opinion on the presence of differentiated instruction in the education of students potentially gifted for mathematics, to identify some of the issues that arise in the organization of this type of teaching, as well as to identify measures that should be taken so this type of teaching would be more present in the education of this category of students. The results obtained show that the best effects in the education of children potentially gifted for mathematics are, in teachers' opinion, achieved within individualized and problem-based instruction, and then differentiated instruction, which is occasionally implemented by teachers. As main problems in organizing differentiated instruction in the education of students potentially gifted for mathematics, teachers underline the curriculum that is too extensive and too large number of students per class, and when it comes to measures that should contribute to the improvement of education in this field, they suggest publishing manuals and instructions on this topic and reducing the number of children per class.

Key words: Students gifted for mathematics, differentiated instruction, elementary mathematics education.

Јасмина Милинковић

Учитељски факултет, Универзитет у Београду

jasmina.milinkovic@uf.bg.ac.rs

МЕТОД ПОСТАВЉАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ПРОБЛЕМА ТРАНСФОРМАЦИЈОМ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ

Апстракт. Рад је посвећен скицирању методичког приступа усмереног на развој компетенција наставника у постављању математичких проблема. Будући учитељи спонтано развијају компетенције у тој области кроз праксу, спремајући се за држање часова. Они при том добијају пре свега практична упутства и савете како да коригују грешке од методичара. Најчешће примедбе, практичног карактера, се односе на лоше одабрани контекст, непрецизност формулације или neodговарајући број информација дат у задатку. Проблему постављања задатака, може се међутим прићи и другачије. У нашем раду приказаћемо методу постављања проблема *трансформацијама* засновану на тек постављеним теоријским основама. Посебну пажњу посветићемо проблемима који су настали трансформацијом репрезентације. Развијање вештине постављања проблема променом репрезентације подстиче наставнике да дубље промишљају о математичким садржајима, посебно о корелацији математичких садржаја са другим предметима. Циљ рада је да осветли област „*постављања проблема*“ која отвара нове хоризонте за изучавања у области методике математике.

Кључне речи: математички проблем, трансформације, репрезентације

Увод

Интуиција говори да је најчешће лакше поставити добар математички проблем него наћи решење тог проблема. Често, али не увек. Интуиција нас у овом случају, као и у многим другим води само делимично исправном закључку. Чињеница је да сваки добар наставник математике уме да састави добар задатак. И да га реши. Чињеница је да добри наставници математике умеју да осмисле и добар проблем. Одлични наставници имају осећај о суптилним разликама у тежини постављеног проблема, сагледавају дубину проблема и прави тренутак за његово постављање ученицима. Колико је њихова вештина постављања проблема плод интуитивних методичких знања, а колико плод пређашњег наставничког искуства? Ако је плод претходног искуства онда није погрешно претпоставити да су њихови задаци реплике већ виђеног. Са друге

стране, темељна методичка припремљеност у области постављања проблема, води систематичном па и комплексније приступу овом аспект наставничке праксе. Познавање методичке теорије пружа основу за квалитетну праксу постављања проблема.

Општа теорија постављања проблема је у скороје време дошла у жижу интересовања методичара наставе математике (Bonotto 2007; Crespo 2003; Lavy. i Shriki, A. 2007, Milinkovic у штампи, 2014; Silver et al. 1996). Неки се истраживачи баве развојем техника постављања проблема док се други оријентишу ка проучавању ефеката бављења активностима постављања проблема или на страни ученика или од стране наставника. Креспо се на пример, бави развијањем програма где се студенти образују и припремају студенте да постављају математичке проблеме. Овај програм резултира развојем способности за постављање проблема који имају више решења, различита решења, више су отворени, а често и когнитивно комплекснији (Crespo 2003). Силвер и његове колеге (1996) се, баве проучавањем способности наставника да стварају проблеме у сложенем контексту.

Ми смо се у овом раду усмерили ка представљању једне методе постављања проблема засноване на трансформацијама репрезентација. На другим местима поставили смо основе оваквог приступа (Милинковић, у штампи, Милинковић 2014). У основи овог приступа је идеја трансформације. Наш приступ је блиско повезан са Килпатриковом (Kilpatrick 1987) идејом о „размишљању по аналогији“ као когнитивном механизму који омогућава стварање нових проблема на основу старих као и Силверовом идејом о преформулисању проблема као техници за долажење до нових проблема (Silver 1994).

Математички проблеми су дефинисани у оквиру простора проблема контекстом, елементима контекста и односима између елемената, при чему су неки од елемената тражени или се тражи да се утврди однос између познатих елемената. Стога се математички проблеми могу анализирати са аспекта контекста, познатих и непознатих елемената, и односа између елемената. Трансформисање проблема у нови значи да се неки (један или више) од елемената проблема простора мењају, док неки елементи остају исти. Једна од наших идеја је да се проблеми могу трансформисати тако да одражавају промене математичке структуре. Нови проблем може се поставити променом: 1) онога што је дато (познато), 2) онога што се тражи (непознато), или 3) контекста. За нас, контекст проблема одређује границе простора проблема у оквиру кога ћемо се кретати. Он може бити апстрактан и реалан. Трансформисани проблем може бити лакши или тежи од иницијалног проблема.

Постављање проблема трансформацијом репрезентације

Метод којим ћемо се бавити у овом раду лоциран је у Теорији репрезентација. Репрезентације се у домену теорија сазнања сматрају средством мишљења (Janvier & Dufour 1987; Суоасо & Сурсио 2001). Како примећују Голдин и Штеинхолд математичко мишљење укључује разумевање структурних сличности и разлика, као и односа између различитих репрезентација једног појма (Goldin & Shteingold 2001: 9). Брунерова теорија три врсте репрезентације (акционе, иконичке и симболичке) даје дијаграм прогресивне схематизација и формализације која се јавља у процесу учења (Брунер 1960). У том смислу, различите репрезентације проблема могу представљати представљање проблема на различитим нивоима апстракције.

Са друге стране математичари при дискусији о различитим репрезентацијама обично дају тумачења о различитим начинима на који можемо представити задати проблем у току процеса решавања. Заиста, познавање различитих репрезентација изузетно је корисно у решавању проблема (Поља 1957). Један од начина да се помогне ученицима да постану сигурни у коришћењу различитих репрезентација у решавању проблема је да их суочимо са различитим облицима представљања проблема (Милинковић 2012). Френдлендер и Табаки тврде да представљање проблемске ситуације различитим репрезентацијама подстиче флексибилност у избору репрезентација код ученика (Friedlander и Tabach 2001).

Не постоји договор међу истраживачима у погледу предности различитих репрезентација у настави математике. Неки истраживачи дају аргументацију за њихово коришћење, док се други противе. Аркави идентификује визуелне представе као „когнитивна технолошка средства“ за размишљање, учење и решавање проблема карактеристично за технолошко доба комуникација (Arcavi 2003: 216). Он истиче социо-културну вредност визуелних представа (Arcavi 2003). Аркави препознаје три функције визуелних представа: 1) као подршку и илустрацију симболичке представе; 2) као средство за решавање сукоба између интуиције и симболичког решења, и 3) као средство да се реорганизује и поправи концептуално разумевање. Дакле, визуелне репрезентације помажу да се „виде ствари“, изоштрава се наше разумевање. Ипак, за ученике није тривијалан прелазак са једне на другу репрезентацију проблема.

Без сумње најчешћи начин постављања проблема је описивање проблемске ситуације речима, тј. текстуални задатак. Такође, релативно је често представљање математичких проблема у симболичкој форми. Ређе коришћен начин представљања проблема је сликовни. Пођимо од релативно познатих примера. Пример једног сликовно задатог задатака дат је на слици 1. Овакав начин

представљања у једноставним задацима је уобичајен. Они се не могу назвати проблемима. Ипак, у смислу навикавања на различите визуелне репрезентације је користан. Јасно је да дат пример може бити трансформисан у симболичку форму: „ $1 + 1 = _$, $3 - 1 = _$,...“

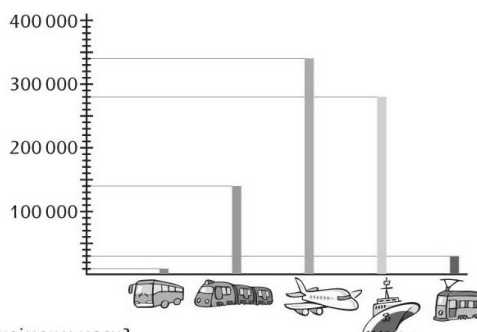


Слика 1. Бројевне слике

Дијаграми, графикони и табеле се често користе као начин да се представе подаци. У овом случају, проблеми су везани за анализирање слике и разумевање које информације су дате у сликама, шта нам оне говоре, како да их искористимо да пронађемо решење. Полазиште за следећи проблем је задатак упоређивања дат у симболичкој форми: „Упореди бројеве 100000, 200000,...“. На следећој слици (Сл. 2) дајемо пример проблема до кога се долази трансформацијом полазног у визуелно задати проблем. Ученици раде на попуњавању табеле и налажењу одговора на постављено питање на основу анализе графика.

Упиши у табелу податке са слике.

превозно средство	маса у kg
воз	140 000
брод	
	340 000



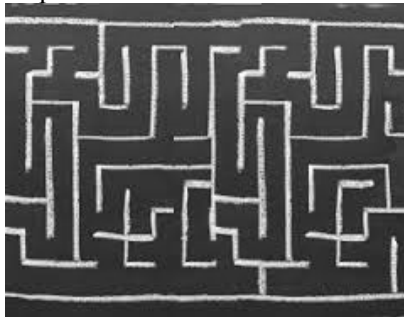
а) Које превозно средство има највећу, а које најмању масу?

Слика 2. Читање графика и табеле, адаптирано (Дејић и остали, 2012).

Најзад, ту су и проблеми који укључују акционе репрезентације проблема. Овај начин представљања ретко се користи у пракси ако изузмемо задатке манипулације са жетонима или штапићима у првом разреду.

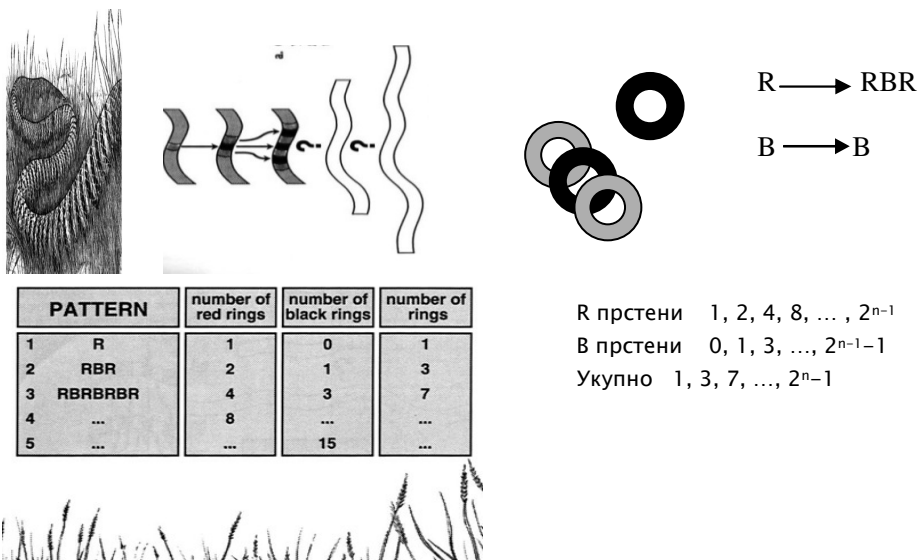
Ево и једног нестандартног примера проблема који подразумева акционо представљање (Слика 3). Ученици се крећу кроз нацртани лавиринт, тражећи излаз описујући пут.

У школском дворишту учитељ црта лавиринт.
Ученик се смешта унутар лавиринта.
Тражи излаз и усмено описује своје кретање одређивањем
правца лево-десно- право.



Слика 3. Лавиринт

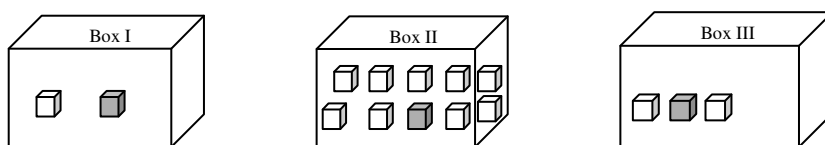
Визуелно представљени проблеми могу бити и изузетно сложени. Наводимо пример из уџбеничког комплета Математика у контексту (Mathematics in Context) (Romberg et al., 1998). У обрасцима и симболима јединице, ученици развијају разумевање идеје образаца. Конкретно, они уче како да изразе образац са математичким симболима. У активности уче образац раста змија са црвеним (R-red) и црним (B-black) прстеновима. Од њих се тражи да објасне образац раста и да предвиде како би змија изгледа након n - итерацији.



Слика 4. Адаптирано из Математике у контексту (Romberg et al., 1998).

Још један пример проблема трансформисаних променом репрезентације потиче из нашег истраживања у коме смо били фокусирани на почетно учење вероватноће и статистике (Милинковић, 2007). У студији смо испитали како различите репрезентације проблема утичу на усвајање појма вероватноће код деце. Три групе ученика су добиле различите скупове проблема у покушају да развију своје почетно интуитивно разумевање појма вероватноће. Скупови проблема разликовали су се у доминантној репрезентацији проблема. Једна група ученика је учествовала у експериментима. Друга група је проучавала различите сликовне репрезентације проблема, проучавајући графичко и табеларно приказане податке. Коначно, трећа група је била фокусирана на израчунавање шансе помоћу дате формуле.

Опишимо само један од проблема коришћен у експерименталном програму, иначе варијацију Пијаже-Инхелдер експеримента. У акционој репрезентацији сценарио је био следећи: Испред ученика су три кутије. Прва кутија садржи једну белу и једну црвену коцкицу. Друга је садржала девет белих коцкица и једну црвену а трећа две беле и две црвене. (Слика 5) Требало је утврдити шансу да се извуче црвена коцкица из сваке од кутија и упоредити шансе.



Слика 5. Акционо представљање проблема

У другом иконички представљеном проблему ученици су добили визуелно представљене резултате игре коју су одиграла имагинарна деца. Резултати су били представљени у облику графа. Трећа група са симболички представљеним проблемима израчунавала је вероватноћу на основу датих података о укупном броју коцкица и повољном броју исхода. Различите репрезентације проблема довеле су ученике до почетног успеха у разумевању и бављењу појмом шансе који нису разумели на исти начин, сходно различитим начинима долажења до појма.

Овим приводимо крају нашу дискусију о методи постављања проблема трансформацијама репрезентација.

Закључак

У овом раду бавили смо се методом постављања проблема на основу трансформације репрезентације проблема. Приказали смо и продискутовали примере низа проблема насталих трансформацијама репрезентације. Показано је да различите врсте репрезентација могу да обезбеде варијабилност и богатс-

тво проблема. Шире, овај рад указује да разумевање математике укључује и разумевање различитих репрезентација.

Литература

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics *Educational studies in mathematics*, 52, 215-241. Netherlands: Academic Press.
- Bonotto, C. (2007). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, H. W. Henn (ur.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*, 185-192. New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.
- Bruner, J. (1960). The Process of education. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematics problems: exploring changes in preservice teachers practices. *Educational Studies in Mathematics* 52: 243–270. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cuoco, A. & Curcio, F. (eds.) *The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook*. NCTM: Macmillan Publishing Company.
- Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations of Algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (eds.) *The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook*, str. 173-186. NCTM: Macmillan Publishing company.
- Janvier Defour, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? U A. H. Schoenfeld (ur.) *Cognitive science and mathematics education*, 123-147. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lavy, I. i Shriki, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 129-136. Seoul: PME
- Michalewicz, Z. and Fogel, D.B. (2000). *How to solve it: Modern Heuristics*. Springer: Germany.
- Милинковић, Ј. (2007). Методички аспекти увода у вероватноћу и статистику. Београд: Учитељски факултет.
- Милинковић, В.Ј. (2014). Постављање проблема- нова област у методици наставе математике. У Милинковић, Ј. (Ур.) *Зборник Имплементација иновацију у обарзовању и васпийијању - изазови и дилеме*. Београд: Учитељски факултет.
- Milinkovic, J. (u stampi). Conceptualizing problem posing via transformation. F. M.. Singer, N. Ellerton, Jinfa, Cai (yp.) *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* Сајт посећен 31. августа 2014.
<http://www.springer.com/education+%26+language/mathematics+education/book/978-1-4614-6257-6>.
- Milinkovic, J. (2012). Pre-service teachers' representational preferences. Tso, T. Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Opportunities to Learn in Mathematics Education*, Vol 3, 3-209 - 3-217. Taipei, Taiwan: PME.
- Polya, G. (1973). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Silver, E.A., Mamona-Downs, J., Leung, s. S., Kenney, P.A. (1996). Posing mathematical problems in a complex task environment: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(3), 233-309.

The method of establishing the mathematical problem by using the transformation of the representation

Summary: This paper is devoted to outlining a methodical approach directed at the development of teacher competencies in posing mathematical problems. Sudnet teachers spontaneously develop competence in problem posing to a certain extent through practice, when developing lesson plans. They thereby obtained primarily practical guidance and advice on how to correct the mistakes from their instructors. The most common objections are of practical character, referring to the poorly selected context, imprecise formulation or inadequate amount of information given in the task. However, the issue of problem posing can be approached differently. In our paper we present a theoretically grounded method of problem posing based on problems transformations. We pay special attention to the problems created by transforming the representation. Developing skills of posing problems by changing representations encourages teachers to reflect more deeply on the subject matter, especially on the correlation of mathematical content with other school subjects. Our aim is to shed light on the area of "problem posing" which opens new horizons for studies in the field of methodology of mathematics.

Key words: mathematical problem, transformations, representations.

Ibolya Szilágyiné Szinger

Eötvös József College, Baja, Hungary

szilagyine.szinger.ibolya@ejf.hu

SHOULD PARENTS HELP OR HOW SHOULD THEY DO IT IN SOLVING OPEN SENTENCES (EQUATIONS, INEQUALITIES) IN LOWER PRIMARY CLASSES?

Abstract. In the course of teaching open sentences (equations, inequalities) teachers often experience that parents' help – provided mainly during solving the homework – may cause regression for young learners in the already achieved results. The source of the problem may be in the difference between parents' methods and those applied by the teachers in lower primary classes.

To illustrate the problem I introduce a fourth class case study. According to the parents' report they experienced the situation as a total failure. That is the reason why they asked for advice how to help their child in the future.

Keywords: open sentence, equation, inequality, experimenting, parents' help

Introduction

In the first four grades of lower primary the basic concepts of mathematics, such as open sentence, equation and inequality are established. The development of the concept of the open sentence is as a matter of fact a long process, and it is not completed by the first four grades, but it continues at other levels of learning.

Theoretical background

Bruner's representation theory (1966) is based on activities. According to this theory in order that learners could understand the teaching material, they should 'process' it intuitively before. Thus every process of thinking can happen on three levels:

- a) enactive level: gaining knowledge through concrete practical activities and manipulations.
- b) iconic level: gaining knowledge through graphic images, imaginary situations.

- c) symbolic level: gaining knowledge through mathematical symbols and language.

Although in the lower primary grades the enactive and iconic levels are in the foreground, but language (speech), which is the symbolic level, is also very important. If we get round the first two levels there is a risk that learners due to the lack of proper system of images will not be able to solve mathematical problems and to understand concepts at symbolic level, because they have nothing to rely on. If the first level (the concrete, practical activities) is omitted, then the proper system of images will not be established.

However, it would not be a good idea to associate Bruner's representation levels with age groups. Instead the various areas of knowledge these levels are completed at various life stages. Formal education seems to be unsuccessful, because the development of concepts has not been completed from the activities through visualizing to abstracts concepts as describe by Bruner. (Knausz, 2001)

Shlomo Vinner and David Tall (1981) introduced the term '*concept image*' in the literature of methodology of mathematics teaching. „*The concept image is the total cognitive structure associated with the concept name, which includes all the mental pictures and associated properties and processes, pictures, graphs experiences.*” (Tall, 2004) Pictures, relevant examples, experience and activities play an important part in the formation of versatile concept image.

Methodological implications of teaching open sentences in Hungary

An open sentence is the designation of the logical function in 1st – 4th form in primary school, which usually takes the form of equations and inequalities. Naturally, open sentence is a broader term, referring not only to equations and inequalities – let us consider open sentences such as “ $\square$ is a divisor of 36”. Instead of the term equation and inequality, we use the term open sentence in 1st – 4th form, then switch to the terms equation and inequality in 5th – 8th form. When solving open sentences, we look for elements that make the open sentence true; that is, elements that make up the set of solutions, the so-called truth set. In 1st – 4th form, the interpretation range (base set) of single-variable equations and inequalities is the set of natural numbers, or any of its sub-set. Since the set of solutions is a sub-set of the base set, numerical fractions or negative numbers cannot be included among the possible answers.

Apart from familiarising 1st – 4th form pupils with the term itself, the objective of teaching them about open sentences is to develop their sense of judgement and calculation skills. Moreover, open sentences play an important role in model creation, in solving word problems, as well as in describing the rules of rule-based games.

There are a number of possible methods to solve open sentences in 1st – 4th forms; therefore, single-variable equations may be solved:

- by experimenting,
- by methodical experimenting (“too little – too much” method),
- based on the relations between operations,
- by deduction, observing the changes in difference,
- with the help of a segmented drawing.

Experimenting refers to determining the logical value (true or false) of statements created by substituting numbers one after another.

A higher level form of experimenting is *methodical experimenting*. The term ‘methodical’ refers to the fact that in this case, we consider what options are worth exploring; hence, certain deliberateness appears, contrary to the trial-and-error method. By employing this method, we gradually get to the solution of the open sentence. This is the most frequently applied technique in 3rd and 4th forms.

Open sentences containing a single operation can also be solved *based on the relations between operations*, in which case a suitable operation is used to calculate the answer. The application of this method is preceded by solving several open sentences with the use of experimenting and methodical experimenting. Let us consider an example from 2nd form! We are looking for the answer to the following single-operation open sentence: $\diamond - 27 = 35$. Phrasing the problem may help to find the solution; therefore, let us have the pupil conceive that we are looking for the number, from which 27 subtracted yields a result of 35. If the pupil tries 30, for example, they can see that the difference is too little. Increasing the difference can be achieved by substituting a higher number in place of the variable. If, for example, we substitute 90, then the difference is too much; therefore, we need to look for a smaller number. Let us presume that the pupil substitutes e.g. 60, which yields a difference of 33. From here, it is easy to get to the solution of 62. Having solved a sufficient amount of similar open sentences through experimenting and methodical experimenting, pupils can gain enough experience and find out that the missing minuend can also be found by increasing the difference with the subtractive; that is, by adding the difference and the subtractive together. Let us emphasise that this does not mean the application of the algebra balance scales method because in this particular case, we did not change both sides equally, i.e. we did not add 27 to both sides.

If at home, the parents try to help their child to solve such an open sentence by saying without explanation that we need to add 27 to 35, then they do so by employing the *algebra balance scales method*. However, this technique – as a universal method of solving equations – is not taught in 1st – 4th forms. This, along with the *breakdown method*, is only discussed in 6th form. Preparing pupils for the breakdown method, however, could take place earlier, in the course of special mathematics classes.

In 1st – 4th forms, the method applied when solving inequalities is either experimenting, or (in 3rd and 4th form) methodical experimenting. In methodical experimenting, the pupils are first told to look for the smallest good and largest good answer; the numbers in-between – after gaining appropriate experience – are simply classified as answers, without substitution.

The resolution technique used in the case of open sentences with two or three variables is also the experimenting method.

Case study

When teaching open sentences (equations, inequalities), teachers often find that the assistance that parents render their children – primarily when helping with the homework – may hinder the progress achieved so far. The resolution techniques employed by the parents are usually not identical to the methods applied in 1st – 4th forms, which is probably the root of the problem.

In order to illustrate this, I present a case study of a 4th form pupil below, in which the parents attempt to help their child in solving the open sentence given to her as home assignment.

Réka: Mom, I did my homework with Dad last night, and it didn't pan out. I don't even understand the exercise.

Mom: What is it you don't understand? Let me take a look!

Réka: Maths.

511 are more than 50 subtracted from something.

$511 > \square - 50$ (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, Exercise 10/1.)

Mom: So, what is the question here?

Réka: ????

Mom: Which number do you need to subtract 50 from in order to get a result less than 511? Right?

Réka: Yep. And how do I solve this?

Mom: Let's write this down on a sheet of paper! I can only solve it the way I learned it. *I took extra caution not to mention the word 'equation': on the one hand because they have not learned it yet; and on the other hand because the exercise in question is in fact an inequality. So I quickly wrote down the following:*

$511 > \square - 50$

Let's write it down the other way around because it's simpler that way!

$\square - 50 < 511$

This means the same, doesn't it?

Réka: Yep.

Mom: You must strive to have something alone on one side because that is what we are looking for here. Right now, minus 50 is in our way. What is written as minus on one side, can be taken over to the other side as plus, with the inverse operation. *I figured they don't call it plus and minus, so I quickly corrected myself:* Subtraction becomes addition on one side, and addition becomes subtraction on the other. Look!

$$\square - 50 < 511 / +50$$

$$\square < 511 + 50$$

$$\square < 561$$

Réka: But Mom, we didn't learn it this way. I don't even understand this. *Réka was crying at this point.*

Mom: Well, in this case, numbers less than 561 are good answers.

Write it down the other way around in your exercise book: $561 > \square$ because remember, we turned it around once.

Réka: 560, 559, 558, ..., 0 – *she wrote down, crying.*

Mom: Have you learned integers only?

Réka: We always write down the answer like this.

Mom: Right down to zero?

Réka: Yep.

They solved the following open sentence in a similar manner:

$$\triangle + 100 \geq 409 \quad / -100$$

$$\triangle \geq 409 - 100$$

$$\triangle \geq 309$$

The mother – seeing how their child despaired and cried when doing the homework – contacted me and told me how she experienced the situation above as a complete failure; then inquired how they were supposed to solve the open sentence in question and in what manner could they help their child in the future.

It is worth interpreting the following words by the mother in more detail: “*You must strive to have something alone on one side because that is what we are looking for here. Right now, minus 50 is in our way. What is written as minus on one side, can be taken over to the other side as plus, with the inverse operation. I figured they don't call it plus and minus, so I quickly corrected myself: Subtraction becomes addition on one side, and addition becomes subtraction on the other.*”

For Réka, these words probably sounded like complete nonsense. The following questions may have been swirling inside her head: What does it mean to ‘have something alone’? What does it mean to ‘take it over to the other side as plus’? How does subtraction become addition, when I can only see subtraction in the open sen-

tence? In the mother's instructions, Réka faced a number of nonsensical rules because so far, her teacher has – presumably – taught her the methodical experimenting technique only. She had to solve an open sentence by having something alone on one side and by taking over minus 50 as plus to the other side.

Richard R. Skemp, mathematician-psychologist, calls such instructions repeated insults against the intelligence: “*When someone tries to understand something, it goes together with accommodating its schemes. If in this case the sender conveys nonsensical information, then the receiver tries to assimilate their schemes to nonsense. This amounts to demolishing these schemes, which is the mental equivalent of physical abuse.*” (Skemp, 1975)

Réka started crying because she was unable to find any sense in what her mother told her, but failed to realise that the mistake here was made not by her, but by her mother, even if only out of pure ignorance. The dialogue makes it completely clear that the mother applied the algebra balance scales method as a means of solution because she can only solve the problem the way she learned it. However, her daughter is unfamiliar with this technique; therefore, it cannot be accommodated to her own intelligence. During my discussion with the mother, I tried to make her understand the point of methodical experimenting, at the same time pointing out that the algebra balance scales method is not suited for 4th formers, this is why they did not succeed. The mother's means of solution is taking place at symbolic level, where the daughter's development of concept is at iconic level. Thus Réka at this point is not able to grasp this problem at the symbolic level. I showed her some examples in order to illustrate how to solve open sentences using this technique. A few weeks later, Réka turned to her mother with a similar problem.

Réka: Mom, can you help me with an open sentence exercise? The task is to subtract 5800 from a number, which gives a result of less than 3900, and I need to write this down as an open sentence.

$\Delta - 5800 < 3900$ (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, Exercise 38/2)

And now I don't know how I'm supposed to calculate this.

Mom: Have you got an idea, though?

Réka: By subtracting 3900 from 5800?

Mom: That might also work, but let's try it with experimenting, okay? Let's find a number and try with that! We are talking about thousands and hundreds here. So...?

Réka: Eight thousand something.

Mom: Let's try it with 8000!

Réka: 5800 subtracted from 8000 equals 2200.

Mom: So, in the case of 8000, ...

Réka: ...less.

Mom: The difference is less ...
Réka: ..., than 3900.
Mom: Right. Let's try another number, then!
Réka: Say, 7000... no, rather 8900.
Mom: Okay, let's try it with 8900!
Réka: 5800 subtracted from 8900 equals 3100.
Mom: So, 8900 is also a good answer.
Réka: Yes.
Mom: We tried 8000 before and 8900 now. So, should we keep on trying with larger or smaller numbers?
Réka: With larger numbers. And say, if I add 100 to 8900, then it equals 9000, and the difference is 3200. If I add to 9000...
Mom: Well, how much more?
Réka: 700.
Mom: Right.
Réka: That's not good, then.
Mom: Let's try it out!
Réka: 5000 subtracted from 9700 equals 4700, 800 subtracted from 4700 equals 3900.
Mom: Yes, so then...
Réka: 9700 is not a good answer. Numbers below that are good for us, aren't they?
Mom: Yes.
Réka: I'll write this down. Something equals... no, colon.
Mom: Why do you write a colon?
Réka: This is the way we do it, and then list the answers.
Mom: Which number is the first good answer?
Réka: 9699, then 9698, 9697, and so on, down to 0.
Mom: Down to 0?
Réka: Yes, because we haven't learned negative numbers.
Mom: This is good, then.

A significant development can be observed here in the way the parent formulates their questions, despite the inaccuracies in professional terminology. However, the application of the algebra balance scales method earlier has left some of its mark on the little girl; this is why she wants to subtract – erroneously – 3900 from 5800. It eluded both Réka's and her mother's attention – just like in the previous example above – that if we substitute a number smaller than 5800, then the child cannot execute the subtraction operation – at least not in 1st – 4th form – because they cannot subtract e.g. 5800 from 5000. Pupils cannot determine the difference if they need to

subtract one natural number from another, where the subtractive is higher than the minuend. This is why the smallest good answer is 5800 and not 0.

Conclusion

Returning to our original question, the answer is yes, of course parents should help their children to solve open sentences (equations, inequalities) if need be, but – as we saw it in the example above – it is definitely not all the same how they do it. They should not use the algebra balance scales method. The symbolic level is the prerequisite of applying the balance scale method, but in this particular area namely the open sentences most of the 4th grade children's cognition is at iconic level. This might have resulted in the conflict between the parent and the child. It would be advisable to organise “courses” for parents to demonstrate the methods of experimenting and methodical experimenting, which suit the capabilities of 6-10-year-olds, so that parents can help their children with adequate, suitable methods if the need arises. We can also give examples of mathematical terminology adequate for pupils, as language is an important part of learning. Naturally, professional and methodologically sound teaching is only expected of teachers, but parents should be given guidance to ensure that they help the mental capacities of their children to actually progress and not regress, as the latter causes havoc in the children's mind.

International methodology special literature is not really concerned with the role of parents in children's learning mathematics. Further research topic may arise to investigate the role of parents in other areas of mathematics. In what ways should parents help their children's development of cognition, so that they inadvertently would not hinder this process.

As a conclusion, I cite the words of *John Holt*: “*Religious mystics in India, so we are told, stand for many years with an arm raised, or a limb distorted or immobilized in some fashion. After a while the limb becomes unusable. What sense does it make to argue whether the cause of this is physical, or lies in the way the limb was used? It was the way it was used that made it the kind of limb it was, a limb that could not be used any other way. It is probably true of the mind as well that the way we use it determines how we can use it. If we use it badly long enough, it will become less and less possible to use it well. If we use it well, the possibility grows that we may use it even better.*” (Holt, 1990)

References

- Árvainé Libor I., Lángné Juhász I., Szabados A. (2013). *Sokszínű matematika Számolófüzet 4.* Szeged: Mozaik Kiadó.
- Bruner J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Harvard University Press.

- Herendiné Kónya E. (2013). A természetes számfogalom alakítása. In Herendiné Kónya E., *A matematika tanítása az alsó tagozaton* (pp. 12-27). Budapest: Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó.
- Holt J. (1990). *How Children Fail*. (p. 125). Penguin Books.
- Knausz I. (2001). *A tanítás mestersége*. Miskolc-Budapest: Egyetemi jegyzet.
- Skemp R. R. (1975). *A matematikatanulás pszichológiája. (The Psychology of Learning Mathematics)* (p. 156). Budapest: Gondolat.
- Tall D. (2004). *The Mathematical Growth*. <http://davidtall.com>
- Tall D., Vinner S. (1981). *Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity* (pp. 151-169). Educational Studies in Mathematics, 12.
- Török T. (2013). Nyitott mondatok. In Herendiné Kónya E., *A matematika tanítása az alsó tagozaton* (pp. 152-164). Budapest: Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó.

ДА ЛИ РОДИТЕЉИ ТРЕБА ДА ПОМАЖУ ИЛИ НА КОЈИ НАЧИН КАДА СУ У ПИТАЊУ ЗАДАЦИ ОТВОРЕНОГ ТИПА (ЈЕДНАЧИНЕ, НЕЈЕДНАЧИНЕ) У НИЖИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ?

Резиме. Приликом обраде задатака отвореног типа (једначине, неједначине), наставници често имају утисак да помоћ родитеља – углавном у изради домаћих задатака – може да изазове назадовање код ученика млађег узраста у односу на већ постигнуте резултате. Узрок овог проблема може да лежи у разлици између метода родитеља и метода које примењују наставници у нижим разредима основне школе. У циљу илустрације проблема, наводимо детаљно истраживање спроведено у четвртог разреда. Родитељи, на основу њихових сопствених изјава, ову ситуацију доживљавају као потпуни неуспех. Из тог разлога затражили су савет како да убудуће помажу својој деци.

Кључне речи: задаци отвореног типа, неједнакост, истраживање, помоћ родитеља.

Bojan Radišić

Veleučilište u Požegi,

Požega, Republika Hrvatska

Aleksandra Andrić Radišić

OŠ „Julija Kempfa“,

Požega, Republika Hrvatska

bradisic@vup.hr

ALTERNATIVNE METODE RAČUNANJA U POČETNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Apstrakt. U radu se opisuju tehnike izračunavanja osnovnih matematičkih operacija koje se oslanjaju na vedsku matematiku. Metode i primjeri su prije svega namenjeni početnoj nastavi matematike na dodatnoj nastavi i radu s darovitim učenicima. Cilj je približiti učenicima matematiku, učiniti je zanimljivom i izazovnom za učenike većih mogućnosti koji neprestano traže i zahtijevaju izazove u učenju. Metode učenja koje počivaju na vedskoj matematici razvijaju logičko razmišljanje, povećavaju brzinu računanja i razvijaju kreativnost. Nastavni plan i program Republike Hrvatske, kao i Nacionalni okvirni kurikulum, ne propisuju upotrebu ovakvih alternativnih metoda, što ne znači da učitelj nije slobodan pronaći načine kojima bi zainteresirao i zadržao koncentraciju učenika te ih potaknuo na razmišljanje i učenje nečeg novog. Redovna nastava prilagođena je prosječnom učeniku, vođena planom i programom smještena unutar nekih okvira, dok se u radu s naprednijim učenicima treba izaći iz tih okvira i zadovoljiti potrebe nadarenog učenika.

Ključne riječi. Vedaska matematika, Soroban, osnovne matematičke operacije, okomito i dijagonalno.

Uvod

Godine 1965. Indijac Swami Bharati Krishna Tirtha objavio je knjigu pod nazivom „Vedaska matematika“ u kojoj su opisane tehnike računanja koje se temelje na Vedama, najstarijim svetim staroindijskim i hinduističkim knjigama. U knjizi su opisane neke zanimljive tehnike računanja „napamet“ koristeći kao svoju osnovu 16 „sutri“, odnosno pravila. Neke jednostavnije tehnike prilagođene početnoj nastavi

matematike opisati ćemo u ovom članku. Mnoge zanimljivosti skrivaju i kineska i japanska matematika o kojima će ovdje također biti riječi.

Zbrajanje

Jedna od prvih matematičkih operacija s kojom se susreću učenici u početnoj nastavi matematike je zbrajanje. U udžbenicima nižih razreda zbrajanje se objašnjava tradicionalnom metodom.

Primjer 1: Zbrojimo 259 i 386.

$$\begin{array}{r} + \\ \hline \end{array}$$

Postupak je slijedeći 9 + 6 je 15, broj 3 pišemo pod jedinice, a broj 1 se dodaje deseticama pa slijedi 5 + 8 + 1 je 14. Broj 4 potpisujemo pod desetice, a broj 1 dodaje se stoticama i slijedi 2 + 3 + 1 je 6 i tako dobijemo rezultat, a on iznosi 645.

U prethodnom primjeru zbrojeni su brojevi dvije stotine pedeset devet (259) i tri stotine osamdeset šest (386). Svaki od tih brojeva čitamo s lijeva na desno, prvo znamenka stotice, pa desetice i na kraju jedinice. Zbrajanje ide suprotnim smjerom, dakle prvo zbroj jedinica, zatim desetice i na kraju stotica, što je dosta zbunjujuće za djecu jer su naučeni i pisati i čitati kako brojeve tako i slova s lijeva na desno.

Primjer 2: Zbrojimo 259 i 386, na način da idem s lijeva na desno.

Postupak je slijedeći, zbrajamo stotice, 2 + 3 je 5 i zapišemo ga ispod stotice:

$$\begin{array}{r} 259 \\ + 386 \\ \hline 5 \end{array}$$

Zatim zbrojimo 5 + 8, zbrajamo desetice, je 13 i znamenku 3 pišem pod desetice, a znamenku 1 pod stotice:

$$\begin{array}{r} 259 \\ + 386 \\ \hline 53 \\ \hline 1 \end{array}$$

Zbrojimo još i jedinice, 9 + 6 je 15. Znamenku 5 pišemo pod jedinice, a znamenku 1 zapišemo ispod desetice:

$$\begin{array}{r} 259 \\ + 386 \\ \hline 535 \\ \hline 11 \end{array}$$

Na kraju zbrojimo potpisane stotice i desetice i dobijemo konačan rezultat:

$$\begin{array}{r}
 2 \ 5 \ 9 \\
 + \ 3 \ 8 \ 6 \\
 \hline
 5 \ 3 \ 5 \\
 \hline
 + \ 1 \ 1 \\
 \hline
 6 \ 4 \ 5
 \end{array}$$

Dana 12.11. 1946. u Tokiju je održano natjecanje između japanskog abakusa nazvanog Soroban, koji je koristio Japanac Kiyoshi Matsuzaki i električnog kalkulatora kojeg je koristio Amerikanac Thomas Nathan Wood. Natjecanje se sastojalo od pet zadataka: prva četiri su bile osnovne operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, a peti zadatak bio je kombinacija sve četiri osnovne operacije. Soroban je uspio pobijediti rezultatom 4:1. Prednost Sorobana je u tri svojstva:

1. svaki korak radi samo jednom i bilježi na najbrži i najjednostavniji način;
2. radi s lijeva na desno;
3. nikada ne računa preko 10.

Treće svojstvo posebno je zanimljivo, a da bi se objasnilo potrebno je uvesti pojam komplement broja. Komplement je razlika broja 10 i zadanog broja, npr.: komplement broja 6 je broj 4, komplement broja 2 je 8.

Broj	Komplement broja
1	9
2	8
3	7
4	6
5	5
6	4
7	3
8	2
9	1

Osnovno pravilo računanja s komplementom glasi:

„Ako zbroj dva broja prelazi deset, onda od jednog broja oduzimamo komplement drugog broja i zabilježimo preko deset“.

Napomena: Radi lakšeg računanja u praksi najčešće se od manjeg broja oduzima komplement većeg, ali to nije pravilo.

Primjer 3: Koristeći osnovno pravilo računanja s komplementom izračunajmo $5 + 7$.

Primjenom osnovnog pravila računanja s komplementom, slijedi:

$5 + \underline{7} = 5 - 3 = 2$. Treba primijetiti kako je broj 7 podcrtan i na taj način smo zabilježili „preko deset“ (prvo svojstvo Sorobana), što ćemo koristiti u slijedećim primjerima, tako da je konačan rezultat 12.

Na slijedećim primjerima pokazat ćemo kako zbrajati koristeći tehnike Sorobana.

Primjer 4: Zbrojimo 259 i 386.

Postupak je slijedeći, zbrajamo stotice, $2 + 3$ je 5 i zapišemo ga ispod stotice:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ 8 \ 6 \\ \hline 5 \end{array}$$

Zatim zbrajamo desetice $5 + \underline{8} = 5 - 2 = 3$, odnosno dobijemo isti broj ako od broja 5 oduzmemo komplement broja 8 i znamenku 3 pišemo pod desetice:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ \underline{8} \ (-2) \ 6 \\ \hline 5 \ 3 \end{array}$$

Kako smo koristili jedan komplement, znači da pod stotice dodajemo 1:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ \underline{8} \ 6 \\ \hline 5 \ 3 \\ \hline 1 \end{array}$$

Zbrojimo još i jedinice, $9 + \underline{6} = 9 - 4 = 5$. Znamenku 5 pišemo pod jedinice:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ \underline{8} \ \underline{6} \\ \hline 5 \ 3 \ 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

Kako smo koristili jedan komplement, znači da pod stotice dodajemo 1:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ \underline{8} \ 6 \\ \hline 5 \ 3 \\ \hline 1 \ 1 \end{array}$$

Na kraju zbrojimo potpisane stotice i desetice i dobijemo konačan rezultat:

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 9 \\ + \ 3 \ \underline{8} \ \underline{6} \\ \hline 5 \ 3 \ 5 \\ \hline + \ 1 \ 1 \\ \hline 6 \ 4 \ 5 \end{array}$$

Primjer 5: Zbrojimo 57, 102, 269 i 486.

Prvo zbrajamo stotice i to na način da zbrajamo po dvije znamenke, $1 + 2 = 3$, rezultatu dodamo slijedeću znamenku 4, $3 + 4 = 7$ i zapišemo rezultat ispod stotica:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad 6 \quad 9 \\ + \quad 4 \quad 8 \quad 6 \\ \hline 7 \end{array}$$

Zatim zbrajamo desetice na isti način, $5 + 0 = 5$, zatim rezultatu dodamo 6, $5 + 6 = 5 - 4 = 1$, pa na rezultat dodamo broj 8, $1 + 8 = 9$ i zapišemo rezultat pod desetice:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad \underline{6} \quad 9 \\ + \quad 4 \quad 8 \quad 6 \\ \hline 7 \quad \mathbf{9} \end{array}$$

Kako smo koristili samo jedan komplement, ispod stotica dodamo 1:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad \underline{5} \quad 9 \\ + \quad 4 \quad 8 \quad 6 \\ \hline 7 \quad 8 \\ \hline \mathbf{1} \end{array}$$

Na kraju zbrojimo jedinice, $7 + 2 = 9$, zatim rezultatu dodamo 9, $9 + \underline{9} = 9 - 1 = 8$, pa rezultatu dodamo broj 6, $8 + \underline{6} = 8 - 4 = 4$ i zapišemo rezultat pod jedinice:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad \underline{5} \quad \underline{9} \\ + \quad 4 \quad 8 \quad \underline{6} \\ \hline 7 \quad 8 \quad \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} \end{array}$$

Ovdje smo koristili komplement dva puta pa ispod desetica dodamo 2:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad \underline{5} \quad \underline{9} \\ + \quad 4 \quad 8 \quad \underline{6} \\ \hline 7 \quad 8 \quad 4 \\ \hline \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \end{array}$$

Na kraju zbrojimo potpisane stotice i desetice i dobijemo konačan rezultat:

$$\begin{array}{r}
 5 \ 7 \\
 1 \ 0 \ 2 \\
 2 \ \underline{5} \ \underline{9} \\
 + \ 4 \ 8 \ \underline{6} \\
 \hline
 7 \ 8 \ 4 \\
 + \ 1 \ 1 \\
 \hline
 8 \ 9 \ 4
 \end{array}$$

Primjer 6: Zbrojimo 242, 73,50, 67, 162, 160 i 282.

$$\begin{array}{r}
 2 \ 4 \ 2 \\
 \underline{7} \ 3 \\
 5 \ 0 \\
 \underline{6} \ \underline{7} \\
 1 \ 6 \ 2 \\
 1 \ \underline{6} \ 0 \\
 + \ 2 \ \underline{8} \ 2 \\
 \hline
 6 \ 2 \ 6 \\
 + \ 4 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 3 \ 6
 \end{array}$$

Tehnika u prethodnim primjerima omogućuje djeci brže i lakše računanje od klasične metode jer dovoljno je poznavati samo zbrajanje i oduzimanje do 10, a najbolji primjer je zbrajanje desetica u primjeru 5. Koristeći klasičnu tehniku zbrajanja, u prethodnom primjeru, djeca bi morala računati do preko 40, što je svakako teže i sporije nego u prikazanom primjeru.

Oduzimanje

Oduzimanje je matematička operacija s kojom se djeca upoznaju nakon zbrajanja. U udžbenicima nižih razreda zbrajanje se objašnjava tradicionalnom metodom preko zbrajanja, npr. $9 - 6 = 3$ jer je $3 + 6 = 9$.

Primjer 7: Oduzmimo 175 i 24.

Ovdje je oduzimanja vrlo jednostavno jer je svaka od znamenaka većeg broja, veća od odgovarajuće znamenke manjeg broja. Stoga oduzimanjem desetica slijedi $7 - 2 = 5$ i oduzimanjem jedinica dobijemo $5 - 4 = 1$ i tako dobijemo konačan rezultat.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 7 \ 5 \\
 - \ 2 \ 4 \\
 \hline
 5 \ 1
 \end{array}$$

Primjer 8: Oduzmimo 124 i 75.

Ovdje je oduzimanje malo složenije. Budući da se ne može oduzeti 5 od 4, tada umanjniku na mjestu jedinice dodajemo 10, a umanjitelju na mjesto desetice dodajemo 1, pa slijedi $14 - 5 = 9$, i pišemo 9 pod jedinice, i zatim :

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 4+10 \\ - \quad 7+1 \quad 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

Budući da se i 8 ne može oduzeti od 2, umanjniku na mjestu desetice dodajemo 10, a umanjitelju na mjesto stotice dodajemo 1, pa slijedi $12 - 8 = 4$, i pišemo 4 pod desetice, i zatim:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2+10 \quad 4 \\ - \quad 1 \quad 7+1 \quad 5 \\ \hline 4 \quad 9 \end{array}$$

Na kraju oduzmemo stotice $1 - 1 = 0$ i dobijemo konačni rezultat:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 4 \\ - \quad 1 \quad 7 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 9 \end{array}$$

Iz ova dva primjera jasno se vidi kako je primjer 7 puno jednostavniji i „poželjniji“ za operaciju oduzimanja. Na slijedećem primjeru ćemo pokazati kako svaki problem oduzimanja se lako svede upravo na „poželjniji“ primjer.

Primjer 9: Oduzmimo 324 i 75.

Za početak broj 324 zapišemo kao zbroj $324 = 299 + 25$ i umjesto od 324, oduzimamo od idealnog umanjnika 299. Operacija oduzimanja sada je puno jednostavnija i slijedi $9 - 5 = 4$, $9 - 7 = 2$ i $2 - 0 = 2$:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 9 \quad 9 \\ - \quad \quad 7 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

Broj 324 smo rastavili kao zbroj 299 i 25, znači da smo nam u rezultatu nedostaje 25, te ih dodamo na prethodni rezultat i dobijamo konačni rezultat $224 + 25 = 249$:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 9 \quad 9 \\ - \quad \quad 7 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 4 \\ + \quad \quad 2 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 9 \end{array}$$

Primjer 10: Oduzmimo 6514 i 4837.

Broj 6514 zapišemo kao zbroj $6514 = 5999 + 515$, te slijedi:

$$\begin{array}{r} 5 \ 9 \ 9 \ 9 \\ - \ 4 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \hline 1 \ 1 \ 6 \ 2 \end{array}$$

Zatim dodamo 515 na razliku i dobijemo konačni rezultat:

$$\begin{array}{r} 5 \ 9 \ 9 \ 9 \\ - \ 4 \ 8 \ 3 \ 7 \\ \hline 1 \ 1 \ 6 \ 2 \\ + \quad \quad \quad 5 \ 1 \ 5 \\ \hline 1 \ 6 \ 7 \ 7 \end{array}$$

Množenje

Još jedna operacija koja je prirodno proistekla iz zbrajanja je množenje. Tablica množenja uči se u drugom razredu osnovne škole i ona je osnova svih tehnika množenja s kojim će se učenici sastajati tijekom svog školovanja. Množenje je operacija koja od učenika zahtjeva da računaju „napamet“, ali to je najčešće samo tablica množenja, dok se za množenje većih brojeva koristi papir i olovka, a poslije se „vjeruje“ samo kalkulatoru. U nekoliko slijedećih primjera pokazati ćemo neke tehnike množenja „napamet“.

U ovom primjeru pokazat ćemo kako pomnožiti dva ista broja koji završavaju znamenkom 5, dakle kvadriranje brojeva koji završavaju na 5. Tehnika se zove „sa jedan više od prethodnog“, a sastoji se od dva koraka:

1. kvadriramo jedinice (5 puta 5 je 25)
2. preostali dio broja pomnoži se sa njegovim sljedbenikom.

Primjer 11: Pomnožimo 25 i 25, a zatim 105 i 105.

Prvo kvadriramo jedinice, a preostali dio broja pomnoži se sa njegovim sljedbenikom:

$$25 \cdot 25 = 2 \cdot (2+1) / 5 \cdot 5 = 6 / 25 = 625$$

$$105 \cdot 105 = 10 \cdot (10+1) / 5 \cdot 5 = 110 / 25 = 11025$$

U slijedećem primjeru pokazat ćemo kako pomnožiti dvoznamenkasti broj s brojem 11.

Primjer 12: Pomnožimo 25 i 11, a zatim 75 i 11.

Broj 2 bit će na mjestu stotice u rezultatu, a broj 5 na mjestu jedinice, dok će desetica biti zbroj 2 i 5, a to je 7:

$$25 \cdot 11 = 2 / 2 + 5 / 5 = 2 / 7 / 5 = 275$$

Broj 7 bit će na mjestu stotice u rezultatu, a broj 5 na mjestu jedinice, dok će desetica biti zbroj 7 i 5, a to je 12, broj 2 ostaje, a 1 se dodaje stotici:

$$75 \cdot 11 = 7/7 + 5/5 = 7 / 12 / 5 = 7 + 1 / 2 / 5 = 825$$

U prethodnim primjerima pokazali smo dvije tehnike koje su specifične i definirane su samo za posebne slučajeve. Slijedeći primjer pokazati će tehniku kojom možemo pomnožiti bilo koja dva dvoznamenkasta broja „napamet“, a naziva se „okomito i dijagonalno.“

Primjer 13: Pomnožimo 79 i 81.

Potpisemo brojeve jedan ispod drugog:

$$\begin{array}{r} 79 \\ 81 \end{array}$$

Mjesto jedinica u rezultatu dobije se kao umnožak jedinica oba faktora 9 i 1 (okomito), a to je 9, mjesto stotica ili tisućica dobije se kao umnožak desetica oba faktora 7 i 8 (okomito), a to iznosi 56:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ 1 \end{array} \\ \hline 56 & 9 \end{array}$$

Mjesto desetica u rezultatu dobije se kao zbroj umnoška desetice prvog faktora i jedinice drugog 7 i 1 (dijagonalno), te umnoška jedinice prvog faktora i desetice drugog 9 i 8 (dijagonalno), a to iznosi 79:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 56 \\ 56 \end{array} & \begin{array}{r} 7 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \\ 9 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 56 \\ 56 \end{array} & \begin{array}{r} 79 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Kako na mjestu desetice treba stajati samo jedna znamenka, 9 ostaje, a 7 se dodaje tisućici 56 i to iznosi 63:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 7 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 56 + 7 \\ 63 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ 9 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 63 \\ 63 \end{array} & \begin{array}{r} 9 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Umnožak 79 i 81 iznosi 6399.

Tehniku „okomito i dijagonalno“ moguće je naučiti koristiti za računanje „napamet“, ali zahtjeva dosta vježbe.

U slijedećim primjerima pokazati ćemo klasični način pisanog množenja i kineski način pisanog množenja.

Primjer 14: Pomnožimo 175 i 29.

Klasičnom metodom prvo množimo svaku znamenku prvog faktora s deseti-
com drugog faktora pa slijedi: 2 puta 5 je 10, 0 pišemo 1 pribrajamo, slijedi 2 puta 7
je 14 i 1 je 15, pišemo 5, a 1 pribrajamo i još ostaje 2 puta 1 je 2 i 1 je 3.

$$\begin{array}{r} 175 \cdot 29 \\ \hline 350 \end{array}$$

Zatim množimo svaku znamenku prvog faktora sjedinicom drugog faktora, a
umnožak počinjemo zapisivati jedno mjesto udesno. Slijedi 9 puta 5 je 45, 5 pišemo,
4 pribrajamo, slijedi 9 puta 7 je 63 i 4 je 67, pišemo 7, a 6 pribrajamo i na kraju 9
puta 1 je 9 i 6 je 15.

$$\begin{array}{r} 175 \cdot 29 \\ \hline 350 \\ 1575 \end{array}$$

Konačni rezultat je zbroj umnožaka i iznosi 5075:

$$\begin{array}{r} 175 \cdot 29 \\ \hline 350 \\ + 1575 \\ \hline 5075 \end{array}$$

Primjer 15: Pomnožimo 175 i 29.

Ovdje ćemo koristiti tehniku kineskog pisanog množenja. U prvom koraku na-
pravimo tablicu s onoliko stubaca koliko znamenaka ima prvi faktor 175, znači 3
stupca i onoliko redaka koliko znamenaka ima drugi faktor 29, pa je to 2 retka i
svaku ćeliju podijelimo dijagonalno:

1	7	5	
			2
			9

Množimo zatim svaki stubac i redak, npr. 5 puta 2 je 10, a umnožak zapišemo na
način da je desetica, znamenka 1, iznad dijagonale, a jedinica, znamenka 0, ispod
dijagonale:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9

U slijedećem koraku zbrajaju se brojevi između dvije dijagonale tako da se krene od
posljednjeg retka i stupca, broj 5, i on predstavlja znamenku jedinice u rezultatu:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9
			5

Desetica je zbroj $0 + 4 + 3$, a iznosi 7:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9
	7	5	

Stotica je zbroj $1 + 4 + 6 + 9$, a iznosi 20, znamenku 0 pišemo, a znamenku 2 pribrajamo:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9
20	7	5	

Tisućica je zbroj $1 + 2 + 0$ i pribrajamo 2, a to je 5:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9
5	0	7	5

Desettisućica je znamenka 0 iznad dijagonale u prvom retku i prvom stupcu, pa je konačni rezultat 5075:

1	7	5	
0/2	1/4	1/0	2
0/9	6/3	4/5	9
0	5	0	7
			5

Dijeljenje

„Najteža“ osnovna matematička operacija s kojom se djeca susreću je dijeljenje. Na slijedećim primjerima pokazat ćemo tehniku dijeljenja s brojem 9 zbog svoje jednostavnosti i primjerenosti nižim razredima osnovne škole.

Primjer 15: Podijelimo 1251 s 9.

Broj 1 jednostavno spustimo:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

Zbroj 1 i 2 iznosi 3:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \end{array}$$

Zbroj 3 i 5 iznosi 8:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \quad \mathbf{8} \end{array}$$

Posljednji zbroj 8 i 1 iznosi 9, te ga dijelimo sa 9 i dobijemo 1 koji zatim dodajemo znamenci 8 i dobijemo 9:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 9 \end{array}$$

Primjer 16: Podijelimo 65106 s 9.

Broj 6 jednostavno spustimo:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

Zbroj 6 i 5 iznosi 11, pišemo jedinicu pod 5, a deseticu dodajemo znamenci 6:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 6 \quad \mathbf{1} \\ \hline 1 \end{array}$$

Zbroj 11 i 1 iznosi 12, pišemo jedinicu pod 1, a deseticu dodajemo znamenci 5:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 6 \quad 1 \quad \mathbf{2} \\ \hline 1 \quad \mathbf{1} \end{array}$$

Zbroj 12 i 0 iznosi 12, pišemo jedinicu pod 0, a deseticu dodajemo znamenci 1:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 5 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 6 \\ \hline 6 \quad 1 \quad 2 \quad \mathbf{2} \\ \hline 1 \quad 1 \quad \mathbf{1} \end{array}$$

Posljednji zbroj 12 i 6 iznosi 18, te ga dijelimo sa 9 i dobijemo 2 koji zatim dajemo znamenci 0:

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 1 \ 0 \ | \ 6 \\ \hline 6 \ 1 \ 2 \ 2 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array}$$

Konačan rezultat dobija se kao zbroj i iznosi 7234:

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 1 \ 0 \ | \ 6 \\ \hline 6 \ 1 \ 2 \ 2 \\ \hline + \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \\ \hline 7 \ 2 \ 3 \ 4 \end{array}$$

Zaključak

Opisane tehnike primjenjive su u dodatnoj nastavi matematike koja pruža mogućnosti darovitim učenicima da ostvare svoje potencijale. Često se smatra da takvi učenici ne trebaju dodatne poticaje jer se oni, za razliku od prosječnih učenika, mogu sami snaći. Upravo iz tog razloga, darovita i sposobna djeca često pribjegavaju asocijalnom ponašanju ako im ne ponudimo više i ne zainteresiramo njihovu maštu. Upravo metode računanja opisane u ovom radu mogu pomoći nadarenoj djeci da iskoriste svoje potencijale i prošire svoje opće obrazovanje.

Literatura:

- Arnell Williams G. (2013), *How Math Works: A Guide to Grade School Arithmetic for Parents and Teachers*, Plymouth: Rowman & Littlefield Publishers
- George D., (2005), *Obrazovanje darovitih - Kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike*, Zagreb: EDUCA – nakladno društvo d.o.o.
- Kojima T. (1954), *The Japanese abacus, its use and theory*, Tokyo: Charles E. Tuttle Company.
- Kumar P. (2014), *Vedska matematika drevna tehnika računanja bez kalkulatora*, Bregana, Harša.
- Miklec D., Jakovljević Rogić S., Prtajin G. (2013), *Moj sretni broj 2, Udžbenik matematike u drugom razredu osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga.
- Miklec D., Jakovljević Rogić S., Prtajin G., Binder S., Mesaroš Grgurić N., Vejić J. (2013), *Moj sretni broj 3, Udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga.
- Miklec D., Jakovljević Rogić S., Prtajin G., Binder S., Mesaroš Grgurić N., Vejić J. (2013), *Moj sretni broj 4, Udžbenik matematike u četvrtom razredu osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga.
- Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa RH (2011), *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Zagreb, Printera grupa, javno dostupno dana 5. svibnja 2014. godine na web stranici: <http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2685>
- Paić G., Manzoni Ž., Marjanović I., Kosak N., (2013), *Matematičkim stazama 2, udžbenik matematike u drugom razredu osnovne škole*, Zagreb, Školska knjiga

- Paić G., Manzoni Ž., Marjanović I., Kosak N., (2013), Matematičkim stazama 3, udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole, Zagreb, Školska knjiga
- Paić G., Manzoni Ž., Marjanović I., Kosak N., (2013), Matematičkim stazama 4, udžbenik matematike u četvrti razredu osnovne škole, Zagreb, Školska knjiga
- Stoddard E. (1994), Speed Mathematics simplified, New York, Dover Publications

THE ALTERNATIVE METHODS OF CALCULATING IN TEACHING MATHEMATICS AT THE BEGINNERS LEVEL

Summary. This paper describes calculating basic mathematical operations by Vedic mathematics. Methods and examples are intended for the initial teaching of mathematics for gifted pupils and additional classes. Main point is making math closer for pupils and makes it interesting and challenging for the better pupils who seeking and demanding new learning challenges. Learning methods based on Vedic mathematics are developing logical thinking, increasing the computation speed and developing creativity. The teaching plan and program of Croatia, as well as the National Curriculum Framework does not prescribe the use of such alternative method, which does not mean that the teacher is notable to find ways to keep interest and the concentration of pupils and encouraging them to think and learn something new. Regular class is adjusted to the average student, leading by plan and program within limits, while gifted students have needs to get out of these limits.

Keywords: Vedic mathematics, Soroban, basic mathematical operations, vertically and diagonally

Aslanbek Naziev

Ryazan State University

Ryazan, Russian Federation

a.naziev@rsu.edu.ru

SEMANTIC READING IN MATHEMATICS TEACHING

Summary. We compare two approaches to mathematics teaching: an approach through actions and rules of processing and an approach through semantic reading.

Key words: mathematics, mathematics teaching, actions, rules of processing, semantic reading

Semantic reading versus actions and rules of processing: first examples

Goethe once said that poetry is an art to put four senses in two rows. We claim that accordingly this definition, mathematics is a branch of poetry, and the highest one. So, in mathematics teaching, it is quite important to teach pupils to see in sentences as many senses as possible (that is what we call by art of semantic reading).

For example, in the sentence $a + b = 0$, where a and b denotes real numbers, one can see at least four senses. The first is straightforward: the sum of numbers a and b equals 0. But we can look at a say what we see: we see that the sentence is telling that a is a number whose sum with b equals 0. What does this mean? This means that a is opposite to b , that is $a = -b$. Proceeding analogously with b we discover that the sentence is telling that $b = -a$. Then, combining, we will "hear" from the sentence that $a = -(-a)$ and $b = -(-b)$. Surely, it is quite important that pupils can see all these senses and use them in their work.

But traditional didactic of mathematics does not pay much attention to this side of mathematics teaching. Traditional didactic of mathematics is based on actions and "rules of processing" [Freudenthal H.(1991), p. 3].

For example, let us remember what can we learn from traditional didactic about our first observation. We learn the rule of transposition of a term in equation with the following justification:

"Add $-b$ to both sides of the equation. Then we have

$$\begin{aligned}
a + b = 0 &\Leftrightarrow (a + b) + (-b) = 0 + (-b) \\
&\Leftrightarrow a + (b + (b + (-b))) = -b \quad ,, \\
&\Leftrightarrow a + 0 = -b \\
&\Leftrightarrow a = -b.
\end{aligned}$$

If we look closely to this derivation we will find that it explores one action (addition of a quantity to both sides of equation) and four statements: the associative law for addition, representation of the difference as the sum with the opposite, cancellation rule and definition of zero. And all these considerations are absolutely unnecessary. As we already saw, the equation is telling that a is opposite to b . Where from we know it? We know it from the definition of the opposite number. So, we can quietly delete three rows from above derivation and write simply:

by the definition of opposite, $a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$.

Another example: solving the equation $2^x = 3$. Usually they said: "Take the logarithm from both sides of equation", — and came to the conclusion $x = \log_2 3$. But if we restore the omitted details of the proof we will have:

$$\begin{aligned}
2^x = 3 &\Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 3 \\
&\Leftrightarrow x \log_2 2 = \log_2 3 \\
&\Leftrightarrow x \cdot 1 = \log_2 3 \\
&\Leftrightarrow x = \log_2 3.
\end{aligned}$$

Again, we see the unnecessary complications. In fact, all we need is to look at x and say what we see. We see that x is the exponent of the power to which 2 must be raised to yield 3. What is this? This is the logarithm of 3 to the base 2. So, what does it mean that $2^x = 3$? It means that $x = \log_2 3$. That is all!

And the last example in this section. We know from the properties of the module of real number that

$$|a| \geq 0 \quad \text{and} \quad |a|^2 = a^2,$$

or, in words, $|a|$ is nonnegative number which square equals a^2 . What does this mean? This means that $|a|$ is arithmetical square root of a^2 , that is $\sqrt{a^2} = |a|$. I do not know any book that contains this remarkable proof.

Semantic reading in the problems of factoring of polynomials

Look at the expression $a^3 + b^3$. How we can interpret this expression? The first and the simplest one is straightforward: the sum of cubes of a and b . Another interpretation gives famous formula of sum of cubes:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2).$$

But there exists at least one more, and very useful, interpretation. It follows easily from the cube of sum formula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Namely, we see from this formula that

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b).$$

This interpretation of the sum of cubes is very useful although not so famous. It enables to *factor* binomial $a^3 + b^3$ (rather than get it as a product of appropriate terms). In fact,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 3ab) \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Moreover, by means of this representation we can easily factor polynomials $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ and, with especially great effect, $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.
Look:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(a + b)c - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)((a + b)^2 - 3(a + b)c - 3ab) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 &= \\ &= ((a - b) + (b - c))^3 - 3(a - b)(b - c)((a - b) + (b - c)) + (c - a)^3 \\ &= (a - c)^3 + 3(a - b)(b - c)(c - a) + (c - a)^3 \\ &= 3(a - b)(b - c)(c - a). \end{aligned}$$

EXAMPLE. Solve the equation

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

SOLUTION. This is equation of fourth degree about x . As such, hardly it can be solved. But let us read this equation as an equation of the second degree about a . As such, it has a representation

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

Factoring the left side of the equation, we obtain:

$$\begin{aligned}
a^2 - (2x^2 + 1) + x^4 - x &= a^2 - 2 \cdot \frac{2x^2 + 1}{2} \cdot a + \left(\frac{2x^2 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x^2 + 1}{2}\right) + (x^4 - x) \\
&= \left(a - \frac{2x^2 + 1}{2}\right)^2 - \frac{4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 + 4x}{4} \\
&= \left(a - \frac{2x^2 + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x + 1}{2}\right)^2 \\
&= \left(a - \frac{2x^2 + 1}{2} - \frac{2x + 1}{2}\right) \cdot \left(a - \frac{2x^2 + 1}{2} + \frac{2x + 1}{2}\right) \\
&= (a - (x^2 - x)) \cdot (a - (x^2 + x + 1)).
\end{aligned}$$

This enables us to split our equation into two equations of second degree about x and thus to solve the given equation. We omit details.

EXAMPLE. Solve the equation

$$x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0.$$

SOLUTION. This is cubic equation about x . As such, hardly it can be solved. But... Let us read this equation as a quadratic equation about $\dots \sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^2 - x^2 \sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0.$$

The discriminant of this equation is equal to

$$D = x^4 - 4(x^3 - x^2) = x^2(x^2 - 4x + 4) = (x(x - 2))^2 = (x^2 - 2x)^2.$$

So, by the formula of roots of quadratic equation we have

$$\sqrt{2} = \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{2} \quad \text{or} \quad \sqrt{2} = \frac{x^2 + (x^2 - 2x)}{2}.$$

First equation gives one root $x = \sqrt{2}$, second equation give two else roots:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}.$$

Semantic reading in the solving of irrational equations

What is telling traditional didactic about the solving of the equations of the form $\sqrt{A} = B$? It is telling that for solving these equations one must 1) square both sides of the equation and 2) delete the extraction roots. After that it is proved that for deleting the extraction roots one must add to the squared equation the condition of non-negativity of B . So, after approximately of 1.5 pages of justifications, is made

the conclusion that the equation $\sqrt{A} = B$ is equivalent to the system $\begin{cases} A = B^2, \\ B \geq 0. \end{cases}$ But

look at the result:

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

What is it? It is the definition of the arithmetical square root. So, instead of 1.5 pages of tedious considerations one would better read the equation semantically and write:

by the definition of the arithmetical square root, $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0, \\ B^2 = A. \end{cases}$

Now, we could consider sufficiently many of simple examples of equations of mentioned form. Instead of this we proceed directly to one the very difficult equations in order to demonstrate with its help the advantages of semantic reading.

EXAMPLE. Solve the equation

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

SOLUTION. ($\rightarrow$: From the equation to the possible answer) Let

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

Then, according to the definition of arithmetical square root,

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = a - \sqrt{a + x}. \end{cases}$$

Let

$$y = \sqrt{a + x}.$$

Then

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y^2 = a + x. \end{cases}$$

After that in the whole we have

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0, \\ x^2 = a - y, \\ y^2 = a + x. \end{cases}$$

From two equations of this system we have, that

$$x^2 - y^2 = -(x + y)$$

whence

$$x + y = 0 \quad \text{or} \quad x - y = -1.$$

In the first case

$$x = y = 0 \text{ (because of } x \geq 0, y \geq 0), \text{ and, thereby } a = 0,$$

so that

$$x = y = a = 0.$$

In the second case $y = x + 1$, therefore $x^2 = a - (x + 1)$, i.e.

$$x^2 + x + (1 - a) = 0.$$

If $D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3 < 0$, i.e. $a < \frac{3}{4}$, this equation (and, therefore, the given equation) does not have roots. And if $D = 4a - 3 \geq 0$, i.e. $a \geq \frac{3}{4}$, this equation has roots

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

The least root of this equation, $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, does not fulfill the demand $x \geq 0$ and, therefore, is not a root of the given equation. The second root, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$, is a root of the given equation iff it is nonnegative, i.e. iff $a \geq 1$ (the reader can easily establish that in case $a \geq 1$, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \geq 0$).

Let us summarize:

if the given equation is satisfied, then ($a = 0$ and $x = 0$) or

$$(a \geq 1 \text{ and } x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}).$$

[This is a possible answer. We must call it possible because we only established that it follows from the equation but we do not know if the converse is true. Now we must verify if the converse is true.]

($\leftarrow$: From the possible answer to the equation) So, let

$$(a = 0 \text{ and } x = 0) \text{ or } (a \geq 1 \text{ and } x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}).$$

If $a = 0$ and $x = 0$ all is clear. Let

$$a \geq 1 \text{ and } x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}.$$

We would like to show that

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

[Can we do it? Yes, we can: semantic reading will help us. But this will be somewhat another kind of semantic reading. In the first part of our solution we supposed that equation is fulfilled, read the equation semantically and draw the conclusions, that follows from this supposition. In this reverse part we also will read the equation semantically but what we will see will not be the conclusions, these will be the statements which are desired in order to the equation would be fulfilled. Naturally, we will call such application of the semantic reading by *reverse semantic reading*. After that let us proceed.]

Applying the reverse semantic reading to the given equation we see that we would like to show that x is non-negative number which square is equal to the difference between a and non-negative number which square equals $a + x$. The desire naturally arouses to look at this last nonnegative number, i.e. to find the arithmetical

square root of $a + x$. Standard way to do this is to find somewhere outside $a + x$ some non-negative number and verify that its square equals $a + x$. It is absolutely non-clear how we can do it. But with the help of reverse semantic reading we can easily find the desired arithmetical square root *inside* $a + x$! Look:

$$\begin{aligned} a + x &= a - \frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}} \\ &= a - \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \\ &= \left(\sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Because of the quantity in parentheses is non-negative and its square equals $a + x$ we conclude that this quantity is the arithmetical square root of $a + x$, i.e.

$$\sqrt{a + x} = \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Further we have to show that non-negative square root of $a - \sqrt{a + x}$ exists and equals x . But now we already know how we can do it: to find with the help of reverse semantic reading the desired arithmetical square root *inside* $a - \sqrt{a + x}$ and to see that it equals x . We have:

$$\begin{aligned} a - \sqrt{a + x} &= a - \frac{1}{2} - \sqrt{a - \frac{3}{4}} \\ &= a - \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a - \frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \\ &= \left(\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= x^2. \end{aligned}$$

Thus, x is nonnegative number which square equals $a - \sqrt{a + x}$. This is precisely the assertion that $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

In the total we have that the given equation is fulfilled if and only if $a = 0$ and $x = 0$ or $a \geq 1$ and $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}$.

Isn't this pure poetry?

EXAMPLE. Let a sequence be given for which every sum of first n terms can be evaluated by the formula $S_n = 2^n - 1$. Is this sequence a geometric progression?

SOLUTION. Denote this sequence by (a_n) . From the definition of S_n we have $a_1 = S_1$ and $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ for all $n \geq 1$. But according the problem statement,

$S_n = 2^n - 1$ for all $n \geq 1$. Therefore, $a_1 = 2^1 - 1 \neq 0$ and, for all $n \geq 1$,
 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n = 2^{n-1} \cdot 2 = a_n \cdot 2$.

Thereby (with the help of semantic reading), the first term of the sequence is non-zero, and every term after first (a_{n+1}) is equal to the previous term (a_n) multiplied by a fixed quantity (2). This means that (a_n) is geometric progression (with common ratio 2).

All previous examples were from the area of algebra. Now let us turn to geometry.

Semantic reading in the geometrical problems

EXAMPLE. Find the lengths of medians of the triangle with the side lengths a , b , c .

SOLUTION. Let ABC be a triangle with $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ and mid-points C_1 , B_1 , A_1 of these sides respectively. Let us find the length m_a of the median AA_1 .

[If we will think about AA_1 only as median hardly we can find its length. So, we must see in AA_1 something else. And we can do it.]

Draw midlines of the triangle. Then we will see in AA_1 one of the diagonals of the parallelogram $AB_1A_1C_1$ with another diagonal B_1C_1 . This enables us to conclude that

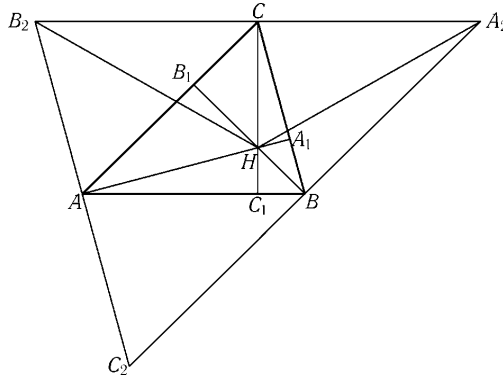
$$m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

and thus easily find the desired m_a .

EXAMPLE. Altitudes of the triangle ABC intersects in the point H . The segment CH is equal to the radius of the circle circumscribed about the triangle. Find the angle ACB .

SOLUTION. [The statement "the segment CH is equal to the radius of the circle circumscribed about a triangle" has very little geometrical sense for us. We know what is "the radius ...", but this segment... Where from it fell down and what we can do with it? Again we are in the situation where we need semantic reading. But how can we apply it here?]

Draw lines through vertices of the triangle in parallel to its opposite sides (see the figure below). Denote the intersection points of these lines by A_2 , B_2 , C_2 . Consider the triangle $A_2B_2C_2$.



The lines containing altitudes of the given triangle are perpendicular bisectors of the sides of the triangle $A_2B_2C_2$, and H is the center of the circumscribed circle for it. Moreover, the triangle $A_2B_2C_2$ is similar to the given triangle with the coefficient 2. It follows that the radius of the circle circumscribed about the triangle $A_2B_2C_2$ is twice as large as the radius of the circle circumscribed about the given triangle. Draw the radiuses HA_2 and HB_2 . In each of the triangles CHA_2 and CHB_2 the leg CH is equal to the half of hypotenuse. Therefore, $\angle CA_2H = 30^\circ = \angle CB_2H$ and, due to this, $\angle A_2HB_2 = 120^\circ$. This is central angle of the of the circle circumscribed about the triangle $A_2B_2C_2$, while C_2 is inscribed angle which vertex lies on same side with H with respect to A_2B_2 . Now, $\angle ACB = \angle C_2 = 60^\circ$.

Semantic reading in the calculus

One of the areas where semantic reading is vital and highly intensively exploited is integral calculus. We demonstrate this by the following

EXAMPLE. *Take the integral*

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

SOLUTION. Note that

$$\frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} \cdot dx$$

and that $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Due to this observations the integrand takes the form

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx$$

and we will have

$$I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx.$$

To go further we must manage to see that

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d \tan x \quad \text{and that} \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan^2 x \, d \tan x.$$

After that we must see that

$$\int d \tan x \quad \text{is} \quad \int u \, du \quad \text{with} \quad u = \tan x$$

and also that

$$\int \tan^2 x \, d \tan x \quad \text{is} \quad \int u^2 \, du \quad \text{with} \quad u = \tan x.$$

All of these will enable us to find at last that

$$I = \tan x + \frac{1}{2} \tan^3 x + C.$$

This example (one of the simplest in the integral calculus!) shows with great evidence that integral calculus is literally pierced by the semantic reading. It shows also why integral calculus is so difficult for our students. This is because the integral calculus is an area in which customary mechanical actions are impotent whereas uncustomary semantic reading is vital.

Concluding remarks

Now the question arouses naturally: need we always apply semantic reading. The answer is "No". There exist situations where is needed nothing but mechanical actions. And there exist different situations where semantic reading is vital. Look at the following remarkable quotations from the works of outstanding thinkers.

GOTTLOB FREGE: "When we examine what actually goes on in our mind when we are doing intellectual work, we find that it is by no means always the case that a thought is present to our consciousness which is clear in all its parts. For example, when we use the word 'integral', are we always conscious of everything appertaining to its sense? I believe that this is only very seldom the case. Usually just the word is present to our consciousness, allied no doubt with a more or less dim awareness that this word is a sign which has a sense, and that we can, if we wish, call this sense to mind. But we are usually content with the knowledge that we can do this. If we tried to call to mind everything appertaining to the sense of this word, we should make no headway. Our minds are simply not comprehensive enough. We often need to use a sign with which we associate a very complex sense. Such a sign seems, so to speak, a receptacle for the sense, so that we can carry it with us, while being always aware that we can open this receptacle should we have need of what it contains. It follows from this that a thought, as I understand the word, is in no way to be identified with a content of my consciousness. If therefore we need such signs—signs in which, as it were, we conceal a very complex sense as in a receptacle—we also need definitions so that we can cram this sense into the receptacle and take it

out again. So if from a logical point of view definitions are at bottom quite inessential, they are nevertheless of great importance for thinking as it actually takes place in human beings" [Frege G. (2014), p. 209].

BERTRAND RUSSELL: "Language, once evolved, acquires a kind of autonomy: we can know, especially in mathematics, that a sentence asserts something true, although what it asserts is too complex to be apprehended even by the best minds. Let us consider for a moment what happens psychologically in such cases.

Take, for instance, the ... statement about the ratio of the circumference of a circle to the diameter. Suppose you are a brewer, and you desire hoops of a given diameter for your beer barrels, then the sentence gives you a rule by which you can find out how much material you will need. This rule may consist of a fresh sentence for each decimal point, and there is therefore no need ever to grasp its significance as a whole. The autonomy of language enables you to forego this tedious process of interpretation except at crucial moments" [Russell B. (2009), p. 58].

Just so! "Except at crucial moments". But these "crucial moments" really occur and not so rarely. At these moments namely mechanical actions may be awkward and tedious while lucky new interpretation vital and fruitful.

References

- Freudenthal H.(1991) *Revisiting mathematical education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Frege G. (1914) *Logik in der Mathematik*. In: Hans Hermes, Friedrich Kambartel, and Friedrich Kaulbach, editors. *Gottlob Frege: Posthumous Writings*. The University of Chicago Press, 1979.
- Russell B. (2009) *Human knowledge*. London and New York: Taylor & Francis Routledge.

СЕМАНТИЧКО ЧИТАЊЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Резиме. Гете је једном рекао да је поезија вештина стављања четири реченице у два реда. У складу са овом дефиницијом, сматрамо да је математика грана поезије, и то највишег реда. Зато је у настави математике важно да ученике научимо да у реченицама виде што више могућих значења (то се зове семантичко читање). На пример, у реченици $a + b = 0$, где су a и b реалне варијабле, можемо пронаћи најмање четири значења: 1) збир бројева A и B једнак је 0; 2) A је број чији збир са b износи 0, тј. a је супротно од b , дакле $a = -b$; аналогно томе, 3) $b = -a$: и, комбиновањем, 4) $a = -(-a)$. Свакако је веома важно да ученици буду у стању да разумеју сва ова значења. Циљ нашег рада је упоређивање два приступа у настави математике: приступ који се заснива на активном раду и приступ који захтева семантичко читање.

Кључне речи: математика, настава математике, активни рад, семантичко читање.

Ненад Вуловић

Милан Миликић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Јагодина

vlnenad@gmail.com

НАЦИОНАЛНИ ОКВИР ИСХОДА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ЧЕТВРТОГ РАЗРЕДА

Айсіракиј. У овом раду извршићемо анализу постигнућа ученика четвртог разреда на окружном такмичењу из математике у коме су учествовали ученици са територије 24 округа у Републици Србије. Узорак истраживања представља 1560 ученика четвртог разреда. Као инструмент у истраживању коришћен је нестандардизовани тест од 5 задатака који је саставила Државна комисија за такмичење ученика основних школа. При обради добијених података коришћена је статистичка обрада података квалитативном и стандардном квантитативном анализом. Један од најважнијих резултата јесте да постоје разлике у постигнућима ученика у односу на пол. Такође, постоје знатне разлике по окрузима у Србији у постигнућима ученика. Анализа свих ових фактора резултира закључком да у раду са ученицима треба обратити више пажње на: садржаје редовне наставе, развијање интуитивног наслуђивања решења, развијање дивергентног мишљења, различите приступе решавању истог проблема и боље увежбавање геометријских садржаја са већим степеном разумевања. Поред овога, као приличан проблем уочени су и различити начини вредновања постигнућа ученика по окрузима и велика одступања од званичног Правилника Друштва математичара Србије.

Кључне речи: математика, такмичење, четврти разред, основна школа

Увод

Деца која поседују одређене особине, знања или способности изнад свог узраста одувек су била предмет интересовања одраслих. Сви директни и индиректни актери у васпитно-образовном процесу дуги низ година проучавају развој ових појединаца у покушају да схвате услове који олакшавају или, пак, отежавају њихов развитака и напредака. Развој потенцијала који појединци поседују зависи како од особина самог ученика, тако и од подршке околине (ту пре свега мислимо на родитеље и школу).

Систематско образовање даровитих у нашој земљи није концепцијски инкорпорирано у образовни систем. Користе се различити критеријуми за откривање и идентификацију потенцијално даровитих и у тај процес су укључени стручњаци из разних области. Данас су у употреби разни тестови за мерење количника интелигенције, тестови креативности, чек-листе за процену даровитости. Ниједан од ових инструмената не може прецизно дати одговор на то да ли је неки ученик даровит или не и зато је, уз њихову примену, неопходно и свакодневно посматрање и праћење ученика.

Имајући у виду својства и потребе ученика даровитих за математику, образовни програми који су им намењени морају бити диференцирани, индивидуализовани и подложни променама. Пре свега због испољеног изразитог интересовања за предмет, брзине којом уче и нивоа апстракције неопходно им је обезбедити продубљено учење, наставу која ће ангажовати ученика сразмерно његовим могућностима.

Будући да у широј популацији има релативно мало даровитих ученика за математику, формирање хомогених одељења могуће је за шире школско подручје. Како би се избегла појава елитизма у математици прибегава се одлуци да даровити ученици остану у оквиру редовних одељења са могућношћу проверавања својих способности и достигнућа на неком од математичких такмичења.

Из перспективе ученика, математичка такмичења имају много привлачних аспеката: увежбавање нових стратегија решавања проблема, размена искуства са другим ученицима сличних интересовања, упознавање са еминентним стручњацима из појединих области, јачање самопоуздања, покретачка снага за даљи рад и развој... Задаци које ученици раде по садржини произлазе из наставног плана и програма математике за редовну наставу, али га по захтевима и поступцима превазилазе.

Методологија истраживања

У овом раду извршићемо анализу постигнућа ученика четвртог разреда основних школа на окружном такмичењу из математике у коме су учествовали ученици са територије Републике Србије.

Узорак истраживања представља 1560 ученика четвртог разреда са територије 24 округа у Републици Србији, од тога је 58,4% дечака и 41,6% девојчица. У табели 1 дата је квантитативна и полна структура ученика по окрузима. Како ћемо у анализи резултата често користити прегледе по окрузима, ради лакше нотације користићемо следеће ознаке за округе: Шумадијски (1), Подунавски (2), Западнобачки (3), Пиротски (4), Сремски (5), Јужнобанатски (6), Јужнобачки (7), Расински (8), Севернобачки (9), Поморавски (10), Зајечар-

ски (11), Мачвански (Шабач) (12), Севернобанатски (13), Браничевски (14), Мачвански (Лозница) (15), Златиборски (16), Средњобанатски (17), Моравички (18), Пчињски (19), Рашки (20), Град Београд (21), Нишавски (22), Борски (23), Колубарски (24).

Табела 1. Квантитативна и полна структура ученика по окрузима

Округ	Број ученика	%	Дечаци (%)	Девојнице (%)
1	90	5,8	53,3	46,7
2	43	2,8	41,9	58,1
3	41	2,6	61,0	39,0
4	66	4,2	62,1	37,9
5	44	2,8	68,2	31,8
6	60	3,8	55,0	45,0
7	85	5,4	72,9	27,1
8	55	3,5	58,2	41,8
9	45	2,9	64,4	35,6
10	48	3,1	43,8	56,2
11	28	1,8	71,4	28,6
12	49	3,1	40,8	59,2
13	18	1,2	61,1	38,9
14	29	1,9	62,1	37,9
15	52	3,3	42,3	57,7
16	72	4,6	62,5	37,5
17	34	2,2	73,5	26,5
18	96	6,2	50,0	50,0
19	36	2,3	41,7	58,3
20	73	4,7	65,8	34,2
21	325	20,8	60,6	39,4
22	95	6,1	66,3	33,7
23	22	1,4	63,6	36,4
24	54	3,5	48,1	51,9
Укупно	1560	100	58,4	41,6

Као инструмент у истраживању коришћен је нестандардизовани тест од 5 задатака који је саставила Државна комисија за такмичење ученика основних школа. Садржаји који су заступљени у тесту су: (1) логичко-комбинаторне идеје са основним рачунским операцијама; (2) проблемски задаци са једначинама; (3) задаци нумерације; (4) дешифровање рачунских операција и (5) површина коцке. Сваки задатак на тесту бодован је у распону од 0 до 20 поена. Тестирање ученика извршено је 5. априла 2014. године.

При обради добијених података коришћена је статистичка обрада података квалитативном и стандардном квантитативном анализом. При статистичкој

обради података коришћен је програм SPSS, а од статистичких мера и поступака коришћени су: фреквенција, проценти, табеларно приказивање, аритметичка средина и одговарајући статистички тестови.

Резултати и дискусија

На основу података датих у табели 1, види се тенденција већег броја дечака од девојчица, тачније, укупан број дечака је за 70,83% већи од броја девојчица. Треба имати на уму да су ученици који учествују на окружном такмичењу претходно прошли два нивоа такмичења и да је полна структура ученика условљена претходним постигнућима ученика. У табели 2 приказан је просечан број поена по сваком задатку, укупно и у односу на пол ученика.

Табела 2. Просечан број поена по задацима.

Задатак	1.	2.	3.	4.	5.	Укупно
Број бодова	12,70	12,71	16,89	9,92	3,52	55,74
Дечаци	13,14	12,98	16,92	10,09	3,69	56,82
Девојчице	12,10	12,34	16,86	9,68	3,27	54,25

Посматрано глобално, на нивоу свих ученика IV разреда у Србији који су учествовали на окружном такмичењу, иако не постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика на појединачним задацима, осим у првом задатку ($U = 269902,5$; $p = ,002$), постоји статистички значајна разлика у укупним постигнућима ученика мушког и женског пола ($U = 273681$; $p = ,012$).

Овакви резултати нису неочекивани јер је показано да ученици мушког пола показују боље резултате на математичким такмичењима. Као илустрацију тврдње у табели 3 наводимо резултате са математичких такмичења АМЕ12 у САД од 1994. до 1998. године где су приказани подаци о успеху ученика у односу на пол, са просечном популацијом од око 240.000 ученика.

Табела 3. Успех ученика на такмичењу АМЕ12

година	пол (%)		просек	
	дечаци	девојчице	дечаци	девојчице
1994.	53,47	46,53	76,0	68,8
1995.	53,60	46,40	78,5	72,3
1996.	53,42	46,58	71,2	65,8
1997.	53,78	46,22	69,8	63,8
1998.	54,18	45,82	71,9	66,5

Сагледајмо укратко постигнућа ученика по задацима.

Први задатак: Користећи цифре 1, 3, 5, 7, 9 (сваку тачно једанпут) напиши један троцифрени и један двоцифрени број тако да: а) њихов збир буде

највећи могући; б) њихов збир буде најмањи могући; в) њихова разлика буде највећа могућа; г) њихова разлика буде најмања могућа.

Задатак се састојао из четири одвојена захтева који су од ученика захтевали састављање и издвајање одговарајућих бројева и формирање и одређивање екстремалног захтева. Прва два захтева односила су се на рачунску операцију сабирања и били су условно једноставнији јер имају по четири различита решења од којих је довољно само једно, док се друга два захтева односе на рачунску операцију одузимање и јединствени су у погледу решења. Иако је техника рада у постављеном задатку позната ученицима и путем редовне наставе, 10% ученика није успело да уради ниједан захтев задатка. Вишеструкост решења прва два захтева условљава и њихову бољу радљивост. Ученици који су делимично урадили задатак тачне одговоре дали су на та два захтева и то: 6,3% ученика урадило је један тачно, а 33,7% оба захтева, док друга два нису тачно урадили. Подаци показују да ученици, иако похађају четврти разред, боље раде са рачунском операцијом сабирања, док код одузимања постоје и на овом нивоу одређени делови који још увек нису увежбани у оквиру редовне наставе. У првом реду то је елементарно одузимање са прелазом преко месних вредности јединица и десетица, где су ученици који нису урадили задатак најчешће и грешили. Три од четири захтева урадило је 15,4% ученика, а 32,5% урадило је све захтеве тачно.

Други задатак: Отац, син и ћерка имају укупно 45 година. Ћерка има онолико месеци колико отац има година, а син има два пута више месеци него ћерка. Колико година има отац, колико син, а колико ћерка?

Други задатак је у потпуности тачно урадило 54,9% ученика. Сви ученици који су поставили коректну једначину успели су и да је реше. Велики проблем било је постављање саме једначине. Успостављање везе између броја година и броја месеци (x и $12x$) представљао је један део проблема (14,6% ученика није успоставило тражену везу), док се други део проблема огледао у једначењу старости појединаца (у месецима) и укупног броја година сво троје чланова породице (29,6% ученика није успело да изврши једначење како треба).

Трећи задатак: Одреди шест узастопних троцифрених бројева у чијем се запису појављује тачно 11 цифара 5.

Трећи задатак био је најбоље урађен задатак у читавом тесту. Иако захтев који се тражи у задатку није директно везан за било који строги математички поступак са којим су ученици директно упознати на редовној настави, чак 83,7% ученика је успело да дође до тачног решења. Интуитивно закључивање, запажање о броју тражених цифара у једном броју, и покушавање надомешћивања траженог броја тих цифара у низу показало се као захтев који је блискији ученицима од формалне примене стечених знања.

Четврти задатак: Дата су четири броја: $AABB$, CDD , CB , B . Почевши од другог, сваки број је једнак производу цифара претходног. Одреди број $AABB$. (У бројевима су једнаке цифре замењене истим словима, а различите различитим).

Стратегија израде четвртог задатка захтевала је од ученика уочавање законитости између узастопних бројева редом који је супротан од оног којим су бројеви наведени у поставци задатка. Међутим, 36,5% ученика није се снашло са оваквим приступом задатку и нису успели да реше нити један његов део. Прва препрека ученицима који су и кренули у правом смеру ка решењу представљало је делимично сагледавање вишеструких решења и разматрање њихове исправности. Конкретно, једнакост $C \cdot B = B$ интерпретирана у свести ученика IV разреда у 87,3% гласи „којим бројем треба помножити број B да би добили тај исти број“, па одатле и долази до вредности $C = 1$ и губитка једног потенцијалног решења $B = 0$. Од укупног броја ученика, њих 13,9% је након тачно одређене вредности за C стало са даљом израдом. Даља израда састојала се из још два дела, тј. одређивања вредности најпре за B и D ($1 \cdot D \cdot D = 10 + B$), а након тога и за A ($A \cdot A \cdot 6 \cdot 6 = 144$). Након првог корака стало је још 7,6% ученика, а до тачне вредности броја $AABB$ дошло је 41,4% ученика.

Пети задатак: Ако се ивица коцке повећа за 2cm, њена површина се повећа за 504cm^2 . Колика је површина коцке пре повећања странице?

Геометријски садржаји својим захтевима, поставком и визуелном представом ученицима представљају највећи проблем како у погледу схватања, тако и у погледу интерпретације услова и резултата. Са озбиљнијим изучавањем геометријских садржаја који су потребни за математичка такмичења почиње се у трећем разреду изучавањем садржаја о угловима и обиму, а након тога у четвртом разреду садржаја о површинама фигура и тела. Кратак период између изучавања садржаја о површинама, недовољна увежбаност садржаја и слабо сналажење са представама о једнакости површина разлог је да 75,5% ученика није уопште урадило ниједан део овог задатка. До уочавање степена увећања површине квадрата успело је да стигне 2,1% ученика који даље нису успели да сагледају увећање површине читаве коцке. 1,6% ученика је стигло до овог корака и даље нису успели да реше одговарајућу једначину, а само 14,7% је успело да у потпуности реши задатак.

Иако смо већ приказали укупна постигнућа ученика на територији Републике Србије (табела 2), сагледајмо постигнућа ученика по окрузима и полу (табела 4).

Констатовали смо да на нивоу читаве популације постоје статистички значајне разлике у постигнућима ученика у првом задатку и укупном резултату, али ако погледамо по окрузима, закључујемо да статистички значајне разлике постоје само у окрузима и задацима који су осенчени у табели 4, на осно-

ву чега можемо закључити да разлике у постигнућима између дечака и девојчица не постоје у 83,33% округа.

Окрузи у којима су ученици најлошије урадили тест су Севернобачки, Мачвански (Шабач) и Борски, а окрузи у којима су ученици најбоље урадили тест су Поморавски и Златиборски. Распон у просечном броју освојених поена ученика на тесту креће се од 43,86 до 65,85 поена. Посматрано по задацима, између појединих округа постоје драстичне разлике у просечном броју поена ученика и то посебно у другом, четвртом и петом задатку. Распон поена у другом задатку креће се у опсегу од 6,91 до 18,78 (најлошије у Борском и Пчињском, а најбоље у Севернобанатском округу), у четвртом од 3,11 до 14,72 (најлошије у Севернобачком и Севернобанатском, а најбоље у Златиборском округу), а у петом од 1,11 до 5,27 (најлошије у Севернобанатском и Борском, а најбоље у Мачванском округу (Лозница)). На основу резултата може се рећи да не постоје окрузи који су у предности по постигнућима ученика на сваком задатку теста.

Табела 4. Просечан број поена по окрузима

			1. зада- так	2. зада- так	3. зада- так	4. зада- так	5. зада- так	Укупно
Округ	1	Број поена	12,64	13,93	15,89	9,28	3,28	55,02
		Дечаци	13,33	12,92	16,25	9,17	2,81	54,48
		Девојчице	11,86	15,10	15,48	9,40	3,81	55,64
	2	Број поена	11,05	16,74	17,21	11,51	1,40	57,91
		Дечаци	13,61	18,89	18,89	11,39	0,56	63,33
		Девојчице	9,20	15,20	16,00	11,60	2,00	54,00
	3	Број поена	12,07	17,56	15,90	10,98	3,41	59,93
		Дечаци	11,80	16,80	16,16	10,40	4,00	59,16
		Девојчице	12,50	18,75	15,50	11,88	2,50	61,13
	4	Број поена	12,59	16,06	15,45	11,74	4,62	60,47
		Дечаци	13,07	18,54	15,12	13,29	5,49	65,51
		Девојчице	11,80	12,00	16,00	9,20	3,20	52,20
	5	Број поена	11,48	16,82	14,91	12,39	4,09	59,68
		Дечаци	12,33	18,00	15,27	11,67	5,33	62,60
		Девојчице	9,64	14,29	14,14	13,93	1,43	53,43
	6	Број поена	13,08	12,27	17,67	11,17	2,83	57,02
		Дечаци	13,03	11,76	19,39	12,12	2,91	59,21
		Девојчице	13,15	12,89	15,56	10,00	2,74	54,33
	7	Број поена	13,88	13,15	15,53	10,76	3,91	57,24
		Дечаци	14,03	13,16	14,84	11,05	3,26	56,34
		Девојчице	13,48	13,13	17,39	10,00	5,65	59,65
	8	Број поена	13,18	10,95	18,36	8,82	2,65	53,96
		Дечаци	13,44	11,25	17,81	10,31	3,25	56,06
		Девојчице	12,83	10,52	19,13	6,74	1,83	51,04
	9	Број поена	11,60	15,33	14,22	3,11	1,78	46,04
		Дечаци	12,21	14,41	14,48	3,28	2,41	46,79
		Девојчице	10,50	17,00	13,75	2,81	0,63	44,69

10	Број поена	13,63	17,75	17,29	12,81	4,38	65,85
	Дечаци	14,86	15,90	15,71	14,52	7,05	68,05
	Девојчице	12,67	19,19	18,52	11,48	2,30	64,15
11	Број поена	11,07	15,71	16,43	8,39	4,64	56,25
	Дечаци	11,75	16,00	17,00	7,00	3,10	54,85
	Девојчице	9,38	15,00	15,00	11,88	8,50	59,75
12	Број поена	10,57	10,29	15,88	7,35	2,41	46,49
	Дечаци	11,90	11,90	16,00	5,25	1,50	46,55
	Девојчице	9,66	9,17	15,79	8,79	3,03	46,45
13	Број поена	10,94	18,78	17,78	4,17	1,11	52,78
	Дечаци	11,18	19,82	16,36	4,55	0,00	51,91
	Девојчице	10,57	17,14	20,00	3,57	2,86	54,14
14	Број поена	12,17	15,86	17,24	10,69	3,10	59,07
	Дечаци	10,44	16,67	16,67	9,72	2,22	55,72
	Девојчице	15,00	14,55	18,18	12,27	4,55	64,55
15	Број поена	10,19	9,81	16,15	10,48	5,27	51,90
	Дечаци	10,68	8,27	14,55	12,05	4,55	50,09
	Девојчице	9,83	10,93	17,33	9,33	5,80	53,23
16	Број поена	13,26	12,17	18,19	14,72	4,22	62,57
	Дечаци	12,89	12,89	17,56	14,78	3,38	61,49
	Девојчице	13,89	10,96	19,29	14,63	5,63	64,37
17	Број поена	12,35	17,82	14,71	8,82	3,53	57,24
	Дечаци	12,40	18,80	15,20	8,20	2,88	57,48
	Девојчице	12,22	15,11	13,33	10,56	5,33	56,56
18	Број поена	13,70	12,53	18,24	11,72	3,98	60,17
	Дечаци	14,17	12,83	18,00	11,35	5,04	61,40
	Девојчице	13,23	12,23	18,48	12,08	2,92	58,94
19	Број поена	13,06	7,50	16,11	10,42	1,83	48,92
	Дечаци	14,00	7,60	16,00	12,00	1,87	51,47
	Девојчице	12,38	7,43	16,19	9,29	1,81	47,10
20	Број поена	11,10	16,14	17,53	11,92	3,40	59,81
	Дечаци	10,83	15,38	17,50	11,35	3,75	58,81
	Девојчице	11,60	17,60	17,60	13,00	2,72	61,72
21	Број поена	14,19	9,03	17,88	8,01	3,65	52,76
	Дечаци	14,66	9,08	18,02	8,58	4,11	54,45
	Девојчице	13,48	8,96	17,66	7,13	2,94	50,16
22	Број поена	13,05	11,68	17,68	9,40	4,87	56,69
	Дечаци	13,02	11,63	17,78	9,29	4,57	56,29
	Девојчице	13,13	11,78	17,50	9,63	5,47	57,50
23	Број поена	10,14	6,91	15,45	10,00	1,36	43,86
	Дечаци	10,57	6,57	17,14	8,57	0,71	43,57
	Девојчице	9,38	7,50	12,50	12,50	2,50	44,38
24	Број поена	10,28	14,07	15,65	10,65	2,59	53,24
	Дечаци	11,92	16,92	17,12	11,73	3,85	61,54
	Девојчице	8,75	11,43	14,29	9,64	1,43	45,54

Сходно односу броја дечака и девојчица на такмичењу очекивани су и подаци у табели 5 у којој дајемо преглед односа награда које су ученици освојили у односу на пол.

Табела 5. Награде ученика у односу на пол

Награде ученика	Дечаци (%)	Девојчице (%)
Прва награда	53,1	46,9
Друга награда	69,5	30,5
Трећа награда	59,8	40,2
Похвала	52,5	47,5
Укупно	59,2	40,8

За 45,1% више дечака је освојило награде у односу на девојчице, али овај проценат је у корелацији са процентуално већом заступљеношћу дечака. Мно-го интересантнија чињеница од ове јесу распони награда појединачно по окрузима, дати у табели 6.

Табела 6. Распон награда по окрузима

Округ	Прва награда	Друга награда	Трећа награда	Похвала
1	100	80-95	65-75	55-60
2	90-95	80-85	70-75	/*
3	100	90	80	50-75
4	90-100	80-85	70-75	55-65
5	95-100	85-90	80	70-75
6	100	80-86	60-75	50-57
7	100	85-90	80	71-75
8	90-100	70-80	60-66	50-56
9	80-84	60-65	50-55	35-45
10	100	80	75	70-74
11	95	85	80	70-75
12	90-100	75-85	60-70	/
13	90	80	68	/
14	100	80-85	70-78	60-66
15	93-100	75-80	60-66	/
16	100	80-90	75-77	/
17	98-100	71-80	70	60-65
18	100	81-95	80	60-75
19	93-95	75-79	65-66	50-61
20	100	90-95	80-84	70-75
21	90-100	80-85	70-78	/
22	98-100	80-95	65-78	55-61
23	71	72	61	/
24	90-100	80	70	60

*нема података о распону за похвале

У Правилнику о такмичењима ученика основних и средњих школа из математике и информатике у организацији Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије и Друштва математичара Србије, у делу 3. (Организатори такмичења), стоји: „Укупан број награда и похвала по правилу није већи од половине броја учесника по сваком разреду, при чему се око 5% ученика сваког разреда награђује првом наградом, око 10% ученика сваког разреда награђује другом наградом, око 15% ученика сваког разреда награђује трећом наградом. Укупан број награђених не треба да прелази 30% такмичара. Око 20% ученика сваког разреда награђује се похвалом.“ Међутим, увидом у резултате по окрузима може се уочити да се само у 50% округа организатори придржавају начина награђивања ученика описаног у Правилнику. Поред овог могу се уочити још два модалитета награђивања ученика:

- у 25% округа награђивање ученика врши се по принципу: прва награда (90-100 поена); друга награда (80-89 поена); трећа награда (70-79); похвала (60-69) без обзира на број ученика који освоје одређени број поена
- у 12,5% округа награђује се само три ученика са највећим бројем поена првом, другом и трећом наградом, док се други ученици не награђују ни похвалама.

У два округа видан је мали број првих и других награда, а велики број трећих награда, док је у једном округу подједнак број првих, других и трећих награда и у њему се не може уочити специфичан критеријум доделе награда.

Закључак

У складу са добијеним подацима можемо закључити да је потребна већа активација девојчица у популацији за математичка такмичења. Поред тога, потребно је и више времена посветити раду са њима јер су очигледна боља постигнућа дечака на такмичењима. У задацима које су ученици радили евидентан је превид у појединим садржајима редовне наставе, па је потребно у раду са младим математичарима обратити посебну пажњу на базичне садржаје редовне наставе, али поред тога и дозволити ученицима развијање интуитивних поступака наслуђивања решења и дивергентног начина размишљања. У раду са ученицима потребно је сагледавати што више различитих начина решавања истог проблема јер се уочава прилична униформисаност решења задатака. Од садржаја које ученици раде, потребно је посветити посебну пажњу обради и увежбавању геометријских садржаја јер су управо то садржаји које ученици најлошије раде. Посматрано по окрузима, у Србији постоје знатне разлике у постигнућима ученика и не постоје тачне локацијске одређености округа где су постигнућа боља. Поред тога, начине вредновања рада ученика

по окрузима треба уједначити и потребно је веће поштовање званичног правилника Друштва математичара Србије, као организатора такмичења, о награђивању ученика.

Литература

- Математичка такмичења ученика основних школа Републике Србије школске 2013/2014. године*, 2014, Београд: Друштво математичара Србије.
- Smith, C. (2005): *Teaching Gifted and Talented Pupils in the Primary School*, London: Paul Chapman Publishing.
- Elezović, N. (2005): Matematička natjecanja, *Matematika i škola*, Vol. 6, br. 30, 206-215.
- Strategija za razvoj i podršku darovitim učenicima (2015-2019) sa akcionim planom 2015-2016*, 2014, Podgorica: Ministarstvo prosvjete Crne Gore
- Shayshon, B., Gal, H., Tesler, B. & Ko, E.-S. (2014): Teaching mathematically talented students: a cross-cultural study about their teachers' views, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 87/3, Springer Netherlands, 409-438
- Wang, L., Li, X. & Li, N. (2014): Socio-economic status and mathematics achievement in China: a review, *ZDM Mathematics Education*, Vol. 46, Springer Berlin Heidelberg, 1051-1060
- Дејић, М., Тебић, С. & Михајловић, А. (2009): *Математичка даровитост и креативност*, Панчево: Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“.
- Ђорђевић, Ј. (1997): *Насијава и учење у савременој школи*, Београд: Учитељски факултет Београд.

KNOWLEDGE TRANSFER FROM CLASSROOM TO SUBJECT TEACHING THROUGH THE PRISM OF MATHEMATICAL COMPETITIONS

Summary. In this paper we will present some of the students' results at the regional primary school mathematics competition. Results will be presented through comparative analysis of ideas and results required for specific tasks groups in particular classes and they will be approached from the aspect of several independent variables. The sample of our research was consisted of 4801 Serbian students from the third to eight grade of primary school. All students completed the test that was consisted of 5 tasks for each grade. These tests were prepared by the State Commission for primary school competition.

Key words: mathematics, competition, fourth grade, primary school.

Сања М. Маричић

Крстивоје М. Шпијуновић

Универзитет у Крагујевцу, Учитељски факултет у Ужицу

sanjamaricic10@gmail.com

ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ У ПЛАНИРАЊУ И ПРИПРЕМАЊУ ПОЧЕТНЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ ИЗ УГЛА УЧИТЕЉА¹

Апстракт. Доношење и примена образовних стандарда постигнућа за крај првог циклуса основног образовања донело је извесне промене и у почетној настави математике. Оне се односе на целокупну организацију почетне наставе математике – планирање и припремање рада, рад учитеља и ученика, вредновање остварених резултата. Имајући то у виду, аутори су на узорку од 216 учитеља организовали истраживање с циљем да испитају њихово мишљење о улози образовних стандарда у планирању рада у почетној настави математике, њиховом утицају на начин припремања за конкретан час и избору садржаја на начин који омогућава да се може пратити оствареност стандарда по нивоима постигнућа. Резултати добијени истраживањем показују да образовни стандарди доприносе јаснијој оријентацији у планирању и организовању наставе математике у млађим разредима основне школе и избору садржаја који омогућавају праћење остварености стандарда на три нивоа постигнућа. Међутим, у поступку припремања за конкретне часове учитељи се још увек недовољно руководе образовним стандардима.

Кључне речи: образовни стандарди постигнућа, почетна настава математике, учитељ, планирање наставе

Увод

Унапредити васпитно-образовни рад, створити концепт квалитетног, приступачног образовања које ће бити у складу са могућностима појединца, у коме ће он моћи максимално да оствари своје потенцијале, с једне, а с друге стране постићи конкурентност на тржишту друштва знања, изазови су са који-

¹ Рад је настао у оквиру пројекта *Настава и учење: проблеми, циљеви и перспективе*, бр. 179026, чији је носилац Учитељски факултет у Ужицу, а који финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

ма се суочавају све државе света. На том плану нарочито су видљиве промене у померању фокуса са образовних садржаја и циљева образовања на исходе образовања (outcomes based education), односно на образовање које је засновано на образовним стандардима постигнућа (standard based education).

Први кораци на овом плану начињени су у области математичког образовања, 1989. године, када су на иницијативу *Националног савета наставника математике* (*National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*) донети стандарди у овој области. Касније су донети бројни правни оквири и документи (*Improving America's School Act*, 1994; *Goals 2000: Educate America Act* и други) којима се уређују и доносе национални образовни стандарди, као и стандарди за поједина предметна подручја. Почетком XXI века, нарочито се оснажује и иницијатива, која је 2002. године објављена у форми закона под називом *No Child Left Behind* (NCLB, *Ниједно дете не сме да заостaje*), по којој свако дете без обзира на разлике мора да достигне постављене стандарде образовања.

Србија се последњих година прикључила глобалним реформским покретима увођења образовних стандарда у образовни систем, што је резултирало доношењем *Образовних стандарда за крај основног образовања и васпитања* за десет наставних предмета (српски језик, математика, историја, географија, биологија, физика, хемија, музичка култура, ликовна култура и физичко васпитање). На основу ових стандарда донети су и *Образовни стандарди испитивања за крај првог циклуса основног образовања и васпитања* за три наставна предмета (српски језик, математика и природа и друштво), који су усвојени 2011. године.

Увођење образовних стандарда је са садржаја и циљева образовања „померило фокус на исходе образовања, тј. знања, вештине, ставове и вредности које ученик треба да научи и развије кроз учешће у образовном процесу“ (Бауцал, 2013: 8). Они одређују минимални ниво компетенција које се очекују од свих ученика на одређеном нивоу постигнућа (OECD, 2005) и „служе као референтни оквир за програмирање, организацију и извођење процеса поучавања и учења у школи и као основа за евалуацију постигнућа ученика“ (Palekčić, 2007: 86). Поред тога што треба да осигурају обавезно образовање и једнака права за све ученике, већу проходност у образовном систему, флексибилност школског система, транспарентност и помоћ свим заинтересованим странама у разумевању основних циљева школе, они остављају и велику слободу у планирању наставе и учења, развијању компетенција ученика, критеријума за вредновање резултата учења и обезбеђују повратну информацију наставницима и школама о властитом раду. Њихова примена долази до изражаја у „планирању и програмирању наставе, осмишљавању активности ученика, избору начина проверавања и оцењивања, избору задатака и вежби, самовредновању и вредновању резултата поучавања и учења“ (Ђелић, 2014: 57).

Доношење и примена образовних стандарда постигнућа донели су промене и у почетној настави математике. Те промене нису делимичне и „не односе само на поједине сегменте рада учитеља, већ на целокупну организацију почетне наставе математике – планирање, рад учитеља и ученика у настави и вредновање остварених резултата“ (Маричић, Шпијуновић, 2013: 446). Циљ и задаци образовања су „операционализовани од стране стручњака преко кључних компетенција које ученици у образовно-васпитном систему треба да постигну“ (Маричић, 2012: 537) за разлику од стања улазног усмеравања образовног система преко наставних планова и програма. Сада се „општи циљеви образовања конкретизују у облику налога за деловање који утврђују шта поједини ученици морају знати и умети ако те циљеве сматрамо досегнутим“ (Lersch, 2005: 90). Отуда образовни стандарди постигнућа представљају основу на основу које „учитељ одређује и бира оптималну методологију рада, која ће уважавајући потребе, интересовања и могућности ученика омогућити остваривање одговарајућих стандарда постигнућа“ (Маричић, Шпијуновић, 2014: 23). То значи да стандарди у почетној настави математике треба да „подстакну учитеље да стварају услове, креирају окружење које је прилагођено учениковим могућностима и усмерено на његов развој, одаберу садржаје, поступке, методе, облике рада и друго, како би ученици на крају одређеног образовног нивоа поседовали знања одређеног нивоа квалитета“ (Маричић, 2012: 542).

Према томе, образовни стандарди, између осталог, представљају основу за планирање наставе, основу за припремање за конкретан час, избор садржаја за час и вредновање. Међутим, каква је ситуација у пракси и да ли су учитељи препознали улогу стандарда у овим сегментима рада у настави математике, још увек поуздано не знамо. Резултати неких истраживања показују да ставови учитеља према образовним стандардима нису негативни, али да постоји извесна резерва према њима (Ђелић, 2014; Маричић, Шпијуновић, 2013, 2014). Критичари образовних стандарда истичу да образовни стандарди „као обавезујуће развојне норме противурече природи процеса образовања, а као мерила (развоја личности) они немају смисла, јер особа као индивидуалитет може бити једино сама себи мерило“ (Гојков, 2012: 92), као и да постоје и „*немерљива* понашања ученика, а која су одређена као пожељни образовни и наставни циљеви“ (Гашић-Павишић, 2012: 10).

У овом раду смо желели да сагледамо улогу образовних стандарда само у сегменту планирања наставе математике. У том циљу смо организовали истраживање како бисмо испитали мишљења учитеља о улози образовних стандарда у планирању рада у почетној настави математике, њиховом утицају на начин припремања за конкретан час и избору садржаја на начин који омогућава да се може пратити оствареност стандарда по нивоима постигнућа.

Методологија истраживања

Истраживање је обављено у мају 2013. године на узорку ($N = 216$) који је одабран из популације учитеља запослених у 44 основне школе на територији Републике Србије. У истраживању су учествовали учитељи различитог радног искуства и различитог образовања. Међу њима 49 или 22.7% имало је мање од 12 година радног искуства у настави, 45 или 20.8% имало је више од 25 година рада у настави, док је највећи број учитеља (122 или 56.5%) имао између 13 и 25 година радног искуства (Табела 1).

Табела 1. Структура узорка с обзиром на дужину радног искуства учитеља

Радно искуство	f	%
До 12 година	49	22.7
Од 13 до 24 године	122	56.5
Више од 25 година	45	20.8
Укупно	216	100

Када је у питању стручна спрема, међу анкетираним учитељима је 161 или 74.5% учитеља имало завршене академске студије, док је 55 или 25.5% имало завршену вишу школу (Табела 2).

Табела 2. Структура узорка с обзиром на стручну спрему учитеља

Стручна спрема	f	%
Виша	55	25.5
Висока	161	74.5
Укупно	216	100

Истраживање је засновано на примени дескриптивне методе. Подаци неопходни за истраживање прикупљени су анкетирањем. Сачинили смо анкетни упитник затвореног типа у коме су учитељи ставове изражавали избором одговора који одражава њихово мишљење о датом питању. Истраживање је било анонимно, како би се осигурала искреност испитаника и избегло давање пожељних одговора. Вредност Cronbach alpha коефицијента (0.897) указује на добру поузданост инструмента и оправдава његову прихватљивост.

Независну варијаблу чинила су следећа обележја учитеља: године рада у настави (до 12 година, од 13 до 24 године, више од 25 година) и стручна спрема (виша, висока).

Добијени подаци обрађени су у статистичком пакету IBM SPSS Statistics 20. Од мера дескриптивне статистике коришћене су фреквенције и проценти.

Од анализа које омогућавају статистичко закључивање коришћен је хи квадрат тест.

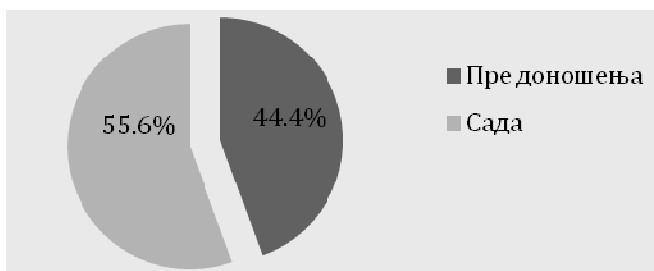
Резултати истраживања

Улога образовних стандарда у планирању и организовању наставе математике

С обзиром на то да образовни стандарди постигнућа у првом реду служе као оријентир за планирање и организацију наставе математике, желели смо да испитамо да ли је њихово доношење допринело побољшању рада на овом плану. Конкретно, од учитеља смо желели да сазнамо да ли јаснију оријентацију у планирању и организовању наставе математике у млађим разредима основне школе имају сада, када су образовни стандарди донети, или су је имали пре њиховог доношења.

Увидом у *Табелу 3* увиђамо прилично подељена мишљења учитеља о овом питању. Јаснију оријентацију у планирању и организовању рада у настави математике има 120 или 55.6% *од када су уведени образовни стандарди постигнућа*, док 96 или 44.4% сматра да је то било *пре доношења образовних стандарда постигнућа* (Графикон 1, Табела 3).

Графикон 1. Оријентација при планирању и организовању рада у настави математике



Анализа ставова учитеља у зависности од година радног искуства показује да учитељи који имају најмање радног искуства (мање од 12 година) најпозитивније оцењују допринос образовних стандарда у стварању јасније оријентације у планирању почетне наставе математике, док у њихов допринос најмање верују учитељи чије је радно искуство највеће (више од 25 година). Наиме, више од половине учитеља који имају више од 25 година радног искуства у настави (53.3%) сматра да су *пре доношења образовних стандарда имали јаснију оријентацију у планирању наставе математике*, док исти овај став изражава знатно мањи број учитеља (38.8%) који имају мање од 12 година рада у настави. Међутим, добијени хи-квадрат ($\chi^2 = 2.127$, $df = 2$, $p = .345$) не указује на статистичку значајност уочених разлика.

Табела 3. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда постигнућа у јаснијој оријентацију у планирању и организовању почетне наставе математике с обзиром на године радног искуства

Године радног искуства	Пре доношења		Сада		Укупно	
До 12	19		30		49	
		38.8%		61.2%	100%	$\chi^2 = 2.127$ $df = 2,$ $p = .345$
13-24	53		69		122	
		43.4%		56.6%	100%	
Више од 25	24		21		45	
		53.3%		46.7%	100%	
Укупно	96		120		216	
		44.4%		55.6%	100%	

Добијени резултати показују да су учитељи који имају мање радног искуства отворенији за промене, да су их спремније дочекали и брже се прилагодили на образовне стандарде постигнућа и планирање ослоњено на њих, док учитељи са више радног искуства више верују у планирање на које су навикли, те доношење образовних стандарда није допринело већем побољшању њиховог рада на овом плану.

Позитивније ставове о доприносу образовних стандарда у планирању у почетној настави математике изразили су учитељи који имају факултетско образовање (59%) у односу на оне који немају академско образовање (41%) (Табела 4). Међутим, те разлике нису статистички значајне ($\chi^2 = 3.049$, $df = 1$, $p = .081$).

Табела 4. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда постигнућа у јаснијој оријентацију у планирању и организовању почетне наставе математике с обзиром на стручну спрему

Стручна спрема	Пре доношења		Сада		Укупно	
Виша	30		25		55	
		54.5%		45.5%	100%	$\chi^2 = 3.049$ $df = 1,$ $p = .081$
Висока	66		95		161	
		41%		59%	100%	
Укупно	96		120		216	
		44.4%		55.6%	100%	

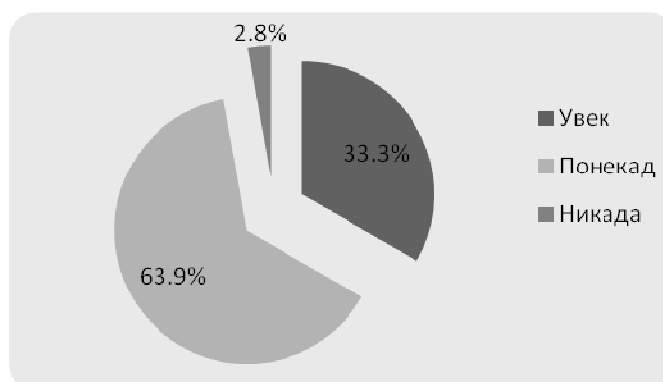
Иако добијени резултати упућују на закључак да је увођење образовних стандарда, по мишљењу већине учитеља, допринело да они имају јаснију оријентацију у планирању и организовању рада у настави математике у млађим разредима основне школе, ипак не можемо ово прихватити безрезервно, јер 44.4% учитеља не дели ово мишљење.

Улога образовних стандарда у припремању за час математике

Другим истраживачким задатком желели смо да испитамо у којој мери се учитељи приликом припремања за конкретан час руководе образовним стандардима постигнућа. Учитељи су свој став изражавали избором једног од понуђених ставова: увек, понекад и никада.

Увидом у Табелу 5 увиђамо да се само трећина учитеља (33.3%) за сваки час приликом припремања руководи дефинисаним образовним стандардима постигнућа, да највећи број учитеља (63.9%) то чини понекад, а да 2,8% то не чини никада (Графикон 2).

Графикон 2. Избор садржаја за час ослањањем на образовне стандарде постигнућа



Желели смо да испитамо да ли постоје разлике у ставовима међу учитељима с обзиром на радно искуство и стручну спрему.

Табела 5. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда приликом припремања за час с обзиром на радно искуство

Године радног искуства	Увек	Понекад	Никада	Укупно	$\chi^2 = 2.054$ $df = 4,$ $p = .726$
До 12	13	33	0	49	
	32.7%	67.3%	0%	100%	
13–24	41	77	4	122	
	33.6%	63.1%	3.3%	100%	
Више од 25	15	28	2	45	
	33.3%	62.2%	4.4%	100%	
Укупно	72	138	6	216	
	33.3%	63.9%	2.8%	100%	

Увидом у Табелу 5 уочавамо незнатне разлике у ставовима учитеља различитог радног искуства. Једино се међу учитељима који имају мање од 12 година радног искуства у настави ниједан учитељ није изјаснио да се *никада* не руководи образовним стандардима приликом припремања за конкретан час,

а највише (4.4%) их је међу учитељима који имају више од 25 година радног искуства. Занимљиво је да најмањи број учитеља (32.7%), који се приликом припремања за конкретан час *увек* руководи образовним стандардима, налази међу учитељима који имају мање од 12 година радног искуства, а највише (33.6%) међу учитељима који имају између 13 и 24 године рада у настави. Израчунавањем хи-квадрата ($\chi^2 = 2.054$, $df = 4$, $p = .726$) добили смо да уочене разлике нису статистички значајне.

Табела 6. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда приликом припремања за час с обзиром на стручну спрему

Стручна спрема	Увек	Понекад	Никада	Укупно	
Виша	15	37	3	55	$\chi^2 = 2.849$ $df = 2$, $p = .241$
	27.3%	67.3%	5.5%	100%	
Висока	57	101	3	161	
	35.4%	62.7%	1.9%	100%	
Укупно	72	138	6	216	
	33.3%	63.9%	2.8%	100%	

Анализа ставова у зависности од стручне спреме показује да се највећи број учитеља који се *увек* руководе образовним стандардима приликом припремања за конкретан час налази међу онима који имају завршене академске студије (35.4%), а најмањи међу учитељима који имају нижи ниво образовања (виша школа – 27.3%) (Табела 6). Осим тога, међу учитељима који су завршили вишу школу већи је број (5.5%) оних који су се изјаснили да се *никада* приликом припремања за конкретан час не руководе образовним стандардима, док је међу онима који имају завршене академске студије таквих учитеља 1.9%. Међутим, добијени хи квадрат ($\chi^2 = 2.849$, $df=2$, $p = .241$) не указује на статистичку значајност уочених разлика.

Добијени резултати упућују на закључак да већини учитеља образовни стандарди постигнућа не представљају окосницу у припремању, избору садржаја, метода, облика, средства, стратегија наставе за сваки час математике. Резултати, по којима они планирању, припремању и организовању наставе математике са аспекта образовних стандарда прилазе *иовремено* указује на ситуацију која говори да они нису безрезервно прихватили образовне стандарде и да не верују у потпуности у њих, да на тај начин покушавају да задовоље захтеве које пред њих поставља школска регулатива, а да притом више верују у рад на који су навикли.

Улога образовних стандарда у избору садржаја за час у настави математике

С обзиром на то да образовни стандарди постигнућа „нису само дескриптивни искази који дефинишу шта ће ученик знати и шта ће моћи да уради, већ имају и важну евалуативну функцију“ (Бауцал, 2013: 9) и да од учитеља, у највећој мери, зависи избор садржаја желели смо да испитамо у којој мери учитељи приликом припремања за час бирају садржаје тако да могу да прате оствареност по нивоима постигнућа. Учитељи су свој став изражавали избором једног од понуђених ставова: *увек*, *често*, *понекад* и *никада*.

Анализа мишљења учитеља показује да највећи број учитеља (119 или 55.1%) *често* бира садржаје за час тако да може да прати оствареност по нивоима постигнућа (Табела 7). Трећина њих (71 или 32.9%) то чини *понекад*, само 24 или 11.1% то чини *увек*, док су се само 2 или 0.9% учитеља изјаснили да то не чине *никада*.

Ако ове ставове анализирамо с обзиром на дужину радног искуства учитеља у настави увиђамо мале разлике, што нам и потврђује вредност хи-квадрат теста ($\chi^2 = 1.816$, $df=6$, $p = .936$). Желимо истаћи да су учитељи који су се изјаснили да за сваки час бирају садржаје тако да могу да прате оствареност на три нивоа постигнућа најбројнији (12.2%) међу учитељима који имају најмање радног искуства (од 12 година), а најмање бројни (8.9%) међу учитељима који имају највише искуства у раду (више од 25 година).

Табела 7. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда у избору садржаја за час с обзиром на радно искуство

Године радног искуства	Увек	Често	Понекад	Никада	Укупно	
До 12	6 12.2%	25 51%	17 34.7%	1 2%	49 100%	$\chi^2 = 1.816$ $df = 6$, $p = .936$
13 – 24	14 11.5%	69 56.6%	38 31.1%	1 0.8%	122 100%	
Више од 25	4 8.9%	25 55.6%	16 35.6%	0 0%	45 100%	
Укупно	24 11.1%	119 55.1%	71 32.9%	2 0.9%	216 100%	

Када је у питању стручна спрема, увиђамо да се учитељи који имају академско образовање (12.4%) приликом припремања за конкретан час више руководе образовним стандардима постигнућа у односу на оне који имају више образовање (7.3%). Најмање разлике међу учитељима различитог иницијалног образовања постоје при избору става *понекад* и *никада*. Добијени хи-квадрат тест ($\chi^2=1.985$, $df=3$, $p=.576$) указује да те разлике нису статистички значајне.

Табела 8. Мишљења учитеља о улози образовних стандарда у избору садржаја за час с обзиром на стручну спрему

Стручна спрема	Увек	Често	Понекад	Никада	Укупно	
Виша	4	33	18	0	55	$\chi^2 =$
	7.3%	60	32.7%	0%	100%	1.985
Висока	20	86	53	2	161	$df = 3,$
	12.4%	53.4%	32.9%	1.2%	100%	$p = .576$
Укупно	24	119	71	2	216	
	11.1%	55.1%	32.9%	0.9%	100%	

Добијени резултати упућују на закључак да највећи број учитеља *често* бира садржаје тако да може да прати оствареност стандарда на три нивоа постигнућа, да једна трећина њих то чини понекад, а само деветина то чини за сваки час.

Закључак и дискусија резултата

Добијени резултати истраживања упућују на закључак да је увођење образовних стандарда допринело да учитељи имају јаснију оријентацију у планирању и припремању наставе математике. Међутим знатан је и број учитеља (44.4%) који сматра да је јаснију оријентацију у планирању наставе математике имао пре доношења образовних стандарда постигнућа. Подељени ставови око улоге образовних стандарда у процесу планирања и организовања рада у почетној настави математике делимично су и резултат њихове кратке примене и заступљености, јер и сами учитељи још нису прошли један комплетан заокружен циклус њихове примене и мерења њихове остварености, неки чак нису ни прошли комплетну обуку за њихову примену, а неки од њих нису спремни на још једну у низу реформи у образовању. Учитељи углавном мисле да они *доприносе њодизању квалитета планирања у почетној настави математике*, али да са друге стране представљају само још један облик администрације и још једну додатну обавезу (Маричић, Шпијуновић, 2013).

Планирању, припремању и организовању наставе математике са стано-вишта образовних стандарда највећи број учитеља приступа *повремено*. До сличних резултата дошла је и Ј. Ђелић која закључује да учитељи „не перципирају стандарде постигнућа као функционалну алатку за програмирање рада“ (2014: 64). Добијени резултати показују да учитељи образовне стандарде не доживљавају као норму која им је прописана и која треба да буде безрезервно прихваћена и у складу са којом они треба да поступају, а нарочито да се њоме руководе при избору садржаја за конкретан час математике.

Када је у питању улога стандарда у избору садржаја за конкретан час и праћење остварености постигнућа на три нивоа, највећи број учитеља *честито* бира садржаје тако да може да прати оствареност на три нивоа постигнућа.

Анализа мишљења по независним варијаблама (године радног искуства и стручна спрема учитеља) показала је да се учитељи ни у једном од испитиваних елемената статистички значајно не разликују.

Добијени резултати, као и резултати других истраживања (Ђелић, 2104; Маричић, Шпијуновић, 2013, 2014) упућују на закључак да образовни стандарди постигнућа у образовном контексту нису у потпуности и безрезервно прихваћени од стране свих учесника васпитно-образовног рада. Можда је и рано давати било какве оцене с обзиром да су у употреби тек три године и да поузданије резултате можемо тек очекивати. Међутим, добијени резултати могу бити индикативни да се сагледа почетно стање и стекну први утисци о њиховој примени и доприносу који остварују у почетној настави математике, али исто тако могу представљати полазну основу за њихову популаризацију и усавршавање оних који их имплементирају како би у потпуности постали интегрални део васпитно-образовног система. Остаје за будућа истраживања, с протеком времена, да се сагледа јаснија слика о доприносу образовних стандарда у процесу планирања наставе математике у млађим разредима основне школе.

Литература

- Бауцал, А. (2103). Стандарди образовних постигнућа у Србији: искуства из прве деценије. *Иновације у настави*, XXVI (3), 7–23.
- Гашић-Павишић, С. (2012). Стандарди и исходи наставе природних наука у основној школи у Србији сагледаних у TIMSS контекстуалном оквиру, у: С. Маринковић (ур.). *Настава и учење: циљеви, стандарди, исходи* (1–14). Ужице: Учитељски факултет.
- Гојков, Г. (2012). Индикатори постигнућа изванредности и образовни стандарди. у: С. Маринковић (ур.). *Настава и учење: циљеви, стандарди, исходи* (85–100). Ужице: Учитељски факултет.
- Ђелић, Ј. (2014). Ставови учитеља о стандардима постигнућа из математике за крај првог циклуса. *Иновације у настави*, XXVII (2), 56–70.
- Lersch, R. (2005). Nastava kao čin uravnoteženja. *Pedagojska istraživanja*, II(1), 85–100.
- Маричић, С. (2012). Образовни стандарди и унапређивање почетне наставе математике. у: С. Маринковић (ур.). *Настава и учење: циљеви, стандарди, исходи* (535–548). Ужице: Учитељски факултет.
- Маричић, С., Шпијуновић К. (2013). Ставови учитеља о функцији и значају образовних стандарда у подизању квалитета почетне наставе математике. у Р. Николић (ур.). *Настава и учење – квалитет васпитно-образовног процеса*. (445–454). Ужице: Учитељски факултет.
- Маричић, С., Шпијуновић, К. (2014). Ставови учитеља о улози образовних стандарда у унапређивању почетне наставе математике. *Иновације у настави*, XXVII (1), 21–30.

OECD (2005). *Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary*. OECD.

Општински стандарди основног образовања – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика (2011). Београд: Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Palekčić, M. (2007). Od kurikuluma do obrazovnih standarda. u Previšić, V. (ur). *Kurikulum: teorija – metodologija – sadržaj – struktura* (39–115). Zagreb: Zavod za pedagogiju, Školska knjiga.

EDUCATION STANDARDS IN PLANNING AND PREPARING ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION FROM TEACHERS' PERSPECTIVE

Summary. The adoption and implementation of education standards of achievement at the end of the first cycle of primary education has brought certain changes in elementary mathematics education. These changes refer to the overall organization of elementary mathematics education – planning and preparing for work, the work of teachers and students, the evaluation of results. With this in mind, the authors of this paper organized a research on a sample of 216 students to examine their opinion on the role of education standards in the process of planning and preparing for work in elementary mathematics education, their influence on the methods of preparation for a specific class, and on the selection of contents that enables us to monitor the achievement of standards by levels of achievement. The results obtained in this research show that education standards contribute to a more coherent orientation in planning and preparing elementary mathematics education in junior grades of primary school, and to the selection of contents that enables us to monitor the achievement of standards on three levels of achievement, but also that teachers are still not sufficiently guided by education standards when in the process of preparing for specific classes.

Key words: education standards of achievement, elementary mathematics education, teacher, lesson planning

Славиша Јењић
Желимир Драгић
Филозофски факултет
Бања Лука
batojenjic@gmail.com

МАТЕМАТИЧКА РАДИОНИЦА У ФУНКЦИЈИ ПОПУЛАРИЗАЦИЈЕ РАЗРЕДНЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Айсіпракџи. Разредна настава математике игра кључну улогу у разумијевању математике, али и у каснијем „квалитетнијем“ учењу математике. Мањи је број оних ученика који показују интересовање за учење математике, а истовремено је већи број оних који математику доживљавају као „баук“, показују или доказују одређене пропусте у њеном почетном учењу. Није све тако лоше, како једни говоре, али није све ни на задовољавајућем нивоу, како ће други рећи. У сваком случају, може бити боље. Потребно је креирати нове приступе, тј. стварати нове трендове математичког учења на млађем основношколском узрасту. У овом раду сагледане су математичке радионице у разредној настави математике, њихово теоријско одређење, и примјери практичне реализације. Настојање је да се покаже да се путем математичке радионице у разредној настави може популаризовати почетна настава математике, да се њени садржаји могу учити и савлађивати на прихватљив и ученицима занимљив начин. Наглашен је значај радионице у развијању математичког мишљења, кооперативности и креативности ученика у раду и, коначно, припремање радионице од стране учитеља.

Кључне ријечи. разредна настава математике, математичка радионица, математичко мишљење

Уводна разматрања

Не постоји наставни предмет у школи, па тако и у разредној настави, који се може издвојити као мање важан, или као предмет чије учење у настави нема посебну вриједност. Међутим, постоје предмети који су ученицима мање или више интересантни. На другој страни, постоје предмети који су ученицима мање или више тешки за разумијевање. У том контексту треба посматрати предмете гдје се развијају естетске способности (ликовна или музичка култура), учење матерњег или страног језика, физичко васпитање, природа и друш-

тво, и наравно настава математике. За овај рад нарочито је интересантна почетна настава математике и успјешна реализација њених садржаја предвиђених наставним планом и програмом. Чињеница је да пропусти који се дешавају у њеном разумијевању воде ка кумулативности и стабилности неуспјеха. Кумулативност се примјећује у томе што се код ученика на један неуспјех надовезује други, због повезаности садржаја – неразумијевање једне цјелине води неразумијевању друге и сваке следеће. Све заједно доводи до стабилности у неуспјеху у учењу математике, а што је тешко поправити у редовној настави. Ово се препознаје код већине наставних предмета, али у почетној¹ настави математике је најизраженије. Интересантно запажа Краљић (2008: 118) у раду „Пад оцјена из математике на пријелазу из разредне у предметну наставу“. Он закључује да „на лествици најтежих предмета већини ученика на првом мјесту је математика. Садржаји учења су високе апстракције и ученици се могу изгубити, уколико покушају математику учити на једнак начин као и остале предмете“. Управо зато, неопходно је наћи модалитете рада који ће почетну наставу математике учинити интересантнијом за ученике, тако да она не буде „проблем“, већ популаран и за ученике интересантан предмет.

Почетна настава математике заузима значајно мјесто међу предметима који се налазе у Наставном плану и програму за основну школу. Примарна улога почетне наставе математике јесте да развија логичко мишљење ученика, да се открије и разумије суштина која се налази у одређеним појмовима, судовима и закључцима. Већ од првог разреда ученици у почетној настави математике користе једноставне менталне радње на основи посматрања, упоређивања, анализовања, синтетизовања, категоризације итд. Неминовност је да савремено друштво пред школу поставља високе стандарде у погледу образовања ученика, па је у школи XXI вијека неопходно давати велики значај ученичком размишљању, закључивању и мишљењу.

Због свих специфичности почетне наставе математике, наставнику није лако поучавати ученике, и немогуће је да сви ученици у потпуности савладају садржаје предвиђене Наставним планом и програмом. Резултати ће, ипак, бити видљиви ако сви учесници у наставном процесу дају свој максимум. Поливалентна примјена наставних метода, различити социјални облици рада, уважавање наставних принципа итд., учиниће почетну наставу математике ефикаснијом. Планирање, припремање и реализација математичких радионица ће наставу математике учинити интересантнијом, а истовремено и популарнијом међу ученицима разредне наставе. Док раде у радионицама, код ученика се активира мишљење, пажња, закључивање, препознаје се самостални рад ученика, који, опет, доприноси успјеху колектива или одјељења. „Бројна емпириј-

¹ У раду се равноправно користе термини *разредна настава математике* и *почетна настава математике*.

ска истраживања показала су да мисаоно активирање ученика и самостални рад у наставном процесу, посебно при рјешавању проблема, доприноси: повећању обима знања; трајности стечених знања; већој примјенивости знања; већој оспособљености за самостални рад и учење; развоју стваралачког мишљења; мотивисаности ученика; жељи за сарадњом са другима [...]“ (Краљевић, 2002: 68). С обзиром да се све ово препознаје и у математичким радионицама, а посебно сарадња са другим, у раду ћемо објаснити математичке радионице чија је реализација у функцији популаризације почетне наставе математике.

Унапређивање почетне наставе математике

Није спорно питање треба ли унапређивати почетну наставу математике. Важније питање јесте како је то могуће постићи. Одговор на ово питање је у наставниковом настојању да наставу максимално оптимизује, те да сазна на који начин ће поједини ученици боље схватати информације које на часу треба и меморисати и научити. Објашњавајући оптимизацију наставног процеса Вилотијевић (2000: 335) пише да „полазећи од конкретних услова, наставник треба да изабере, ради реализације постављеног циља, најбољи облик наставе, најбољу наставну методу, најбољу структуру часа да би све то, у складном јединству, дало најбољи могући резултат“. Оптимално треба тумачити као најбоље у датим (специфичним) условима, а јасно је да свака школа и свако одјељење има неке своје специфичности. Уважавајући специфичности почетне наставе математике, можемо констатовати да ћемо исту унаприједити будемо ли уважавали захтјеве оптимизације наставе.

Унаприједити наставу математике значи знати, али и примијенити различите стилове учења. Стилиове учења у почетној настави математике објашњавају, између осталих, и Егерић и Ђурић (2012). Издвајају ВАК теорију, према којој постоје три стила учења:

- ВИЗУЕЛНИ стил учења,
- АУДИТИВНИ стил учења,
- КИНЕСТЕТИЧКИ (телесни) стил учења.

Визуелни стил учења преферирају ученици који воле да самостално уче, а до информација долазе путем текста, слика и сл. Аудитивни стил учења је погоднији за рад у паровима или мањим групама, а до информација се долази слушајући предавања, кроз дискусије итд. Анализирајући наведену теорију, дошли смо до закључка да ће математичке радионице бити најефикасније за ученике који преферирају кинестетички стил учења. То су ученици који, према истим ауторима, најбоље уче кроз покрет, игру, глуму или конкретну радњу, активно истражујући свијет око себе. Ово не значи да ученици код којих је

доминантан један стил учења не могу сазнавати садржаје почетне наставе математике користећи се другим стилевима.

Математичка радионица је погодна за оптимизацију наставног процеса, јер ученици постижу добре резултате без обзира који стил учења преферирају, што значи да је погодна за унапређивање почетне наставе математике. Сваки ученик у раду пружа максимум, остварени резултати дају наду да ће и убудуће бити активни у процесу учења, а знања до којих долазе су трајна и примјењива. Математичка радионица је, према томе, средство популаризације наставе математике, тј. ефикасан модел мотивисања ученика за учење.

Начини мотивисања ученика за учење почетне наставе математике

Мотивацију можемо тумачити као покретачку енергију за вршење одређене активности. Мотивисати ученике да уче математику у разредној настави значи „навести разлоге и код ученика побудити знатижељу, потребу и побудити мотиве због којих ће они са вољом учити математику“ (Бањац, 2011: 8). Најзначајнији фактор који утиче на однос ученика према настави математике јесте интересовање за њу. Када се говори о развијању интересовања за учење почетне математике, треба разматрати два питања, и то:

- Како активирати ученичко интересовање за учење почетне наставе математике?
- Како започето интересовање развити и одржати?

Ово су два важна питања, но свакако нису једина. Сигурно да је за мотивацију ученика кључна улога наставника и његова стручно-методичка оспособљеност. Дobar наставник користиће различите могућности да би мотивисао ученике да раде. Бањац (2011) истиче да наставницима за мотивисање ученика у почетној настави математике могу бити од користи: садржаји занимљиве математике, филмови о животу и раду познатих математичара, гостовање у школи људи из мјеста или из школског окружења који су захваљујући математици постигли значајан успјех у животу и математичке радионице.

Садржаји занимљиве математике се могу укључити у садржаје редовне наставе, а могу се и организовати посебни часови занимљиве математике. Користе се задаци чији је садржај ученицима интересантан. То могу бити математичке загонетке, досјетке, магични квадрати, анегдоте из живота познатих математичара итд. Ове садржаје можемо користити у уводном и завршном дијелу часа. Важно је да овакве активности не ставе у други план редовну наставу, већ да оне буду функционално повезане. Гледајући занимљиве филмове о животу и раду познатих математичара, дјеца воде различите дискусије радио-

ничког типа у којима размјењују идеје, сазнања и утиске. Приликом гостовања људи из мјеста и околине, ученици слушају приче тих људи о томе како су они прихватили математику док су били њиховог узраста и како се код њих развило интересовање за математику.

Добра мотивација ученика требало би да резултира и успјешном реализацијом наставе. Могућности су велике, а наставник треба да их правилно користи. „На плану мотивисања ученика наставници имају низ могућности примене различитих средстава методе подстицања (похвале, обећање, бодрење, пример, награда, оцена, разговор, додатне инструкције, такмичење и др.). Битно је да ученици схвате и доживе наставникову добронамерност, његов став разумевања и праве педагошке бриге за њихов успех“ (Илић и сар., 2008: 51). Ово је, на одређени начин, правило за сваки наставни предмет, па тако и за наставу математике. Реализујући наставу математике кроз радионице, наставник има прилику да сваког ученика похвали, бодри, награди, оцијени, а ученици имају могућности да се такмиче, разговарају, затраже додатне инструкције, буду похваљени итд. Дакле, математичка радионица има и мотивациони значај за наставу математике, а то води ка популаризацији исте.

Математичке радионице у почетној настави математике (појам, улога и значај)

Појам *математичка радионица* се ријетко појављивао у старијој методичкој литератури. Мало је комплетнијих стручних радова који теоријски разматрају и анализирају радионице и описују њихов значај. Вјероватно је то један од разлога непостојања или ријетке реализације математичких радионица у разредној настави.

Иако се појам *математичка радионица* не одређује у педагошкој литератури, ми ћемо у овом раду покушати дати њену условну дефиницију. Прије тога сагледаћемо неколико тумачења и одређења појмова *радионица*, *педагошка радионица* и *радионичка активност*, које су објаснили поједини аутори. Тако налазимо да Станојловић (1999) радионице сматра као оквир за интерактивно учење. Он је у свом раду радионицу условно дефинисао као специфичан поступак васпитно-образовног рада у оквиру кога се, уз наглашену активност ученика, стичу нова знања и развијају способности или провјеравају, усавршавају раније стечена знања, способности и социјална искуства, и то по унапријед утврђеном „сценарију“ који се реализује под руководством наставника. Начин извођења радионица је најближи организацији групног облика васпитно-образовног рада. Дефиницију педагошке радионице је извео Сузић, који истиче да „педагошку радионицу можемо дефинисати као организациону форму активности у којој ученици играњем улога, презентацијом, читањем, рачунањем, цртањем и на други начин активно раде на градиву, самостално, у

међусобној интеракцији и уз помоћ наставника, остварујући циљеве учења“ (Сузић, 2005: 144–145). Поред ових, навешћемо нешто прецизнију и обухватнију дефиницију педагошке радионице коју су дали Узелац, Богнар и Багић, који истичу да „педагошка радионица, као специфичан облик групне интеракције, са својим главним обиљежјем – кружном комуникацијом, омогућава начине рада који су усмјерени на осјетилне, емоционалне и моралне, а не само интелектуалне функције дјетета и процес, те не на исход или резултат процеса“ (Узелац и сар., 1994: 1). О радионицама пише и Милијевић (2001), који наглашава повезаност интерактивног учења и радионичке активности. Данас постоји мноштво погодних и методички прикладних програмских садржаја који се могу реализовати путем радионичке активности. Радионичке активности, према овом аутору, могу бити дидактичко-методичке, педагошке и психолошке. „С обзиром на то да радионичке активности (бар оне педагошке, дидактичко-методичке, едукативне) више ангажују (духовне) активности ученика, могло би се закључити да су оне вид радне школе или радне школе 'умне активности' (или је радна школа дала подстицај за њихово настајање“ (Милијевић 2001: 60). Циљ сваке радионичке активности је, без обзира на врсту којој припада, подстицање сазнајног процеса њених учесника, стицање и усвајање чињеничног знања, подстицање и развијање виших интелектуалних процеса. На основу претходно наведених дефиниција и тумачења, а узимајући у обзир почетну наставу математике, можемо условно извести дефиницију математичке радионице за потребе овог рада. Математичка радионица у разредној настави је вид методички организоване ученичке активности у којој ученици на различите начине активно раде на садржајима почетне наставе математике, којег карактерише интеракција и кружна комуникација, и у којем се посредством учитеља остварују циљеви почетне наставе математике. Из тога даље произилази да је математичка радионица модел интерактивне вјежбе у почетној настави математике у којој влада позитивна одјељењска клима, а њеном реализацијом се освјежавају претходно стечена математичка искуства и усвајају нова. Стимулативна социо-емоционална атмосфера, партнерски и респонбилни односи у радионичким активностима ученика, могу позитивно утицати на квалитет оне математичке радионице која је темељена на планираним очекиваним исходима и у чијем току није занемарена формативна евалуација доказа да се у појединим фазама стиче и унапређује ученичко математичко знање. Математичка радионица треба да буде доказ да се може учити кроз интеракцију и игру, без присиле, у једној опуштенијој и приснијој атмосфери. У таквој атмосфери однос између учитеља и ученика је далеко непосреднији. Употреба математичких радионица данас у разредној настави је облик популаризовања почетне наставе математике, дизања исте на један виши ниво. Радећи и учествујући у реализацији математичких радионица, ученици млађег основнош-

колског узраста повезују већ стечена математичка искуства са новим на један нов начин. Ученици тада имају могућност да споје теоријска знања са праксом и практичним радом, уз игру, дружење и, свакако, одговорност.

Планирање и припремање математичких радионица у разредној настави

Наглашено је да математичке радионице нису у литератури довољно описане, те је то један од разлога њихове ријетке реализације у наставној пракси. Други разлог јесте у њеној сложеној припреми. Организовати и реализовати радионицу није лак и једноставан посао. У почетној настави математике такву врсту радионице може припремити учитељ који је методички оспособљен за креативан и иновативан рад. Он је дефинитивно „технолог математичко-методичко-производног процеса“. Сценариј математичке радионице полази од ученичких потреба, интересовања, претходних знања и искустава, поштујући при томе узрасне могућности ученика (учесника) и њихове индивидуалне способности. Када одлучи да у настави математике реализује радионицу, наставник ће прво одредити тачан датум одржавања радионице и о томе обавијестити ученике најмање седам дана прије одржавања, како би се ученици (учесници) могли адекватно припремити. Такође, ученицима је потребно дати све информације у вези са радионицом и нагласити њен циљ. Учитељ-организатор треба да нагласи дјеци да припреме потребан прибор и материјал за рад и да са ученицима разговара о свему што ће допринијети успјешнијој реализацији математичке радионице. Прибор и материјал за рад ученици ће донијети прије почетка саме радионице. Пожељно је да ученици знају тачан назив математичке радионице, јер на тај начин могу доћи до мноштва различитих идеја потребних за будући радионички рад. Када је у питању временско димензионирање математичке радионице, треба нагласити да то зависи од формално-садржајне обухватности исте. Неке радионице могу да трају један, а неке и више часова. Наставник може да организује такву радионицу током цијелог наставног дана, тј. да кроз радионицу планира, припреми и реализује интегрисани наставни дан.

Методичка структура сваке радионице, а тако и оне у почетној настави математике, има најчешће три међусобно повезане и прожете етапе. Углавном су то:

- уводне радионичке активности,
- главне радионичке активности и
- завршне радионичке активности.

Наведене етапе или активности нису златно правило, али се у наставном раду могу препознати. У микроструктури радионице могуће је и другачије

одређење етапа, тј. корака радионице. „На часу се постиже непрекидно кретање од непотпуног ка потпунијем знању, долазе до изражаја многобројне противријечности. Његови основни делови могу се јављати у различитим облицима, а да се при том не користе истовремено. Структуру часа одређују спољни и унутрашњи елементи, макро и микроелементи“ (Ђорђевић, Поткоњак, 1988: 329). Како се наставна радионица реализује на наставном часу, њену структуру ће одредити наставник уважавајући циљ, задатке, предзнања, узраст ученика итд.

Реализацијом радионица у почетној настави математике:

- богати се властито ученичко искуство, знање се утврђује,
- износи се властито мишљење,
- уважавају се ставови и мишљења других ученика,
- разговора се о идејама и проблемским питањима,
- размјењују се математичке идеје,
- заједнички (кооперативно) се предлажу рјешења,
- провјерава се исправност властитог мишљења,
- развија се способности закључивања,
- развија се способност комуницирања итд.

Због свега наведеног, може се констатовати да су најбоље оне математичке радионице које представљају комбинацију математике, игре и практичног рада.

Закључна разматрања

Настава математике због низа околности представља значајно оптерећење за ученике. Истина је да многи ученици не воле математику, избјегавају да је уче онолико колико је потребно да би је у потпуности савладали. Крути стил наставника, који се манифестује у фронталном раду и једнаком приступу према свима, удаљава поједине ученике од математике. Умјесто таквог приступа наставници могу бирати различите наставне системе у којима ће ученици учити и освајати знања, а онда их поучавати, креирати и иновирати наставу.

Велике и неисцрпне могућности у иновирању разредне наставе математике пружају математичке радионице. Њиховом реализацијом ученици ће долазити до битних закључака, развијаће математичко мишљење, развијати кооперативност у раду и, што је посебно важно, повезивати животне ситуације са наставом математике. Таквим приступом настава математике неће бити оптерећење, већ ће постати настава коју ученици радо прате и прихватају.

Аутори у овом раду наглашавају да су математичке радионице у функцији популаризације разредне наставе математике. Чињеница је да ће ученици при-

премати материјал и прибор за рад, бити активни у реализацији радионице и тиме долазити до нових знања на једноставнији начин. По завршетку радионице сигурно ће дискутовати о истој, и тиме проширити знања и након радионичких активности. Због тога, њене предности треба приближити заинтересованој педагошкој јавности.

МОДЕЛ МАТЕМАТИЧКЕ РАДИОНИЦЕ ЗА ТРЕЋИ РАЗРЕД ОСНОВНЕ ШКОЛЕ (Дијељење збира бројем)

1. корак : Припремне активности

Претходни дан са ученицима договарамо активности на часу математике за сљедећи час. Наглашавамо ученицима да ће на сљедећем часу математике радити у групама, те да се договоре ко ће са ким да сједи, узимајући у обзир да у групи треба да се налазе дјевојчице и дјечаци (различитог успјеха из математике). Код куће ће поновити научено о множењу и дијељењу бројева до стотину.

2. корак: Уводне радионичке активности

На почетку часа ученици су одредили састав група и укратко понављамо множење и дијељење бројева. Присјетићемо се таблице множења и дијељења. Нагласићемо да у математици постоје одређена правила која су у прошлости доказана. Једно од тих правила ћемо данас научити. Задатак за ученике је сљедећи: ПОСМАТРАЈТЕ ЗАПИС НА ТАБЛИ! ДИСКУТУЈТЕ О ИСТОМ! ЗАПИШИТЕ ПРАВИЛО НА ПАНОУ, А ЗАТИМ НАВЕДИТЕ СВОЈ ПРИМЈЕР! Свака група ради за себе, а сваки пано ће бити постављен на један дио учионице.

Запис на табли:

$$(18 + 24) : 3 = ?$$

$$18 : 3 = 6$$

$$24 : 3 = 8$$

$$6 + 8 = 14$$

$$42 : 3 = 14$$

3. корак: Главне радионичке активности

Ученици прате учитеља који записује на табли (као у претходној слици). Када учитељ заврши, ученици разговарају о истом и предлажу закључке. Када у групи усагласе ставове, записују наслов на пану који су сами изабрали, дефинишу и записују правило и наводе свој примјер. Када све то ураде добијају додатни задатак: *Формулишите и запишите (на пану) шексуални задатак за примјер који сте навели!*

4. корак: Сређивање утисака

Када групе заврше своје задатке, слиједи постављање панова на зидове. Ово ради учитељ уз помоћ ученика, али тако да је сваки пано удаљен од другог тако да ученици могу да их посматрају и о истом расправљају. Свака група ће посматрати сваки пано и разговарати о њему. На крају имају задатак да одреде која група је најбоље урадила задатак. Ако се сви сложе са најбољим радом и све то учитељ потврди, пано ће залијепити на табли. Уколико наслов није правилно формулисан, или постоје одређени пропусти, учитељ ће извршити корекције уз образложење ученицима зашто то чини.

5. корак: Завршне радионичке активности

На крају ученици садржај најбољег панова записују у своје свеске. Како би се потврдило научено о дијелењу збира бројем, учитељ даје следећи задатак:

Прва група ће 12 бојица подијелити на 4 ученика, а друга група ће на сва 4 ученика подијелити 16 бојица, али тако да сваки ученик добије једнако мноштво бојица. Колико је сваки ученик добио бојица?

Трећа група ће на сваку ставити 12 бојица, а на исто мјесто ће четврта група ставити 16 бојица. Све бојице ће подијелити на 4 ученика (28:4). Колико је сваки ученик добио бојица?

Примјер микроплана математичке радионице за пети разред основне школе у обрнутом дизајну (тема: Градимо дворца)

1. Идентификација жељених резултата:

Могућност ученика да идентификују геометријске облике (правоугаоник, квадрат, круг, троугао), те да у новим ситуацијама израчунају њихов обим, површину и висину.

2. Одређивање прихватљивих доказа да су жељени резултати остварени:

- правилно именована геометријска тијела,
- успјешно ријешени задаци (обим двorca и дворских врата, површина заставе...) и
- саграђен дворац од геометријских тијела.

3. Планирање искуства активної учења и поучавања:

- припремне радионичке активности,
- уводне радионичке активности,
- главне радионичке активности,
- математичка мозгалица и
- завршне радионичке активности.

4. Обезбјеђивање материјално-техничке основе радионичких активности:

Картони, геометријски прибор, картони у боји, лењир, фотографије, маказе, кројачки метар, љепила, оловке, фломастери, свеске, тврде боје...

За реализацију радионице предвиђена су четири наставна часа.

Ток и садржај радионичких активности

1. корак: Припремне радионичке активности

Ученике треба благовремено обавијестити о реализацији математичке радионице. Са учитељем треба да се договоре о свим потребним дидактичким материјалима и потребним прибором за рад (геометријски прибор, картони, конци, картони у боји, фотографије, маказе, љепила...).

2. корак: Уводне радионичке активности:

У уводном дијелу радионице ученици кратко показују припремљене материјале за рад. Акценат стављамо на фотографије које су ученици донијели. Заједнички продискујемо о улози двораца у прошлости и о њиховом изгледу. На сликама двораца из бајки, посматрајући их, дјеца би требала да се присјете да бројне дворске зидине имају облик различитих геометријских облика као што су квадрат, правоугаоник, троугао..., које су научили препознавати још у првом разреду. Треба да се присјете како изгледају геометријска тијела као што су: квадар, коцка, купа... Поред тога, било би неопходно да се дјеца присјете и појмова: површина, разломак, дуж(и), мјере и мјерења, висина, обим, основица, бочне странице...

3. корак: Главне радионичке активности

Најзахтјевни дио посла је сама израда мрежа геометријских тијела као структуралних компонената макете дворца. Дјеца, радећи у групама, цртају мреже геометријских тијела, изрезују их и лијепе, тј. склапају макету дворца.



Слика 1. Главне радионичке активности

Учитељ константно обилази ученике и пружа им помоћ када је она неопходна. Израда макете је сложен задатак, те захтијева много стрпљења, спретности, упорности, прецизности и уредности. У учионици треба да влада угодна радна атмосфера. Ученици треба да кроз игру, договор и сарадњу остваре циљ математичке радионице.

Осим што су ученици на почетку радионичког дана успјешно поновили некад учиено градиво, потребно је да ријеше неколико практичних задатака. Ево неких од њих:

1. Израчунај обим изграђеног дворца, а потом обим дворских врата.
2. Израчунај колика је површина дворца.
3. Измјери колика је висина највеће куполе на дворцу.
4. Колико износи четвртина, а колико половина њене висине?
5. Измјери и напиши колико износи највеће растојање између двије куполе.
6. За колико је највиша кула виша од најниже куле?
7. Израчунај површину заставе која стоји на куполи.

Напомена: Претпоставка је да ће ученици врата дворца креирати у облику правоугаоника или квадрата и да ће дворац имати неколико купола. Дворска заставица ће вјероватно имати облик правоугаоника, а и сам дворац би могао да буде изграђен на постољу (бази) у облику квадрата или правоугаоника. Уколико би ученици у изради макете дворца поступили супротно претпоставкама, учитељ би осмислио задатке у складу са ситуацијом, а опет у циљу остварива-

ња циља радионице. Реализација математичке радионице „Градимо дворца“ у ЈУОШ „Др Младен Стојановић“, Лакташи, потврдила је све претходно наведене претпоставке.

Ученици радом у групи покушавају ријешити постављене задатке. Претпостављамо да ће им мало бити необични ови задаци, јер се нигдје не помињу бројке. Ако буде потребно, рећи ћемо им да имају прибор на основу којег ће доћи до мјера које су им потребне за рјешавање задатака. На крају главних радионичких активности заједнички провјеравамо тачност ријешених задатака и проглашавамо најљепше изграђен дворца.

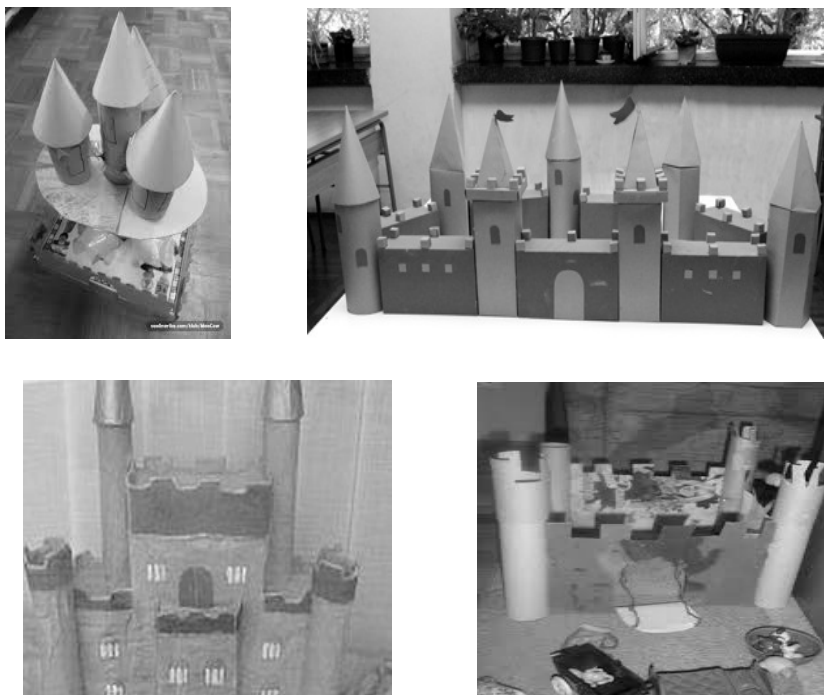
4. корак: Математичка мозгалица

Да би код ученика развијали такмичарски дух, а и способност математичког закључивања, математичка мозгалица је идеално средство за такво нешто. Учитель чита задатке, а ученици одговарају уз међусобни групни договор. Група која се прва јави даје одговор. Уколико група да погрешан одговор, тада остале двије противничке групе добијају по пола бода. Побједничка група је она која сакупи највише бодова. Питања за математичку мозгалицу су:

1. У једној корпи се налазе три врсте јабука. Колико најмање јабука треба да се извади из те корпе, без гледања, да би бар три јабуке биле исте врсте?
2. Капетан брода има брата. Његов брат нема брата. Ко је капетан?
3. Збир два двоцифрена броја је 197. Који су то бројеви?
4. У корпи се налазе три јабуке. Мајка их подијелила тројици синова. Свако је добио по једну јабуку, а једна је остала у корпи. Како је то могуће?
5. Троугао има три угла. Колико ће их остати ако му одсјечемо један?
6. Канап треба подијелити на пет дијелова. На колико га мјеста треба пресјећи?
7. У суд од 10 литара усудо је 6 литара млијека. Ако се у тај суд наспе још 6 литара млијека, колико ће послје тога у њему бити млијека?

5. корак: Завршне радионичке активности

Ученици поспремају прибор и алат. Води се заједничка дискусија о про-теклим радионичким активностима.



Слика 2. Изглед могућих макета дворца

Литература

- Бањац, М. (2011). Разредна настава математике данас (правци и перспективе). Бања Лука: Ријеч просвјете, бр. 1.
- Буљубашић-Кузмановић, В. (2006). Педагошка радионица у функцији активне наставе и учења на успјесима. Загреб: Методички огледи, бр. 1.
- Вилотијевић, М. (2000). Дидактика 1. Београд: Учитељски факултет.
- Ђорђевић, Ј. и Поткоњак, Н. (1988). Педагогија. Београд: Научна књига.
- Егерић, М. и Ђурић, М. (2012). Стилски учења у почетној настави математике. У зборнику: Методички аспекти наставе математике II. Јагодина: Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу.
- Илић, М. (2005). Планирање ефикасне наставе у обрнутом дизајну. Бања Лука: Наша школа, бр. 1–2.
- Калајија, К. (2003). Дани отворених врата. Загреб: Математика и школа 18.
- Краљевић, М. (2002). Интерактивна настава у малој групи на часу методике. Београд: Образовна технологија, бр. 4.
- Kraljić, Ž. (2008). Pad ocjena iz matematike na prijelazu iz razredne u predmetnu nastavu. Na sajtu: <http://mis.element.hr/fajli/906/43-05.pdf>.
- Милијевић, С. (2001). Интерактивно учење и радионичка активност. Бања Лука: Наша школа, бр. 3–4.
- Сузић, Н. (2005). Педагогија за XXI вијек. Бања Лука: ТТ-центар.

- Станојловић, С. (1999). Радионице као оквир за активно учење, у књизи: Интерактивно учење I, Бања Лука: Трио принт.
- Ћетковић, А., Колечањи, М. (1996). Час занимљиве математике. Сомбор: Норма, бр. 3.
- Узелац, М., Богнар, Ј., Багић, А. (1994). Будимо пријатељи. Загреб: Мали корак.

MATHEMATICAL WORKSHOPS IN THE FUNCTION OF POPULARISATION OF MATHEMATICS CLASS TEACHING

Summary. Mathematics class teaching plays the key role in understanding of mathematics, and in subsequent higher-grade learning of mathematics too. There is a small number of the students there who understand mathematics and show interest for it, and, at the same time, there is a large number of those who think of mathematics as a bugaboo, and who show or exhibit certain oversights in its learning at the beginner's level. The things are not as bad as some people claim, still, as the other people state, the things are also not at the satisfactory level. In any case, the things can be better. It is necessary to create new approaches, i.e. to create new trends in teaching of mathematics with lower age pupils of primary schools. This paper summarizes mathematics workshops in class teaching of mathematics, their theoretical background and application of their practical realizations. It endeavors to show that it is possible to make mathematics classes more popular by using mathematics workshops, and that mathematical contents can be learned and overcome in an acceptable and interesting way. What is being emphasized is the importance of workshops in the development of mathematical thinking, cooperativeness and creativity of pupils in their work, and, eventually, the teacher's preparation of workshops.

Key words: mathematics class teaching, mathematical workshops, mathematical thinking.

Милан Миликић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Јагодина

milikic.milan@yahoo.com

ПРИМЕНА АУДИОВИЗУЕЛНИХ НАСТАВНИХ СРЕДСТАВА У ОВЛАДАВАЊУ ПОЧЕТНИМ МАТЕМАТИЧКИМ ПОЈМОВИМА

Айсџиракџи. У најранијем узрасту деца се ослањају на своја чула – чуло додира, вида, слуха – и помоћу њих перципирају свет који их окружује. Аудиовизуелна средства намењена су истовремено слушању и гледању, услед чега је пријем информација потпунији, а самим тим и њихова примена ефикаснија. У овом раду ћемо поред наставног филма, телевизијског образовног програма и касета, споменути и разноврсне мултимедијалне садржаје који могу бити добар извор којим се ученицима приближавају релације које би им иначе било тешко или готово немогуће објаснити неким другим средствима. Уз то, мултимедијални садржај треба бити добро одабран, прилагођен узрасту ученика, како у техничком тако и у научном смислу.

Применом аудиовизуелних средстава се уз помоћ аудио и визуелног ефекта деци приближавају садржаји за њихов узраст тешко схватљиви и омогућавају им лакше разумевање и каснију примену истих. Циљ примене поменутих наставних средстава је да код ученика пробуди интересовање за математичка знања, подстакне их да почетне математичке појмове повежу са њима блиским стварима и тако их лакше прихвате.

Кључне речи: мултимедијални садржаји, боја, звук.

Увод

Техника и наука у савременој етапи развоја друштва постављају нове захтеве за успешну реализацију задатака у производњи, друштвеним односима и свакодневном животу. Да би се ишло у корак са тим захтевима, неопходне су промене у образовању. Савремене технологије незаустављивом брзином продиру у сваки делић нашег живота и рада. За разлику од нас одраслих, деца нове технологије примају на другачији начин јер одрастају уз њих. Имамо за задатак да коришћењем поменутих технологија подигнемо укупан ниво образовања.

Још половином двадесетог века констатовано је да су опажање и мишљење код човека неодвојиво испреплетани. Конзумирање медија, подстакнуто приказима са екрана, подразумева истовремено и максимално деловање свих сензација на људска чула, чиме злоупотребљава нашу спремност и отвореност за некритички пријем информација. Оптички нерв човека садржи око милион влакана, док слушни садржи тек око тридесет хиљада. То је више од укупног броја нервних влакана која преносе информације о болу, температури и додиру заједно. Управо то је разлог због којег најбоље памтимо оно што видимо. Систем чула вида је за нас највећи извор информација, баш зато је приказивање одговарајуће слике на екрану, у правом тренутку, од изузетног значаја.

Аудиовизуелна средства и њихов доживљај

Можемо поставити питање какву улогу има боја у наставном раду и у чему се њена улога састоји. У другој половини двадесетог века вршена су истраживања и праћења ефеката учења помоћу материјала који су били у колору и у црно-белој техници (видети Лазаревић, 1973). Испитивања су вршена на програмима образовне телевизије која је укључивала шеме, филмове, дијаграме... У поменутом испитивању боја је употребљавана најчешће за истицање разлика и објашњавање појединих карактеристика. Материјали на телевизији коришћени су у саставу регуларних часова, без претходне припреме ученика, а као закључак истраживања је истакнуто да не постоји значајна разлика приликом тестирања наученог коришћењем колор односно црно-белих наставних садржаја. Чак се дошло до закључка да колор може, ако се не користи пажљиво, да смањи ефективност свих боја, одвлачењем пажње оног који учи. Допринос колор филма се састоји у дужем задржавању наученог, а не у већем стицању знања. „Они који гледају филм у боји могу да не науче више од оних који то исто уче са црно-белих филмова, с тим што они заборављају мање од оних који уче уз коришћење црно-белих материјала.“¹

Морамо водити рачуна о ставу ученика приликом коришћења боја у појединим наставним аудиовизуелним материјалима у односу на црно-беле материјале. Вршена су испитивања код предшколске деце и откривено је да највећи број деце више воли слике у боји него монохроматске (видети Лазаревић, 1973). С друге стране, деца више воле да им се ствари прикажу у црно-белој пројекцији, него у боји која не одговара стварности. У вези са тим, између већег броја слика у боји које приказују исти предмет, деца више воле слике са мање боје које имају више сличности са реалношћу, него од слике са више боја које мање личе на стварни предмет. Типично мишљење одраслих је да се пре-

¹ „Color VS B/W in instructional films“, *AV Communication review*, пролеће 1954, 121–134.

цењује важност боја уопште, а потцењује важност других квалитета аудиовизуелних материјала. Свака слика, када се узме у обзир њен садржај, има већи успех у задовољавању деце ако се њен садржај приближи стварном животу. Добро визуелно приближавање реализма укључује боју, али она није од пресудног значаја за добро приказивање стварности.

Боја је део природне средине у којој деца свакодневно стичу своја искуства. Како су искуства основа сваког даљег стицања знања, па и математичких, то се поставља и питање у којој количини боје треба да буду употребљене у аудиовизуелним наставним материјалима. Боја као саставни део оригиналности неког објекта, мора се употребити у аудиовизуелном материјалу, јер се у супротном може створити погрешна импресија. Филм или слика кенгура у црно-белој техници могу да буду сасвим добро перципирани, али ахроматски приказ жирафе или тигра неће показати ученицима њихов стварни изглед. Неки пут је добро да предмет или објекат који се проучавају буду црно-бели, јер примена боје може да изазове скретање пажње на њихове мање битне особине. Ако се прави схема или графикон који је једноставан и лако разумљив, црно може да учини да буде сасвим јасан. Употребом неке друге боје, рецимо црвене или зелене, ефекат може да буде већи због сензорне преференције, мада је црно било сасвим довољно за разумевање садржаја. Тако се често долази до ситуације када боја може да буде не само пожељна, већ када је њено присуство сасвим непотребно.

Аудиовизуелна средства намењена су истовремено слушању и гледању услед чега је пријем информација потпунији, а самим тим и њихова примена ефикаснија. Циљ им је да код ученика пробуди интересовање за математичка знања, подстакне их да почетне математичке појмове повежу са њима блиским стварима и тако их лакше прихвате. Употребом наставног филма пред наставника се постављају нови методички захтеви. Уколико користи готов филм, наставник не сме филм приказати пре него што га он сам прегледа и анализира његове могућности и да ли је адекватан узрасту ученика којима се приказује. Пре пуштања филма пожељно је нагласити ученицима на које делове треба посебно да обрате пажњу, и уколико то узраст ученика и сложеност филма изискују, филм приказати и више пута. Млађем узрасту треба приказивати филмове у којима не обилују детаљи и визуелни ефекти, како би се акценат ставио на сам садржај наставног филма и тако постигла пуна васпитно-образовна функција.

Различити су извори филмова за наставу, то може бити образовни филм који се купује наменски прављен за дату тему у оквиру плана и програма наставе, одговарајући филмски материјал преузет са кабловске телевизије или интернета, или филмски материјал који су заједничким ангажовањем направили сами наставници и ученици, што би било најбоље с обзиром на прилагође-

ност предзнањима ученика и њиховим афинитетима. Данас је технологија толико напредовала да је једноставно и јефтино направити наставни филм, односно филм као наставно средство, који ће ученицима приказати све оно што не можемо да пренесемо речима ни сликом, а не можемо ни да изведемо експеримент.

Телевизијски образовни програм пак, користећи бројна друга наставна средства, на динамичан начин презентује одабране наставне садржаје, уз анимацију ученика добро синхронизованим аудио и видео ефектима. Телевизијски програм може бити главни извор информација у савременој настави математике, или допуњавати класичне облике наставе. На тај начин математички садржај постаје приступачнији и занимљивији ученицима, у таквим програмима често се говори о животу и стваралаштву великих математичара, чиме је и васпитни фактор такве врсте програма од велике важности. Такође, приказују се и демонстрирају разни предмети, модели, слике, цртежи, процеси, тако да целовите информације, поткрепљене сликом, бојом, анимацијом, звуком, привлаче пажњу ученика и одличне су као мотивација ученика за одређене наставне теме. Након одгледаног програма потребна је анализа како би ученици отклонили евентуалне нејасноће, истакли битно и кроз размену искустава и личних утисака других ученика открили начине примене новостечених знања. Већ је запажен тренд кретања ка савременом образовању и то код широке употребе видео-касета у школама, а он ће се убрзати коришћењем компјутерских програма и презентација, који пружају вишеструко представљање наставних садржаја.

У последњих неколико година, са масовнијим коришћењем рачунара у школама, створени су услови за квалитетније и иновативније образовање. Рачунари обилују мултимедијалним садржајима и зато се морамо борити против увреженог мишљења да су рачунари узрок многих негативних појава (нечитање, асоцијално и насилничко понашање). На рачунару дете може да црта, боји, може да учи слова, стекне навику аудио учења слушањем, упозна се са основама математике. Данас постоје дискови намењени деци уз помоћ којих могу, кроз игру, много тога да науче. Према М. Богдановић (2012), само неки од њих су: *Јуниор*, *Део који недосијаје*, *Мудрица*, *Зимска чаролија*. Интерактивни дискови прилагођени су деци различитих узраста и, уз игре, обилују различитим музичким подлогама и занимљивим колоритом. Уз помоћ добро припремљених анимација и презентација, које се на рачунару на врло брз и једноставан начин могу направити, учитељ може децу научити слова, бројеве, да боје, да развију способност концентрације, запажања, памћења.

У ери иновација и цртани филм може да има сасвим нову улогу, улогу наставног средства. Заборављамо да деца одрастају уз гледање цртаних филмова, и можда би добра идеја била приближити им нова знања управо коришћењем

истих. Имао сам прилику да присуствујем часу на коме је приказан цртани филм са математичком тематиком ученицима првог разреда средње школе. Истакао бих неочекивано велико интересовање ученика јер су имали прилику да се сусретну са нечим новим, а опет блиским. Притом, мора се водити рачуна да се не заборави на принцип научности, да математички садржаји који се овим путем саопштавају буду базирани на научном тумачењу, али тако методички обликовани да буду приступачни ученицима.

Закључак

Савремена образовна технологија, уз коришћење мултимедијалних система, ствара предуслове за ангажовање свих чула у процесу стицања нових знања, развија креативност деце и обезбеђује већу активност деце у учењу и забави. Међутим, мултимедијална настава нема решење за све проблеме савременог наставног процеса. Постоје и садржаји чије обликовање није погодно за мултимедијалне пакете, што значи да сваки математички садржај, у сваком моменту, не можемо тумачити аудиовизуелним средствима. Оно што на крају треба поменути јесте да посебно деца нижих разреда основне школе још увек изискују близак контакт како са учитељем, тако и са другим ученицима. Захтевају пажњу, развој социјалних односа, тако да треба да постоји и разумна граница у употреби медија уопште.

Литература

- Bogdanović, M. (2012). Multimedija i deca predškolskog uzrasta – generacija trećeg milenijuma. *Metodička praksa: časopis za nastavu i učenje*, Vol. 13, No. 1, 13–28.
- Dejić, M., Egerić, M. (2005). *Metodika nastave matematike*. Jagodina: Učiteljski fakultet u Jagodini.
- Egerić, M. (2006). *Metodika razvijanja početnih matematičkih pojmova*. Jagodina: Učiteljski fakultet u Jagodini.
- Lazarević, Lj. (1973). Boja u audio-vizuelnim materijalima. *Pedagoška stvarnost: časopis za školska i kulturno-prosvetna pitanja*, Vol. 19, No. 10, 630–637.
- Namestovski, Ž. (2008). *Uticaj primene savremenih nastavnih sredstava na povećanje efikasnosti nastave u osnovnoj školi*, magistarska teza. Zrenjanin: Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“.
- Sučević, V. (2010). Obrada nastavnih sadržaja primenom modela multimedijalnih prezentacija. *Reči: časopis za jezik, književnost i kulturološke studije*, Vol. 2, No. 3, 117–128.
- Zindović, G. (1973). Uloga i vaspitna funkcija filma, radija i televizije. G. Zindović, N. Trnavac, B. Trajković. *Vaspitna funkcija savremenih nastavnih sredstava i sredstava komunikacija* (3–18). Beograd: Zavod za osnovno obrazovanje i obrazovanje nastavnika SR Srbije.
- “Donald in Mathmagic Land”, (april 2014): <https://www.youtube.com/watch?v=EM9PjAORE84>

APPLICATION OF AUDIO-VISUAL TEACHING MATERIALS IN THE BASIC MATHEMATICAL TERMS ACQUISITION

Summary. At the earliest age, children lean on their senses – of touch, sight and hearing, and they use them to perceive the world around them. Audio-visual materials are designed for simultaneous listening and watching which causes the information reception to be more complete, and, thus, its application more efficient. In this work, besides educational films, television educational programmes and cassettes, we will mention different multimedia materials can also be a good source which could bring some relations, especially those which are difficult or impossible to explain closer to young learners by using some other materials. Besides, multimedia materials should be carefully chosen, adjusted to the age of the learners in both technical and scientific way.

The application of audio-visual materials with the help of audio and visual effects bring closer to young learners the contents which are difficult to understand at their age and they enable their understanding and further application. The aim of the application of the above mentioned teaching materials is to arise the interest for the knowledge of mathematics in young learners, to encourage them to connect the basic mathematical terms with the things they are familiar with and to accept them easier.

Key words: multimedia materials, colour, sound.

2

МУЛТИДИСЦИПЛИНАРНОСТ У МЕТОДИЦИ И НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Đoko G. Marković

Univerzitet Crne Gore

Filozofski fakultet, Nikšić

djokogm@hotmail.com

PRIMJERI PRIMJENE DIDAKTIČKOG PRINCIPA POLIFORMNOSTI U NASTAVI MATEMATIKE OSMOGODIŠNJE I SREDNJE ŠKOLE

Apstrakt. Ovim radom se prevashodno posmatra nastava matematike u svjetlu principa raznovrsnosti prezentovanog geometrijskim i kombinovanim poliformnim geometrijsko–aritmetičko–algebarskim interpretacijama u funkciji dinamiziranja nastavnog procesa sa tendencijom kontinuiranog pružanja prilika učenicima za originalno i kreativno razmišljanje uz razvijanje navika samostalnog stvaralačkog mišljenja, kritičkog ocijenjivanja i razumnog uopštavanja.

Ključne riječi. princip očiglednosti, princip raznovrsnosti, geometrijski poliformizam, kombinovani poliformizam, princip poliformnosti, metodološke inovacije, razbijanje formalizma.

Uvod

Ovim radom želimo da ukažemo na geometrijske poliformizme, kao temeljne činioce načela raznovrsnosti, tj. da ih prikažemo u funkcionalnoj vezi sa razbijanjem formalizma u nastavi matematike, kao i da pokažemo da oni imaju glavnu tačku oslonca u činjenici da slikovito mišljenje kod učenika „rađa aha doživljaje“, dakle u jednom trenutku „bljesak“ kompletne jasnoće.

Interpretacija nekog matematičkog problema, koji je moguće poliformno geometrijski tumačiti, omogućava jedan dinamički pristup samom problemu, tj. datom fenomenu, što proizvodi njegovo sveobuhvatno i suštinsko poimanje i razumijevanje.

Raznovrsnost kojim dominiraju geometrijski poliformizmi predstavlja princip poliformnosti, koji je utemeljen na konačnom broju konjukcija logičkih zakona ili principa (zakoni negacija negacije, modus ponens itd., principi očiglednosti, permanencije itd.).

Ovim radom želim da ukažem na suštinu principa poliformnosti i pokažem njegovu trivijalnu dokazivost teorijskim (matematičkim) putem. Tako želim da izbjegnem sve one metodologije i eksperimentisanja, koja poprimaju obavezujuću pra-

ksu, i neizostavno se koriste i u metodici nastave matematike, kojom se ona približava didaktici i grupi prirodnih predmeta, a sve više odaljuje od matematičke naučnosti i posebnosti.

Didaktički princip poliformnosti, po onome što smo uspjeli tokom tridesetogodišnjeg bavljenja nastavom matematike srednje škole vidjeti u matematičko-metodičkoj literaturi se uopšte ne sreće kao neka didaktička posebnost, a ako se ponegdje primjenjuje, onda je to veoma rijetko, intuitivno, stihijski, singularno i slučajno u nastavi matematike osmogodišnje i srednje škole. Osnova načela poliformnosti, za razliku od principa permanencije, sastoji se u dvostrukoj ili višestrukoj primjeni zakona negacije negacije na istim fenomenima, tj. polaznim problemima ili poznatim teorijama. Suština ovoga značajnog didaktičkog principa ogleda se u permanentnom insistiranju na integralnom sagledavanju raznovrsnih pristupa razumjevanja i poimanja proučavanih nastavnih fenomena. Njegovo eksploatisanje u praksi iziskuje od nastavnika odlično poznavanje i vještinu primjenjivanja najraznovrsnijih stručno-didaktičko-metodičkih mogućnosti, a indukuje intenzivnu misaonu aktivnost učenika izraženu kvalitetnim samopregalačkim radom i većom motivacijom. Efikasnost principa poliformnosti zasniva se na evidentnoj psihološkoj činjenici da promjene i raznovrsnost u radu osvježavaju nastavu, a monotonija uglavnom indukuje slabljenje interesovanja i pojavu pasivnosti i dosade. Zato u nastavi matematike princip poliformnosti treba da ima univerzalnu ulogu, koja bi bila prezentovana oplemenjivanjem nastave raznovrsnim sadržajima, sredstvima, postupcima i metodama. Kada je riječ o sadržajima, misli se na izbor takvih zadataka koji omogućavaju veći broj raznolikih pristupa pri njihovom rješavanju i korišćenju očiglednih sredstava. Međutim, organizovanje takvih časova zahtijeva adekvatnu primjenu poliformnosti metodskih oblika i metodskih pojedinosti nastave, tj. njihovih varijacija na istom nastavnom času. Metodski oblici i methodske pojedinosti koje nastavnik planira i primjenjuje tokom nastave baziraju se na pravovremenom pulsiranju didaktičkih principa, što se ispoljava u njihovom istovremenom poliformno-kohezionom dejstvu, tj. integralnom dijalektičkom jedinstvu. [5]

1. Primjeri inovacija u nastavi matematike osnovne i srednje škole

Pogledajmo kako je mladi K. F. Gaus sabrao prvih 100 prirodnih brojeva. Dok je učitelj očekivao da učenici sabiraju redom svih prvih sto brojeva, on je zadatak rješio na sljedeći način:

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \cdots + 100 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050.\end{aligned}$$

Prethodni primjer možemo iskoristiti da počnemo razgovor sa učenicima i o drugim mogućnostima rješavanja istog zadatka. Tačnije, učenike treba pitati da li zadatak mogu riješiti još na neki efikasan način. Ako đaci ne mogu da otkriju novu heuristiku, treba im postaviti pomoćno pitanje šta bi se desilo ako bi udruživali parove brojeva da prave zbir 100. Nakon toga bi neki od njih mogao lako doći do novog rješenja. U svakom slučaju, treba insistirati na toj konfučijanskoj mudrosti da od đaka kroz njihova razmišljanja i aktivnosti otkrijemo i druga rješenja.

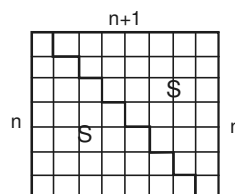
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 100 &= 1 + 2 + 3 + \dots + 50 + 51 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ &= (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) + (50 + 100) \\ &= 49 \cdot 100 + 150 = 4900 + 150 = 5050. \end{aligned}$$

Naravno, da ovo nije kraj priče, jer se zadatak može riješiti i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 100 &= 1 + 2 + \dots + 10 + \\ &\quad + (10 + 1 + 10 + 2 + \dots + 10 + 9 + 10 + 10) + \\ &\quad + (20 + 1 + 20 + 2 + \dots + 20 + 9 + 20 + 10) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (90 + 1 + 90 + 2 + \dots + 90 + 9 + 90 + 10) = \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 10) \cdot 10 + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \cdot 100 = \\ &= 55 \cdot 10 + 450 \cdot 100 = 550 + 4500 = 5050. \end{aligned}$$

Ovaj karakteristični motivacioni peimjer pruža nam mogućnost da učenike upoznamo sa istorijskom pričom o rezultatima Pitagorine škole, Grčke matematike.

Pitagorejci su isticali kako su unaprijedili matematiku iznad komercijalnih osnova. O tome svjedoče sljedeći primjeri o njihovim znanjima iz aritmetike i dokazi u kojima su koristili geometriju. [1]



Slika 1.

1. Evo kako su otkrili čemu je jednak zbir prvih n prirodnih brojeva:

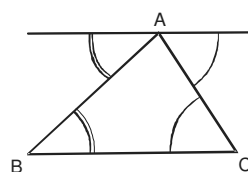
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Koristeći se znanjem o površini pravougaonika i slikom 1 oni su utvrdili da je:

$$2 \cdot S = n \cdot (n+1), \text{ odakle je: } S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Dkle, Gausov zadatak možemo riješiti i po formuli za sumu prvih 100 članova aritmetičkog niza, tj.: $S_{100} = \frac{100 \cdot (100+1)}{2} = 5050.$

„Bez mnogo pretjerivanja može se kazati da je ideju o strogim potpunim dokazima čovječanstvo dobilo od jednog čovjeka i jedne knjige: od Euklida i njegovih „Elementa“. [1] I danas je proučavanje elementarne planimetrije još uvijek najbolja prilika da se usvoje ideje strogog dokaza. Teško da se može naći poznatiji primjer od teoreme: U sva-

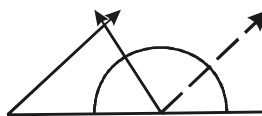


Slika 2.

kom je trouglu zbir unutrašnjih uglova jednak 180° . Slici 2, koja je uobičajena prati-
lja ovoga dokaza, ne treba mnogo objašnjavanja. Tjemnom A povučena je paralela



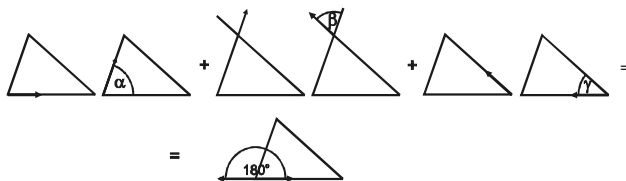
Slika 3a



Slika 3b

sa stranicom BC. Uglovi kod B i C jednaki su odgovarajućim kod A (kako je to prikazano na slici) jer su naizmjenični uglovi međusobno jednaki. Zbir tri unutrašnja ugla trougla jednak je zbiru tri ugla sa zajedničkim tjemenom A koji grade opružen ugao.

Ovim je teorema dokazana. Većina nastavnika, vjerovatno, ovim završava pri-
ču o dokazivanju ove poznate teoreme. Međutim, uvijek postoje oni koji pojašnjava-
ju „jasno“ smatrajući da je za istinsko razumijevanje problema potreban dinamički
pristup istom. O čemu se zapravo ovdje radi? Čuveni američki psiholog Džorž Ber-
kli smatra: [2] ako ovu trideset drugu teoremu iz Euklidovih „Elemenata“ demons-



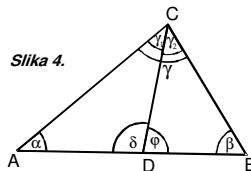
Slika 3c

trira na taj način što će povući paralelu sa jednom stranicom tog trougla kao na slici
2 ili na slici 3a, što će pokazati da ekvivalent ta tri ugla kao zbir daje polovinu kruga
(opružen ugao) treba istaći da veličinu uglova ne treba uzimati u obzir, čime se
dokazuje da teorema važi za svaki trougao.“ „Međutim, poznati predstavnik gelštal-
tističkog pravca u psihologiji Rudolf Arnhajm kaže da ovako dokazivanje svakako
ima praktičnu vrijednost, ali za mišljenje je važno da opštost teoreme postane oči-
gledna, a da to nije baš vidljivo iz uopštavanja kod takvog statičkog pristupa prob-
lemu, pogotovo ako to predočavamo učenicima starijeg uzrasta (osnovne škole). [2]

Zato on predlaže da se slika 3a transformiše u sliku 3b tako što će dvije strane trou-
gla zamisliti kao krakove neograničene dužine koji mogu da se okreću u tački oso-
vine, nezavisno preko čitave polovine kruga, pri čemu oni bez obzira na položaje
obrazuju tri odsječka koji kao zbir daju istupolukružnu cjelinu. Kada se jedan ugao
povećava, njegov susjed se automatski u odgovarajućoj mjeri smanjuje. Statičan
pojam zamjenjen je dinamičnim. Teorema nije samo zamišljena kao opšta, već je
kao opštu i opažamo.“

Evo još jedan dinamični pristup dokaza ove čuvene teoreme koju možemo
demonstrirati učenicima starijeg uzrasta osnovne škole.

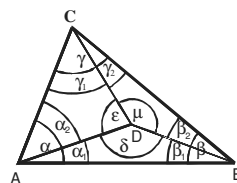
Za ovu interpretaciju dovoljno je imati jednu đačku olovku i sliku proizvoljnog nejednakostraničnog trougla i primijeniti kompoziciju izometrijskih transformacija rotacija i translacija naizmjenično kao na slici 3c. Pri ovom dokazivanju koristili smo prikriveno Plejferov aksiom paralelnosti. Slično prethodnom primjeru korišćenjem još jednog ekvivalenta aksiome paralelnosti, tj. da je zbir unutrašnjih uglova u bilo kojem trouglu konstantno jednak, ovu teoremu možemo dokazati i na sljedeći način:



Slika 4.

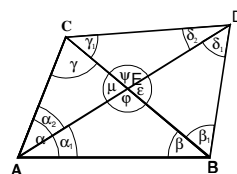
Neka je $\alpha + \beta + \gamma = S$ zbir uglova u proizvoljnom trouglu $\triangle ABC$. Ako na stranici AB izaberemo proizvoljno tačku D različitu od A i B, kao na slici 4, lako je uočiti:

$2 \cdot S = \alpha + \delta + \gamma_1 + \gamma_2 + \varphi + \beta = \alpha + \beta + \gamma + 180^\circ = S + 180^\circ$, jer je $\delta + \varphi = 180^\circ$, a $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, pa je očigledno $S = 180^\circ$, što je trebalo dokazati.“



Slika 5.

„Na jednom od časova uvježbavanja gradiva u I razredu gimnazije u jednoj modernijoj varijanti heurističke metode Georga Polye od učenika sam zahtijevao, da birajući proizvoljno tačku D u ravni crteža, pokušaju pronaći još neki način dokazivanja ove teoreme. Kao rezultat takvog samostalnog rješavanja datog problema proistekao je sljedeći algoritam dokazivanja tog čuvenog Euklidovog stava.



Slika 6.

Ako pretpostavimo da je zbir svih unutrašnjih uglova u svakom trouglu konstantno jednak S , što je ekvivalent aksioma paralelnosti, posmatrajući sliku 5 lako je uočiti da je:

$$S = \alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2, \text{ kao i}$$

$$3 \cdot S = \alpha_1 + \beta_1 + \delta + \beta_2 + \gamma_2 + \mu + \gamma_1 + \alpha_2 + \varepsilon, \text{ tj.}$$

$$3 \cdot S = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta + \mu + \varepsilon, \text{ odnosno,}$$

$$3 \cdot S = S + 360^\circ, \text{ pa je: } S = 180^\circ, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

Ovo dokazivanje ima još dvije varijante izbora tačke D.

U prvom slučaju, kada tačka D pripada nekoj od pravih kojima pripadaju stranice trougla spolja, tj. tako da raspored tačaka bude npr. A–B–D. Ovaj dokaz je sličan onome sa slike 4. A sada pogledajmo položaj kada tačka D ne pripada pravama kojima pripadaju stranice $\triangle ABC$, niti njegovoj unutrašnjosti kao na slici 6. Tada posmatrajući trouglove: $\triangle ABE$, $\triangle BDE$, $\triangle DCE$, $\triangle CAE$, $\triangle ABC$ i $\triangle ABDC$, lako je vidjeti da je

$$4 \cdot S = \alpha_1 + \beta + \varphi + \beta_1 + \delta_1 + \varepsilon + \delta_2 + \gamma_1 + \psi + \gamma + \alpha_2 + \mu,$$

pa je $4 \cdot S = 2 \cdot S + 360^\circ$, tj. $S = 180^\circ$. [3]

U svim prethodnim dokazivanjima koristili smo neki od ekvivalenata petog Euklidovog postulata.

V Euklidov postulat: Neka se svaki put, kada prava pri presjeku sa dvijema drugim pravama sa kojima na istoj strani gradi unutrašnje uglove čiji je zbir manji od dva prava ugla, ove prave sijeku sa one strane sa koje je taj zbir manji od dva prava ugla.

Nastavnici konstantno treba da insistiraju na tome da učenici zadatke rješavaju na različite načine, i da ih geometrijski interpretiraju kad je god to moguće činiti. Ovo je značajno zbog toga što tako formiraju kod njih naviku da probleme fleksibilno posmatraju iz različitih „uglova“ i dinamički ih sagledavaju i samostalno rješavaju. Geometrijsko interpretiranje – „skiciranje“, veoma je značajno zato što slike imaju osobinu integralnosti. One u jednom trenutku govore sve i tako stabilizuju naše unutrašnje predstave, što indukuje brzo i jasno poimavanje i razumjevanje konkretnih nastavnih zadataka.

2. Empirijska evaulacija nekih modela primjene inovacionih elemenata u nastavi matematike osnovne i srednje škole

U ovom poglavlju opisaćemo, posmatrajući iz ugla sopstvenih empirija, efekte nastave pri uvođenju i primjenjivanju neobičnih raritetnih i inoviranih matematičkih sadržaja (konkretno, pored navedenog, prezentovaćemo i jedan primjer iz srednjoškolske prakse.

„Posmatrajući problematiku primjene inovacionih elemenata u nastavi matematike osnovne i srednje škole, nakon višedecenijskog iskustva u neposrednoj nastavi matematike, ne možemo da se odupremo utisku čuđenja izraženog pitanjem: Zar je moguće da pored takvog bogatstva, cijelog spektra različitih, elegantnih, jednostavnih i lijepih metodološko-matematički inoviranih sadržaja, poput prethodno navedenih i mnogih sličnih primjera nijedan od njih nije pronašao svoje „mjesto pod suncem“ nekog modernog udžbenika, priručnika ili zbirke zadataka.“ [4]

Ako je to tako, a uglavnom je tako, kada su u pitanju udžbenici, priručnici i zbirke zadataka matematike osnovne i srednje škole i gimnazija, onda ne treba da nas čudi činjenica da je mali broj nastavnika u neposrednoj nastavi spreman da nešto radikalnije mijenja, a kamoli samoinicijativno inovira u tom procesu.

Mislimo da je teško dati odgovor na pitanje: Zašto je to tako?

Da li je u pitanju neadekvatna stručnost nastavnika, tj. nezadovoljavajući kvalitet njihovih tzv. primjenljivih i procesnih znanja u smislu modernih klasifikacija npr. Marazanove taksonomije znanja?

Da li neko, ko ne umije da pliva, može naučiti nekoga ko ne umije da pliva, da pliva?

Po našem mišljenju, sa velikom vjerovatnoćom možemo u prvom slučaju dati potvrđan, a u drugom odričan odgovor na postavljena pitanja.

„Opravdanje“ za takvo stanje u nastavi osnovne i srednje škole moglo bi se potražiti u različitim činiocima, prije svega u slabom kvalitetu odgovarajućih znanja iz metodike nastave matematike, a takođe i nepostojanju raznovrsne metodičko-matematičke literature i kvalitetnih stručnih metodološko-matematičkih časopisa, u kojima bi bili prezentovani istorijsko-filozofsko-razvojno-inovacioni, a istovremeno moderni psihološko-didaktički teoretski i praktični trendovi itd.

Više puta smo se u našoj višedecenijskoj praksi lično uvjerali, kada su učenici u pitanju, da su oni uvijek spremni i rado prihvataju promjene u nastavi, posebno raznovrsnost pri objašnjavanju (dokazivanju), tj. inovirane, jednostavnije i ljepše prikazane matematičke sadržaje.

Sve vrijeme tokom bavljenja nastavom matematike tragali smo za inovacijama i raritetnim poliformnim metodološkim prezentacijama mnogih matematičkih fenomena i ispitivao njihove efekte na razbijanje formalizma u nastavnom procesu, i njihov doprinos na kvalitet i trajnost učeničkih znanja.

Rezultati takve nastave, u svjetlu inovacionih komponenti, ogledali su se kako u boljem razumjevanju i usvajanju pređenih sadržaja, tako i u znatnom povećanju interesovanja i aktivnosti učenika na časovima matematike, sa posebnom težnjom ka samostalnom, kreativnom radu.

Nastava matematike, „začinjena“ inovacionim elementima, svojim dinamičkim pristupom, tj. kompletnim sagledavanjem i razumijevanjem datih problema omogućuje učenicima da jasnije proniknu u suštinu problema odvikavajući ih od šablonskog rješavanja zadataka i samim tim značajno doprinosi stvaranju trajnih znanja.

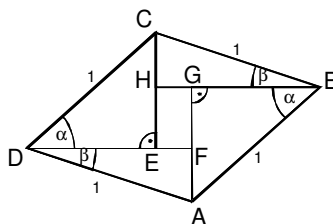
Nakon eksperimentalnih provjera na časovima matematike osnovne škole (seminarski radovi i diplomski radovi studenata, tj. provjere učinka inovacija na razbijanje formalizma u nastavi matematike i dinamiziranje i aktiviziranje tog procesa) u svim slučajevima, gdje su bili pridodati inovacioni i raritetni elementi, efekti interaktivnog metodičkog pristupa neizostavno su indukovali dinamičko, sveobuhvatno sagledavanje problema, što je konačno implikovalo rađanje kvalitetnih i trajnih znanja. Eksperimenti su potvrdili pozitivne efekte inovacija u nastavi matematike, koji su bili identični onim, do kojih sam došao ličnim iskustvom (navešću jedan primjer).

„Konkretno, kada je u pitanju nastava trigonometrije, ona se u gimnazijama matematičkog smjera realizuje u okviru teme Trigonometrijske funkcije (54 časa) u drugom razredu. Umjesto uobičajenog dokaza iz udžbenika učenicima sam primjenom Ptolemejeve teoreme izveo teoremu:

Ako su α i β takvi uglovi da je $0 < \alpha + \beta < \pi$, tada je:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

Na jednom od časova obradili smo klasični način dokazivanja, a nakon njega smo pokazali inovaciju korišćenjem ideje o jediničnom rombu. Učenicima se dopala jednostavnost ovoga dokaza koji neposredno proističe primjenom razložive jednakosti površine romba sa dva para podudarnih trouglova i jednim pravougonikom (slika 7), tako da su sami u svoje sveske odmah napisali $\sin(\alpha + \beta) = P$ i



Slika 7.

$P = \cos \beta \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \sin \alpha (\sin \alpha - \sin \beta) \cdot (\cos \beta - \cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha,$ odakle slijedi polazno tvrđenje.“[3]

Učenici su, kroz uvježbavanje u početku polusamostalno, a potom samostalno jednostavnim transformacijama izvodili ostale adicione formule. Pokazavši im kako se na drugačiji način od onoga na koji su je oni izveli može dokazati teorema o transformaciji zbira kosinusa u proizvod (što je detaljnije opisano u radu Đ. G. Marković, „Geometrija u funkciji razbijanja formalizma u nastavi matematike“ (2006) i Đ. G. Marković, „Geometrijskim poliformizmima“ (2006)) zahtijevali smo da pogodnim transformacijama, korišćenjem dokazane teoreme izvedu sve adicione teoreme. Većina učenika je uspješno otkrila te algoritme.

„Prezentovana na ovaj način priča o adicionim teoremama se prolongirala za jedan do dva časa. Međutim, iako se broj ovih časova povećao na uštrb časova uvježbavanja, efekti takve nastave ogledali su se kako u boljem razumjevanju i usvajanju pređenih sadržaja, tako i u znatnom povećanju interesovanja i aktivnosti učenika na časovima matematike, sa posebnom težnjom ka samostalnom, kreativnom radu.“[3]

Zaključak

Dakle, na osnovu sopstvenih iskustava koja imaju snagu bar jednog eksperimenta i nekoliko eksperimentalnih potvrda u vidu seminarskih i diplomskih radova studenata (2009/2010 školske godine), tj. radova Diferencirana nastave pri rješavanju problemskih zadataka iz matematike u III razredu osnovne škole, Ane Stijepović, i Primjena aktivne nastave u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole, Snežane Šćekić, i njihovih evaluacija u neposrednom praktičnom radu sa učenicima, smatramo da uvođenje inovacionih elemenata, posebno ako su dati u „svjetlu“ poliformnih geometrijskih tumačenja, daje izvanredne rezultate u procesu usvajanja matematičkih sadržaja na svim nivoima nastave.

Literatura

- [1] Perović, M. (2004). *Razvoj matematičkih i filozofskih ideja* – skripta, Specijalističke poslijediplomske studije, PMF Podgorica, 4–32.
- [2] Arnheim, P. (1985). *Vizuelno mišljenje (jedinstvo slike i pojma)*. Belgrade: University of Arts.
- [3] Marković, Đ. G. (2006). *Geometrijski polimorfizam*, Nastava matematike, LI, No. 3–4, Beograd, 11–24.
- [4] Шаригин, И.Ф. (2004). *Нужна ли школе 21-го века Геометрия?* Математическое просвещение, (Третья серия). Москва: Издательство МЦНМО, 34–52.
- [5] Marković, Đ. G. (2006). *Geometrijski poliformizam*. Podgorica: ZM Makarije.

THE EXAMPLES OF THE APPLICATION OF DIDACTIC PRINCIPLE OF POLYFORMISM IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Summary. This paper deals with the teaching of mathematics and especially the principle of polyform introduced with geometrical, arithmetical and algebraic interpretation in the function of making the teaching process more dynamic. Also we tend to give the students the occasion to continuously have the chance for the original and creative thinking and to develop habits of independent polyform thinking, critical evaluation and reasonable generalisation.

Key words: Principle of polyformism, geometrical polyformism, combine polyformism, methodological innovations, breaking of formalism.

Tamás Győrfi

Department of Mathematics and Informatics,
Eötvös József College,
Hungary
gyorfi.tamas@ejf.hu

APPLYING *IMAGINE LOGO* PROGRAM IN TEACHING

Summary. Trainee teachers get acquainted with the Imagine Logo programming language within the frames of the subject Information Technology. With the help of this programme students can produce among other things different plane figures.

In the course of teaching Geometry in lower primary classes exemplification is inevitable in forming basic geometrical concepts. We can compile the necessary, varied materials and tasks for developing and testing children – depending on the subject matter of instruction – with the help of Imagine Logo.

In my presentation I am going to introduce the methodological concerns of teaching and applying this program.

Key words: Imagine Logo, turtle graphics, primary educations, informatics, geometry.

Introduction

In my presentation I am going to give examples for applying the Imagine Logo program in the teaching and learning process.

During the first years of primary teaching, activity and experiencing are very important. In the course of lower primary education the various forms of work, co-operative techniques play a significant role. The aim is that students get experience from real actions and that they have a versatile concept image. Teachers should be able to create the possibility of real activity through activating as many channels as possible which ensures maintaining students' continuous attention. Imagine Logo program helps in all these.

Imagine Logo program

The Imagine Logo program can be used extensively and it can be applied with students of different abilities and with all age groups.

The Imagine Logo Program was produced by *Andrej Blaho, Ivan Kalas, Lubomír Salanci, Peter Tomcsányi* in 2001. The Hungarian version was compiled by the ELTE Team labor: *Abonyi-Tóth Andor, Turcsányi-Szabó Márta, Windisch József* in 2005.

The introduction of the program

Logo is developed for children in order to help them express their thoughts and ideas, their algorithm and create their models. (Logo: derives from the Greek word 'logos', meaning: reason, science) The Logo programming language and its pedagogical principles were elaborated by the American MIT mathematician and computer scientist, *Seymour Papert*. Papert was influenced by the ideas and experiments of *Piaget*¹.

The success of Logo in education was brought by the spreading of turtle graphics. Logo means a pedagogical environment in which children can do their own discoveries while gaining new knowledge. The turtle can be controlled by the computer keyboard: it moves forward or backwards, turns right or left with a certain angle, lifts its pen, puts it down while making different figures on the screen. The students give commands to the turtle and so they are able to check the consequences of their thinking. After observing the effects of their commands they can modify them if necessary.

Logo "knows" everything, like the high-level programming languages. The final program is built up from the individual components like modules. The writing of a program can be divided into logical units. Both bottom-up and top-down strategies can be applied.

Imagine Logo was supplied by a native language vocabulary, because children can express themselves easiest in their mother tongues. Besides this the program can also be used with English instruction.

Program structure

The upper part of the screen is the drawing window (Figure 1.), in the centre of which (in the origo of the coordinate system) the turtle can be found. In the lower part of the screen (after a question mark) the instructions for the turtle can be typed.

¹ the Swiss developmental psychologist and philosopher

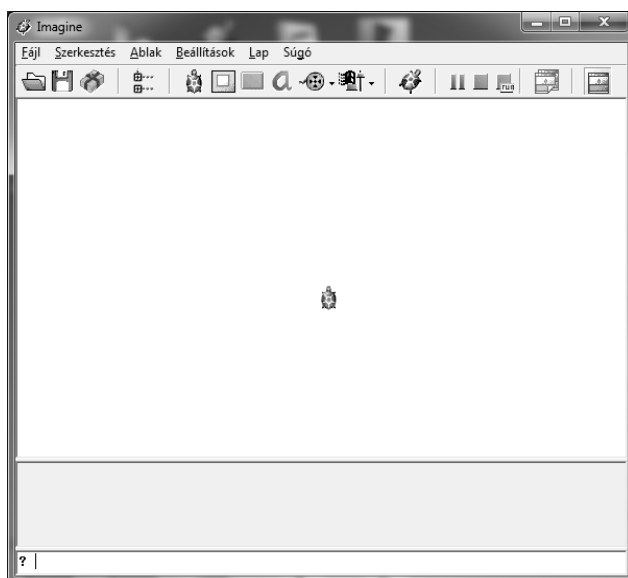


Figure 1. The Imagine Logo program structure

Students of the Eötvös József College can learn about the Imagine Logo programming (in the 6th semester) in the course called “*Informatics in education*”.

Areas of application

- for drawing (plane figures, geometrical figures, pictures, shapes, patterns – making programs),
- logic games,
- learning and practising words and expressions,
- compiling music,
- editing images,
- making animations.

The use of Imagine Logo Program in the teaching process

Drafting tasks (turtle graphics)

During the first four years of teaching mathematics in primary education there are divers possibilities for applying this program.

Teachers can mainly use it in the field of geometry and also preparing for the lessons (worksheets, visual aids). With the help of this program students can demonstrate their solutions in the case of certain geometrical problems (for example draw-

ing two-dimensional figures corresponding to given terms). However, the later can be expected from upper class students.

In lower primary classes essential concepts are dealt with in geometry, for example: triangle, tetragon, quadrate, rectangle, pentagon, hexagon, circle, cube, prism, pyramid, sphere, symmetry. The development of these concepts is a long process which goes on after the fourth year. To fully understand these concepts students need to solve and perform all kinds of tasks, and study diverse examples.

We can draw and create in the field of geometry with this program:

- Drawing and presenting different plane figures: square, rectangle, triangle, circle, rhombus, parallelogram, trapezoid, polygon.
- From plane figures new plane figures, producing complex figures, patterns.
- Reflections.
- Different body meshes: cube, rectangular, prism, pyramid, cylinder, cone.
- Ground plan of buildings.
- Front-view, top-view and side-view pictures.
- Perspective drawings of buildings.
- Drawing plane figures with given coordinates: in the 5th and 6th forms.

Logic games

Logo has many different logic games (e.g. Building blocks, Hexagon). After learning the language of programming, teachers training students can make their own programs.

The games are interesting and can be managed easily when teaching mathematics at primary schools, they serve as useful tools of motivation.

The Imagine Logo program makes differentiation possible, we can work with weaker or more talented learners with different tasks or within the frame of different forms of work. It develops creativity, the skills of solving problems and critical thinking, helps in forming the ability of abstraction.

Fields that can be developed with the help of the program:

- orientation in the quantitative relations of the world,
- systematization of knowledge,
- the use of the media of knowledge,
- self-motivated creation,
- communication,
- self-regulation.

Building blocks: In the game figures need to be reproduced after a model (Figure 2.), and different construction games can be practised.

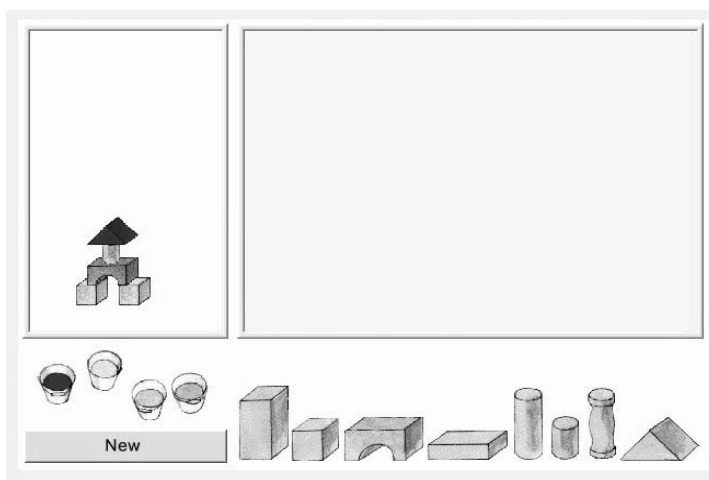


Figure 2. Building blocks logic game

Children need to reproduce the figure seen in the picture. The elements can be coloured to the given colour.

Hexagon: Using game hexagon logical thinking is needed. In the game white and blue hexagons form another bigger hexagon. The hexagon that students click on will change the neighbouring hexagon's colour to the opposing. The aim is that all hexagons should turn white.

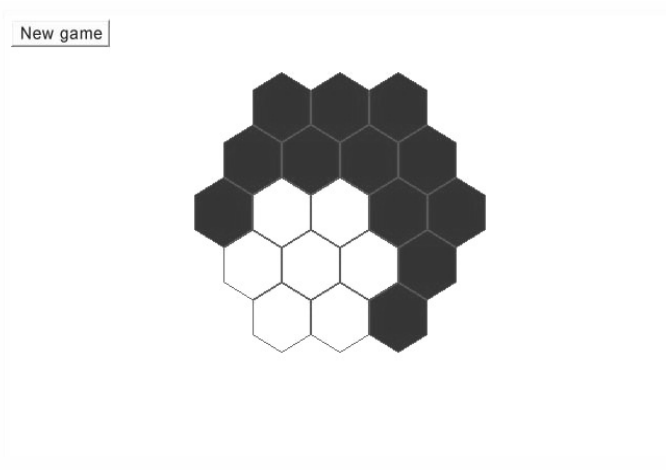


Figure 3. Hexagon logic game

Learning and practising words and expressions: with word puzzle game

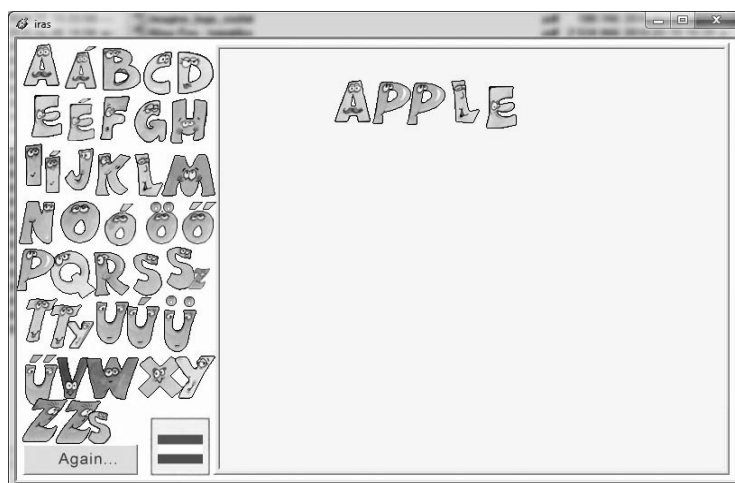


Figure 4. Word puzzle game
(The word puzzle game created using Imagine Logo program.)

By moving letters from the left words and expressions can be compiled on the right side of the screen (Figure 4.). It can be mainly used with third-grade children when learning new words, concepts and expressions, synthesizing previous knowledge through free associative thinking in the Hungarian language classes and in environmental studies.

When making the program different types of fonts can be used. Another version of the program can be prepared when words are grouped around concepts.

Compiling music

Imagine Logo has a built-in music compiling system (Figure 5.), to be started by typing instruction *scale*. The notes can be placed in the appropriate point on the sheet music in the Compile music window, the instrument can be chosen, the tempo (time) can be set and it's possible to listen and modify the edited melody.

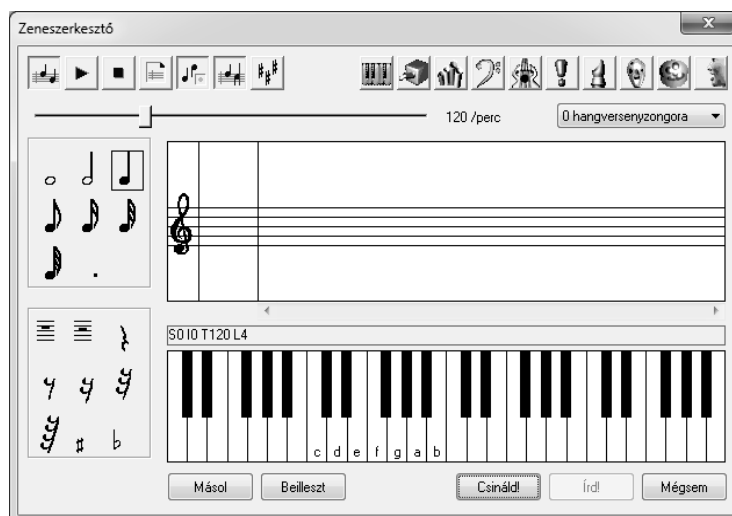


Figure 5. Compile Music structure

Clicking on any of the keyboard keys, the value of the currently selected note appears in the music field.

It can be used in the lower grades for recognizing tones and, in the 5th and 6th classes for illustrating the system of absolute sounds.

Editing images

Imagine Logo program has a built-in image editor (Figure 6.). Using it you can create images (e.g. Windows bitmap), drawings and modify (e.g. reflection arbitrary). The image editor is easy-to use, allows children a rapid acquisition, experience success and most importantly evolves their creativity. The drawing tools are similar to the devices used in the Paint program.

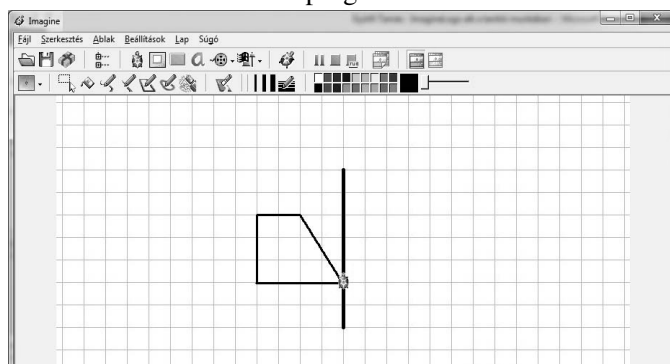


Figure 6. Image Editor

Making animation (LogoMotion)

In the Imagine Logo program own stories, games and animations can be prepared. LogoMotion (Figure 7.) is a high level picture and animation editor. It allows creating, modifying and animating picture sequences, which can then be used as the shape of turtles.

LogoMotion offers excellent opportunities such as drawing, painting, text writing and standard geometric shapes inserting tools.

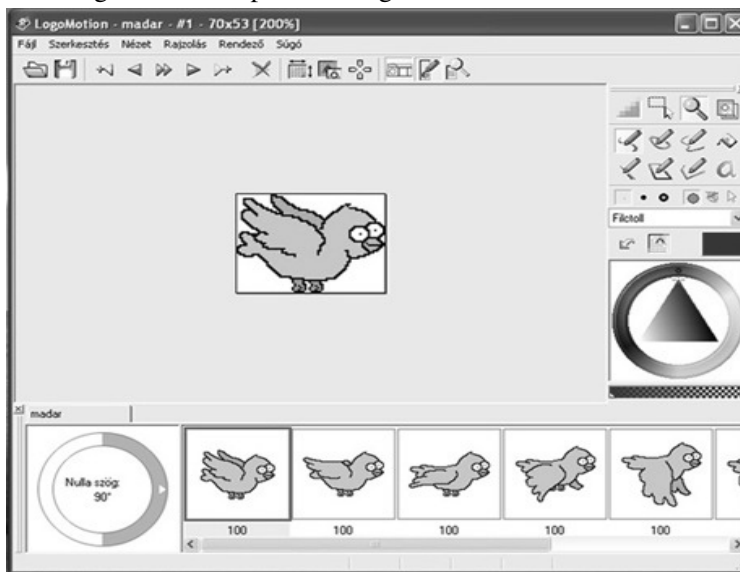


Figure 7. LogoMotion structure

Creating animations:

1. *Traditional animation creating technique.* The different phases of the movement sequence can be prepared and played, as an animation. LogoMotion will repeatedly replay the frames in an endless loop making the illusion of a continuous movement.

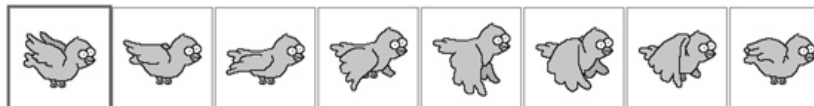


Figure 8. Range of motion

2. You can also create animations by changing the shape of the turtle (there are turtles with several phases) and assigning any movement and rotation. (Own backgrounds to the animations can be created e.g. in the image editor.)

For example: competition (Figure 9).

Clicking on the throw button, the turtles step the same steps that the randomly appearing number shows (1–6). The winner is the one which hits the finish line first.

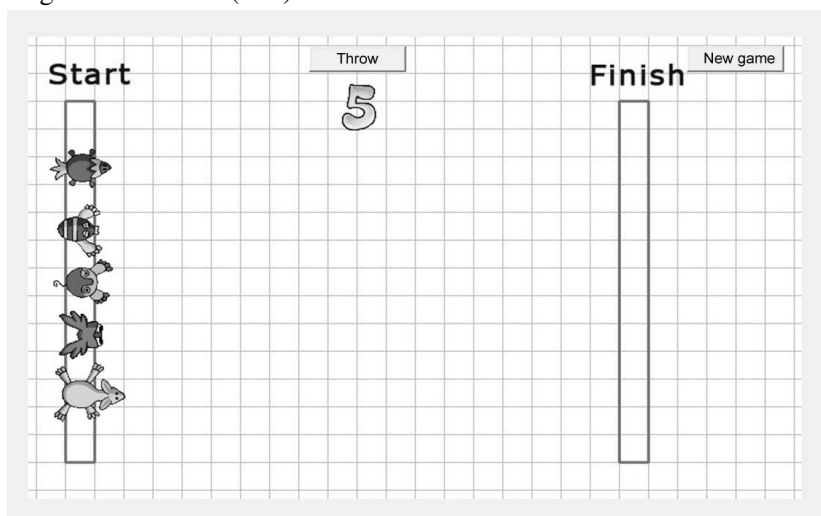


Figure 9. The animation created with the Imagine Logo program

Summary

Imagine Logo program is the tool of individual and collective acquisition and transmission of knowledge.

- The program can be used for acquiring the knowledge of informatics (programming), but can be applied in the experimenting, creative acquisition of other subjects (Mathematics, Language and Literature, Song and Music) as well.
- Mostly in Mathematics, in the subject matter of Geometry it helps to demonstrate exercises, to compile tasks or ranges of tasks (even on digital boards).
- Personal games, animations can be prepared.

References

- [1] Stuur A., Turcsányiné Szabó M. (1998): *Comenius Logo Játék és programozás*. Budapest, Kossuth Kiadó.
- [2] Turcsányiné Szabó M., Zsakó L. (1997): *Comenius Logo gyakorlatok*. Budapest, Kossuth Kiadó.
- [3] Dancsó T. (2001): *Comenius Logo Játék és animáció*. Budapest, Kossuth Kiadó.
- [4] Szentpéteriné Király T. (2000): *Comenius Logo Teknőcgrafika*. Budapest, Kossuth Kiadó.

ПРИМЕНА ПРОГРАМА *IMAGINE LOGO* У НАСТАВИ

Резиме. Будући учитељи упознају се са програмским језиком *Imagine Logo* у оквиру наставног предмета Информационе технологије. Помоћу овог програма студенти могу да стварају, између осталог, различите геометријске фигуре. У настави геометрије у нижим разредима основне школе давање примера је неопходно за стицање основних појмова из геометрије. Различити потребни материјали и задаци за подучавање и тестирање деце – у зависности од наставне јединице – могу се прикупити уз помоћ програма *Imagine Logo*. У овом раду биће представљени методолошки аспекти наставе и примене овог програма.

Кључне речи: *Imagine Logo*, графика, основно образовање, информатика, геометрија.

Ivan Budimir

Sveučilište u Zagrebu, Grafički fakultet, Hrvatska

budimir.ivan1@gmail.com

GEOMETRIJSKE OPTIČKE ILUZIJE

Apstrakt. Geometrijske optičke iluzije su vrste iluzija u kojima čovjekov vizualni sustav netočno interpretira geometrijska svojstva geometrijskih tijela, ploha i ostalih geometrijskih objekata. Postoje raznovrsne geometrijske optičke iluzije u kojima dolazi do različite percepcije geometrijskih likova, veličine i oblika, položaja i oblika linija promatranog objekta ili više interpretacija identične geometrijske strukture. U radu je napravljen pregled koji sadrži izbor najvažnijih geometrijskih optičkih iluzija. Dana je podjela geometrijskih optičkih iluzija prema neurološkim vizualnim mehanizmima koje ih uzrokuju. Objašnjene su neke najvažnije matematičke optičke iluzije poput Muller-Lyerove iluzije, horizontalno-vertikalne iluzije, Penrosinog trokuta, Shepardovih stolova, Akiyoshinih rotirajućih zmija i druge. Geometrijske optičke iluzije koriste se u likovnoj umjetnosti, fotografiji, arhitekturi i grafičkom i modnom dizajnu. Javljaju se u djelima drevnih kineskih slikara poput Gu Hongzhonga, renesansnog slikara Leonarda Da Vincija, kao i suvremenog umjetnika M. C. Eshera i brojnih drugih.

Ključne riječi. geometrijske optičke iluzije, percepcija, geometrijska svojstva, umjetnost.

Uvod

Geometrijske optičke iluzije su perceptivne varke koje su uzrokovane nesavršenošću čovjekovog vizualnog sustava. Pritom iluzija može biti uzrokovana perceptivnim mehanizmima u oku koje prikuplja vizualne informacije ili djelovanjem mozga koji obrađuje dane informacije stvarajući predodžbu koja se ne podudara s realnošću (Luckiesh, 1965). Geometrijske optičke iluzije su vrste iluzija u kojima vizualni sustav netočno interpretira geometrijska svojstva geometrijskih tijela, ploha i ostalih geometrijskih objekata. Postoje raznovrsne geometrijske optičke iluzije u kojima dolazi do različite percepcije geometrijskih likova, veličine i oblika, položaja i oblika linija promatranog objekta ili više interpretacija identične geometrijske strukture.

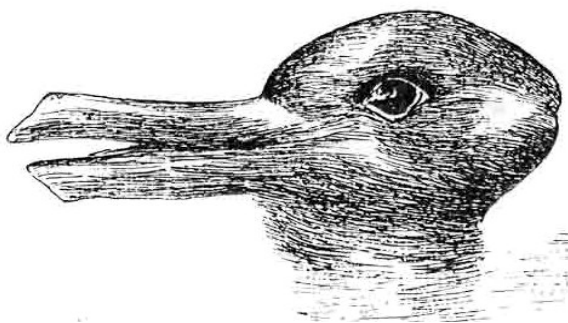
Geometrijske optičke iluzije pojavljuju se u likovnoj umjetnosti, fotografiji, arhitekturi i grafičkom i modnom dizajnu. Najpoznatija umjetnička optička iluzija je osmijeh da Vincijeve Mona Lise (Bohrn i sar., 2010). Mona Lisa skriva osmijeh ako se gleda njeno cijelo lice. Međutim, ako se promatrač usredotoči na Monalisine oči, na njenim ustima pojavljuje se osmijeh (Slika 1).



Slika 1. Na slici Leonarda da Vincija Mona Lisa se smije ako se gleda u njene oči

Svaki dvodimenzionalni prikaz trodimenzionalnog vanjskog svijeta temelji se na iluziji trodimenzionalnosti prostora. Dizajner ne može stvoriti trodimenzionalan prikaz na dvodimenzionalnoj površini. Stoga nastoji prikazati dubinu i volumen predmeta koristeći se iluzijom koju postiže vještom upotrebom boja i linija.

Čovjekov mozak nastoji vizualne podražaje interpretirati kao smislene cjeline. To postiže uočavanjem poznatih oblika i zaključivanjem u skladu s njima. No, postoje oblici koji mogu biti interpretirani kao više različitih poznatih predmeta, poput patke i zeca na poznatoj iluziji Josepha Jastrowa (Slika 2). U ovom slučaju, lijevi dio objekta može podsjećati na zečje uši ili patkin kljun. Ostatak slike je napravljen tako da se zapravo pomoću obje verzije mogu percipirati smislene cjeline.



Slika 2. Patka-zec iluzija Josepha Jastrowa

Od sredine 19. stoljeća do danas osmišljen je veliki broj geometrijskih optičkih iluzija. Brojni znanstvenici, umjetnici i dizajneri svakodnevno konstruiraju nove optičke iluzije. U poznatim svjetskim muzejima organiziraju se izložbe autora optič-

kih iluzija. Na temu optičkih iluzija na internetu je izložen veliki broj radova suvremenih umjetnika.

U ovom poglavlju napravljen je pregled koji sadrži izbor samo nekih najvažnijih geometrijskih optičkih iluzija. Same iluzije klasificirane su u tri skupine koje sačinjavaju sadržaj potpoglavlja. Podjela geometrijskih optičkih iluzija napravljena je prema neurološkim vizualnim mehanizmima koje ih uzrokuju.

Uzroci nastanka vizualnih iluzija povezani su s načinom funkcioniranja cjelokupnog vizualnog sustava (Gibson, 1950). Stoga, neuroznanstvenici vrlo intenzivno proučavaju geometrijske optičke iluzije istražujući njihove uzroke. Na taj način dobivaju nova saznanja o načinu na koji čovjekov mozak tumači podatke pristigle iz vanjskog svijeta, koje prima putem organa vida.

Većina neuroznanstvenika smatra da čovjekov sustav percepcije ima svrhu pružiti čovjeku informacije na temelju kojih svijet može doživljavati kao smislenu, organiziranu cjelinu (Ross & Plug, 1998; Gillam, 2000; Carlson, 2010). Da bi ta zadaća bila postignuta, vizualni sustav ne interpretira podatke potpuno identično njihovim realnim svojstvima. Nije teško zaključiti da to nije ni moguće, s obzirom da se vanjski svijet neprestano mijenja. Primjerice, automobili, ljudi i životinje i brojni drugi predmeti vanjskog svijeta su u neprestanom kretanju. Oni se približavaju ili udaljavaju u odnosu na vidno polje promatrača. Time u promatračevom oku percipirana slika povećava ili smanjuje. Međutim, to ne znači da će vizualni sustav približavanje ili udaljavanje nekog objekta protumačiti povećavanjem ili smanjivanjem tog istog objekta. Bez obzira nalazio se određeni predmet u blizini ili daleko od promatrača, veličina promatranog objekta percipira se konstantnom.

Vizualni sustav ne funkcionira na principu jednostavnog zbrajanja svih vizualnih podražaja. Takav način percepcije ne bi adekvatno ispunjavao čovjekove osnovne potrebe jer bi čovjekov mozak bio pretrpan informacijama. U tom slučaju čovjekovo snalaženje u svijetu bilo bi ograničeno. Stoga, mozak selekciju podataka koje prima putem osjetila.

Postoje neurološki mehanizmi koji osiguravaju konstantnost vizualne percepcije geometrijskih oblika. Spomenuti mehanizmi mogu se podijeliti na:

- a) mehanizam koji uzrokuje konstantnost veličine;
- b) mehanizam konstantnosti oblika.

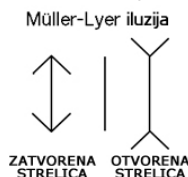
Mehanizmi konstantnosti veličine i konstantnosti oblika uzrokuju pojavljivanje brojnih geometrijskih optičkih iluzija (Bence, 2009).

Također, određene vizualne strukture mogu inducirati privid kretanja iako je sama struktura statična.

Konstantnost veličine

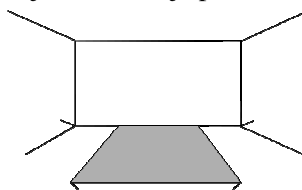
Mehanizam konstantosti veličine je sklonost vizualnog sustava da poznate objekte percipira u skladu s njihovom realnom veličinom, neovisno o njihovoj udaljenosti od promatrača.

Pomoću opisanog mehanizma konstantnosti vizualne percepcije mogu se protumačiti brojne vizualne iluzije, poput Muller-Lyerove iluzije (Howe & Purves, 2005). Na slici 3 prikazana je spomenuta iluzija.



Slika 3. Muller-Lyerova iluzija

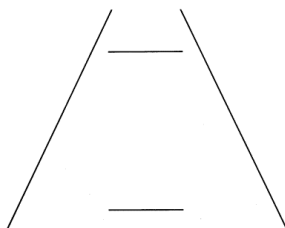
Muller-Lyerova iluzija jedna je od najstarijih geometrijskih optičkih iluzija. Konstruirana je 1889. godine. Na slici se dužina omeđena zatvorenim strelicama percipira kraćom od svoje realne vrijednosti. S druge strane, dužina omeđena otvorenim strelicama doima se duljom nego što jest. Richard Gregory tumači uzroke ove iluzije kao pogrešku koja nastaje usljed pogrešne primjene principa konstantnosti veličine (Gregory, 1997). Zbog nepostojanja treće dimenzije mozak konstruira prostor oko figure. Gregory zastupa mišljenje da čovjekov vizualni sustav nastoji sačuvati konstantnost veličine objekata na 2D slici, koristeći pritom 3D princip konstantnosti veličine. Naime, strelice kojima je omeđena dužina naš vizualni sustav percipira kao kutove trodimenzionalnih objekata, usljed čega dolazi do pogrešne interpretacije duljina dužina. Na sljedećoj slici zorno je predložen opisani princip (Slika 4).



Slika 4. Muller-Lyerova iluzija u 3D

U perspektivi na slici 4, vizualni mehanizam nastojeći sačuvati konstantnost veličine, percipira liniju koja je udaljena od promatrača dužom od linije koja je bliže promatraču.

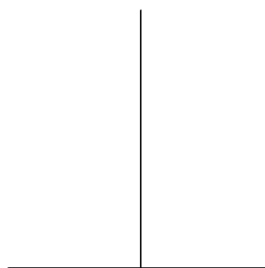
Ponzova iluzija prikazuje dvije jednake dužine koje su omeđene pravcima (Slika 5). Gornja dužina se čini dužom od donje dužine. Ovu iluziju prvi je pronašao talijanski psiholog Mario Ponzo 1911. godine (Shiraev & Levy, 2007).



Slika 5. Ponzova iluzija

Ponzo je postavio hipotezu da čovjekova percepcija ovisi o pozadini na kojoj se predmeti nalaze. Dvije okomite linije vizualni sustav interpretira kao paralelne linije koje se u nastavku produžavaju. Slično željezničkoj pruzi koja je usmjerena u daljinu. Stoga se gornja vodoravna dužina čini udaljenijom od donje dužine. Na taj način je vizualni sustav, s ciljem sačuvanja konstantnosti veličine, percipira dužom od donje linije.

Njemački psiholog Adolf Fick proučavao je načine na koji čovjek percipira jednostavna geometrijska svojstva. Prvi je uočio i opisao horizontalno-vertikalnu iluziju u svojoj doktorskoj disertaciji objavljenoj 1851. godine (Finger & Spelt, 1947). Na slici 6 koja prikazuje horizontalno-vertikalnu iluziju prikazane su dvije dužine jednakih duljina. Dužina koja je postavljena vertikalno percipira se duljom od dužine koja je položena horizontalno.



Slika 6. Horizontalno-vertikalna iluzija

Von Colani dokazao je da je horizontalno-vertikalna iluzija uzrokovana mehanizmom konstantnosti veličine (Von Collani, 1985).

Suvremeni nizozemski slikar M. C. Escher često koristi geometrijske optičke iluzije u svojim radovima (Al Seckel, 2004). Primjerice, u litografiji Vodopad iz 1961. godine (Slika 7) prikazano je kako voda istječe iz podnožja vodopada. Escher iluziju temelji na optičkoj iluziji koju uzrokuje mehanizam konstantnosti veličine, koja se postiže vještom konstrukcijom odnosa dubine i širine pozadine. Da bi postigao spomenuti odnos, Escher koristi proturječne proporcije koje u konačnici stvaraju dojam vizualnog paradoksa.



Slika 7.. Litografija Vodopad M. C. Eschera, 1961.

Escherov Vodopad nadahnut je optičkom iluzijom poznatom kao Penrosin trokut (Slika 8), koji je prvi osmislio švedski umjetnik Oscar Reutersvard, 1934. (Penrose & Penrose, 1958). Matematičar Roger Penrose istu iluziju samostalno je osmislio i popularizirao 1950. Penrosin trokut prikazuje tri grede, koje se sijeku pod pravim kutom ali još uvijek tvore trokut. Opisana konstrukcija krši nekoliko zakona geometrije. Primjerice, za Penrosin trokut ne vrijedi da je njegov zbroj kuteva 180^0 .

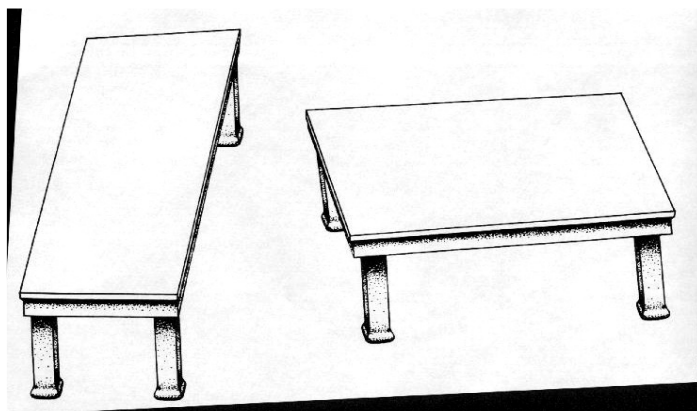


Slika 8. Penrosin trokut

Konstantnost oblika

Sklonost vizualnog sustava da percipira oblike neovisno o kutu pod kojim se objekt nalazi u vidnom polju promatrača naziva se mehanizmom konstantnosti oblika.

Jedna od najpoznatijih optičkih iluzija koja se temelji na mehanizmu konstantnosti oblika je iluzija Shepardovih stolova (Slika 9) prvi je opisao Roger Shepard 1990. godine (Shepard, 1990).



Slika 9. Shepardovi stolovi

Na slici 9 prezentirana su dva stola čije plohe su potpuno identičnih dimenzija. Duljina i širina ploha predloženih stolova su jednake duljine. Međutim, drugi stol percipira se znatno kraćim ali istovremeno i širim od prvog stola. Iluzija nastaje usljed težnje vizualnog sustava da sačuva konstantnost oblika trodimenzionalnih objekata koji su prikazani u dvodimenzionalnom prostoru.

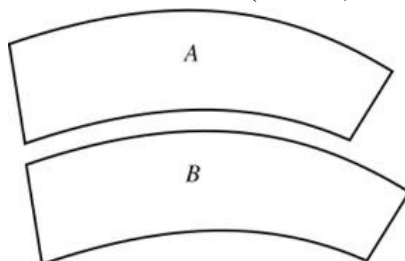
Iluzija Shepardovih stolova može se i drugačije protumačiti pomoću teorije Adolfa Ficka prema kojoj vizualni sustav ima tendenciju da vertikalne linije percipira dužim od istovjetnih horizontalnih linija.

W. Tyler pronašao je i druge paradoksalne elemente koji su povezani s Shepardovom iluzijom, poput nagiba ploče, nedostatak percepcije dubine i percepcije zadnje noge od stola (Tyler, 2011). Isti autor pronalazi slične vizualne elemente u kineskom slikarstvu starom više od 1000 godina (Tyler, 2011). Kineski slikar Gu Hongzhong iz razdoblja koje je poznato po nazivu Pet dinastija i deset kraljevstava (907–960) koristi geometrijsku strukturu Shepardovih stolova u klasičnom djelu „Večernji banket Han Xi-zai-a“, koje je izloženo u Palace muzeju u Bejingu (Slika 10).



Slika 10. Gu Hongzhong : Večernji banket Han Xi-zai-a

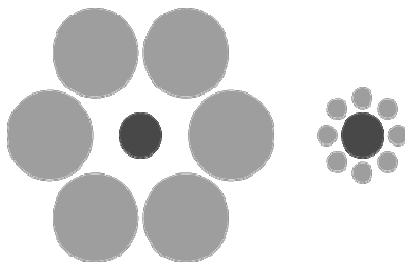
Jastrow iluzija prikazuje dvije potpuno identične figure (Slika 11). Jastrow iluziju osmislio je Robert Jastrow 1889. Godine (Jastrow, 1892; George, 1998).



Slika 11. Donja B figura doima se većom od gornje A figure iako su obje jednake veličine.

Jastrow pojavu iluzije pripisuje činjenici da gornja strana donje figure B leži u blizini donje strane gornje figure A. S obzirom da je gornja strana figure B duža od donje strane figure A, figura B čini se dužom. Prethodno tumačenje temelji se na pretpostavci lokalne usporedbe veličina, koja se nastoji interpretirati globalno. Kod ove iluzije oblik jednog objekta utječe na percepciju drugog objekta.

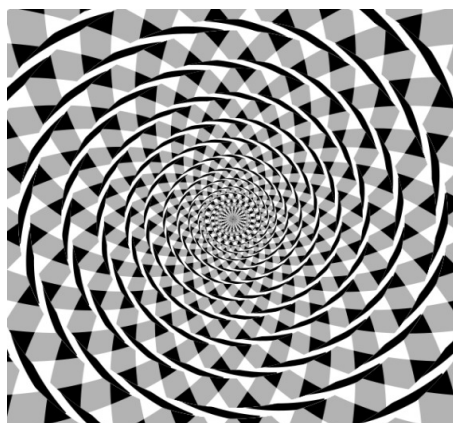
Ebbinghausova ili Titchnerova iluzija primjer je iluzije u kojoj dolazi do izražaja relativnost percepcije veličine. Otkrio je njemački psiholog Hermann Ebbinghaus. Ovu iluziju je popularizirao Edward Titchner 1901 (Roberts i sur., 2005).



Slika 12. Ebbinghausova iluzija

Na slici 12 lijevi i desni narančasti krugovi identične su veličine. Lijevi narančasti krug koji je okružen velikim plavim krugovima percipira se znatno manjim od identičnog desnog narančastog kruga koji je okružen malim plavim krugovima. Iluzija dokazuje da percepcija veličine predmeta ovisi o okruženju u kojem se predmet nalazi. Efekt je znatno slabijeg intenziteta kod djece mlađe od 10 godina (Doherty i sar.).

Fraserovu spiralu (Slika 13) prvi je opisao britanski psiholog James Fraser 1908. godine (Fraser, 1908). Iako se čini da lukovi koji se preklapaju spirale koje idu u beskonačnost, to je samo niz koncentričnih kružnica.



Slika 13. Fraserova spirala

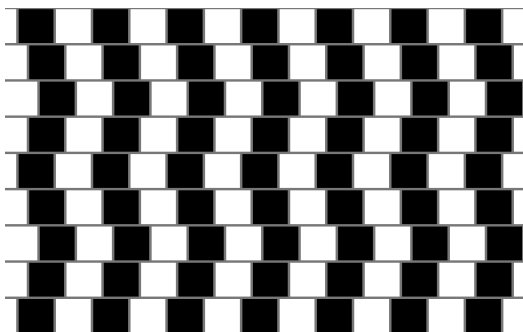
Ovaj efekt uzrokuju mali koso postavljeni paralelogrami različitih svjetlina i dimenzija koji se pravilno ponavljaju (Popple & Sagi, 2000).

Fraserova spirala predstavljala je inspiraciju brojnim umjetnicima poput Jonathan Gibbisa. On koristi jednostavne spiralne oblike poput Fraserove spirale i ribe u kombinaciji s linearnim unakrsnim linijama (Slika 14).



Slika 14. Jonathan Gibbs, Jellow Fish Spiral

Na istom principu kao i Fraserova spirala zasniva se i tzv. caffè wall iluzija (Slika 15). Iluzija je prvi put opisana 1898. godine kao „iluzija dječjeg vrtića“ (Pierce, 1898). Ponovo je otkrio Richard Gregory 1973. godine (Gregory & Heard, 1979). Prema Gregoryju ovaj efekt nalazio se na zidu jednog briselskog kafića koji je posjećivao član njegovog laboratorija. Kompozicija ove iluzije sastoji se od paralelnih linija koje su odijeljene crnim i bijelim kvadratima koji se pravilno ponavljaju. Spomenuti crno-bijeli kvadrati uzrokuju pogrešnu percepciju paralelnih ravnih linija koje se percipiraju kao iskrivljene.



Slika 15. Caffe-Wall iluzija

Zgrada u Melbourneu (Slika 16) kao i brojna druga arhitektonska ostvarenja inspirirana su ovom iluzijom.



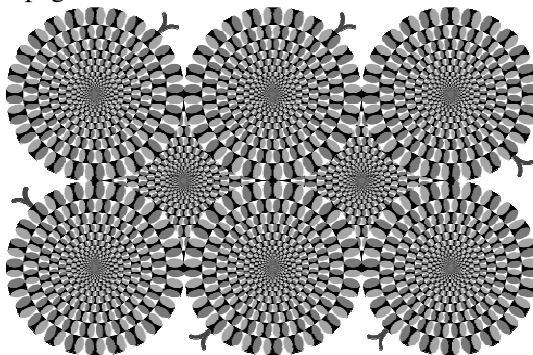
Slika 16. Zgrada u Melbourneu inspirirana caffe-wall iluzijom

Iluzije kretanja

Iluzije kretanja javljaju se u situacijama u kojima promatračev vizualni sustav percipira prividno kretanje promatranjem statičnog stimulusa. U ovim situacijama pomak se percipira iako nema gibanja slike po retini oka. Ova vrsta geometrijske optičke iluzije iznimno je složena te može biti uzrokovana različitim parametrima, poput različitih vremena procesiranja određenih karakteristika stimulusa u mozgu, periferna retinalna percepcija, lateralna inhibicija, neregistrirane karakteristike stimulusa, dinamička kromatska aberacija, krivo interpretirane karakteristike (Faubert & Herbert, 1999; Backus & Oruç, 2005; Conway i sar., 2005).

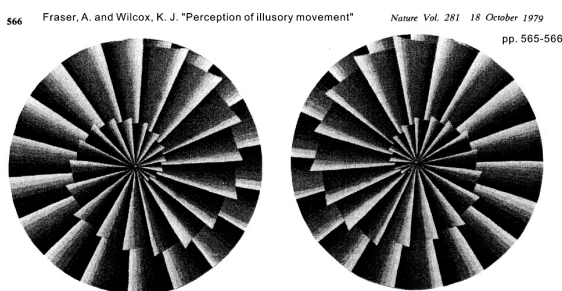
Japanski znanstvenik Akiyoshi Kitaoka autor je brojnih efekata koji induciraju iluziju kretanja (Kitaoka, 2002; Kitaoka & Ashida, 2003). Djelo „Rotirajuće zmije“ najpoznatija je Kitaokina optička iluzija (Slika 17). Prezentirana je 2003. godine kao dio Kitaokine Op-Art umjetnosti. Iluziju kretanja rotirajućih zmija uzrokuje učestalo ponavljanje kružne strukture geometrijskih oblika i kontrast upotrebljenih boja. Boje povećavaju intenzitet efekta iako se iluzija kretanja postiže i korištenjem akromatske

sive. Efekt se najsnažnije doživljava kada se slika promatra u cjelini. Fokusiranjem pogleda na pojedinačni krug unutar slike, iluzija kretanja prestaje te se slika doživljava statičnom. Brojni Akiyoshini radovi prezentirani su u internetskoj galeriji „Akiyoshi's illusion pages”.



Slika 17. Kitoakine Rotirajuće zmijs

Rotirajuće zmijs dio su vizualnih efekata kretanja koji nastaju na periferiji vidnog polja. Efekti ovog tipa poznati su pod nazivom periferni pomak (Peripheral drift). Fraser i Wilcox prvi su konstruirali i protumačili vizualni efekt perifernog pomicanja 1979. godine (Slika 18) (Fraser & Wilcox, 1979).

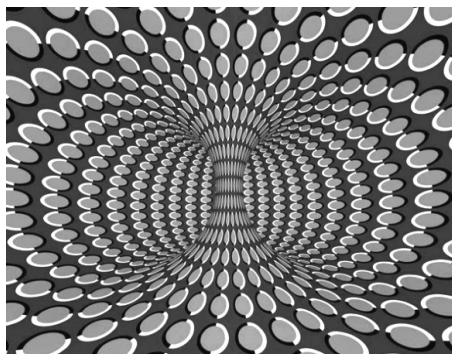


Slika 18. Efekt perifernog pomicanja Frasiera i Wilcoxa

Backus i Oruc istraživali su ovu klasu efekata 2005. godine (Backus & Oruç, 2005). Pokazali su da iluzija nastaje usljed adaptacije oka na kontrast i svjetlinu na različitim dijelovima slike. Signali koji generiraju doživljaj kretanja kod receptora pokreta, generiraju se usljed brojnih ponavljanja statičnih asimetričnih elemenata. Pritom dolazi do brzih promjena aktivnosti kod receptora pokreta. Conway i niz drugih autora dopunili su rezultate vezane uz promatrani efekt. Njihova istraživanja potvrdila su hipotezu da brzina i smjer efekta najviše ovisi o odnosu osvjetljenosti pojedinih statičnih elemenata promatranog objekta (Conway i sar., 2005).

Deeley Beau osmislio je 2012. iluziju „Spinning vortex“ koja je uzrokovana orijentacijom pojedinih elemenata stimulusa (Slika 19). Kao posljedica orijentacije,

promatrana slika percipira se kao kružni vrtlog koji se giba s lijeva prema desno iako su svi elementi slike statični.



Slika 19. Kružni vrtlog (spinning vortex) Deeleyja Beaura

Zaključak

Sve grane matematike povezane su s problemima koji se javljaju u „realnom svijetu“. Matematička znanja uspješno se primjenjuju u mnogim područjima ljudskih djelatnosti. Geometrijske optičke iluzije su vizualni fenomeni u kojima se geometrija povezuje s likovnom umjetnošću i dizajnom. Umjetnici i dizajneri koji konstruiraju geometrijske optičke iluzije u svojim radovima koriste znanja iz geometrije. S druge strane, optičke iluzije ukazuju i na složenu prirodu vizualne percepcije geometrijskih svojstava objekata. Stoga je geometrijske optičke iluzije korisno implementirati u sadržaj nastave matematike kako bi se polaznici upoznali sa opisanim sadržajem. Navedena problematika ima posebnu vrijednost za nastavu matematike na svim obrazovnim ustanovama koje su svojim programom usmjerene prema likovnoj umjetnosti, dizajnu ili arhitekturi.

Literatura

- Backus, B. T. & Oruç, İ. (2005). Illusory motion from change over time in the response to contrast and luminance. *Journal of Vision*, Vol. 5, No. 11, 1055–1069.
- Nanay, B. (2009). Shape constancy, not size constancy: a (partial) explanation for the Müller-Lyer illusion. In: Taatgen, N. A. & Van Rijn, H. (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Cognitive Science Society (CogSci 2009)*. pp. 579–584. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bohrn, I., Carbon C. C. & Hutzler F. (2010). Mona Lisa's Smile—Perception or Deception? *Psychological Science*, Vol. 21, No. 3, 378–380.
- Von Collani, G. (1985). Retinal projection or size constancy as determinants of the horizontal-vertical illusion? *Percept Mot Skills*, Vol. 61, No. 2, 547–557.
- Conway, B. R., Kitaoka, A., Yazdanbakhsh, A., Pack, C.C. & Livingstone, M.S. (2005). Neural basis for a powerful static motion illusion. *Journal of Neuroscience*, Vol. 25, No. 23, 5651–5656.

- Doherty, M. J., Campbell, N. M., Tsuji, H. & Phillips, W. A. (2010). The Ebbinghaus illusion deceives adults but not young children. *Developmental Science*, Vol. 13, No. 5, 714–721.
- Faubert, J. & Herbert, A. M. (1999). The peripheral drift illusion: A motion illusion in the visual periphery. *Perception*, Vol. 28, No. 5, 617–622.
- Fick, A. (1851). *De errone quodam optic asymmetria bulbi effecto*. Marburg: Koch.
- Finger, F. W. & Spelt, D. K. (1947). The illustration of the horizontal-vertical illusion. *Journal of Experimental Psychology*, Vol. 37, No.3, 243–250.
- Francis, G. (1988). *A topological picturebook*. New York: Springer Verlag.
- Fraser, A., Wilcox, K. J. (1979). Perception of illusory movement. *Nature*, Vol. 281, 565–566.
- Fraser, J. (1908). A New Visual Illusion of Direction. *British Journal of Psychology*, Vol. 2, No. 3, 307–320.
- Gibson, J. J. (1950). *The Perception of the Visual World*. Boston: Houghton Mifflin.
- Gillam, B. (2000). Perceptual Constancy, In: Kazdin, A. E. (Ed.) *Encyclopedia of psychology* 6. pp. 89–93. American Psychological Association and Oxford University Press.
- Gregory, R. L. (1997). *Eye and Brain*. 5th ed., Princeton University Press.
- Gregory, R. L., Heard, P. (1979). Border locking and the Cafe Wall illusion. *Perception*. Vol. 8, No. 4, 365–380.
- Howe, C. Q. & Purves, D. (2005). *Perceiving Geometry: Geometrical Illusions Explained by Natural Scene Statistics*, New York: Springer Science.
- Jastrow, J. (1892). Studies from the laboratory of experimental psychology of the University of Wisconsin – II. *Am J Psychol*, Vol. 4, No. 3, 381–428.
- Kitaoka, A. (2002) *Classification of anomalous motion illusions, Visual Localization in Space-Time*, (poster publication) University of Sussex, Brighton, UK.
- Kitaoka, A. & Ashida, H. (2003). Phenomenal Characteristic of the Peripheral Drift Illusions, *Vision*, Vol. 15., No. 4., 261–262.
- Luckiesh, M. (1965). *Visual Illusions; Their Causes, Characteristics, and Applications*. Toronto: Dover Publications.
- Neil, C. (2010). *Psychology the Science of Behavior*. [4th Canadian ed.] Toronto: Pearson Canada Inc., 188.
- Pentak, S., Roth, R. & Lauer, D. (2013). *Design Basics: 2D and 3D*, 8-th Ed. Cengage Learning.
- Penrose, L. S. & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, Vol. 49, No. 1, 31–33.
- Popple, A. V. & Sagi, D. A. (2000). Fraser Illusion Without Local Cues? *Vision Research*., Vol. 40, No. 8, 873–878.
- Pierce, A. H. (1898). The illusions of the kindergarten patterns. *Psych. Review*, Vol. 5, No. 3, 233–253.
- Roberts, B., Harris, M. G. & Yates, T. A. (2005). The roles of inducer size and distance in the Ebbinghaus illusion (Titchener circles). *Perception*, Vol. 34, No. 7, 847–856.
- Ross, H. F. & Plug, C. The history of size constancy and size illusions. In: Walsh, V. & Kulikowski, J. (Eds.), (1998). *Perceptual constancy: Why things look as they do*. pp. 499–528. New York: Cambridge University Press.
- Al Seckel. (2004). *Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion*. New York: Sterling Publishing Co. Inc.
- Shepard, R. N. (1990). *Mind Sights: Original Visual Illusions, Ambiguities, and other Anomalies*, New York: WH Freeman and Company.
- Shiraev, E. & Levy D. (2007). *Cross-Cultural Psychology*. 3rd ed., Pearson Education.

- Tyler, C. W. (2011). Paradoxical perception of surfaces in the Shepard tabletop. *i-Perception*, Vol. 2, No.2, 137–141.
- Tyler, C. W. (2011). Chinese perspective as a rational system and its relationship to Panofsky's symbolic form, *Chinese Journal of Psychology*, Vol. 53, No. 4, 371–391.

Internetske stranice

<http://arts.cultural-china.com/en/23Arts11374.html>

<http://www.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

GEOMETRIC OPTICAL ILLUSIONS

Summary. Geometric optical illusions are a form of illusions in which a person's visual system incorrectly interprets geometric features of geometric shapes, surfaces and other geometric objects. There are different geometric optical illusions in which different perception of geometric shapes, size and forms, position and line form of the observed object or more interpretations of the identic geometric structure occurs. This paper presents the overview of the choice of the most important geometric optical illusions. It contains the division of geometric optical illusions according to neurological visual mechanisms which cause the illusions. Furthermore, it contains the explanations for some of the most important mathematical optical illusions such as Muller-Lyer illusion, vertical-horizontal illusion, Penrose triangle, Shepard's tables, Akiyoshi's rotating snakes and other. Geometric optical illusions are used in visual arts, photography, architecture as well as graphic and fashion design. They appear in the works of ancient Chinese painters such as Gu Hongzhong, Renaissance painter Leonardo Da Vinci as well as in the works of modern artist M. C. Esher and many others.

Key words: geometric optical illusions, perception, geometric properties, art.

3

ИНФОРМАЦИОНЕ ТЕХНОЛОГИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Zoran Trifunov,
Tatjana Atanasova-Pachemska,
University “Goce Delcev”,
Shtip, Macedonia
Sanja Pachemska,
Ministry of education and science,
Education Development Bureau,
Skopje, Macedonia
zorantrifunov@gmail.com

USE OF FREE SOFTWARE IN MATHEMATICS CLASSES AND PRESENTING THE RESULTS OF THE RESEARCH

Summary. Does the technical equipment of the classrooms bring better results in mastering the teaching program by the students?

To answer this question we conducted a research which will be presented in this paper, and will determine the quality of knowledge which the students get, when learning the topic “Construction of triangle and quadrangle”, with use of free software *Geogebra* and informatics-mathematics approach, by comparing the achieved results on the diagnostic and the final test, of the experimental and the control group. The experimental group of students is learning the topic with use of free software and constructions made on computer, and the control group on classic way with ruler and caliper and constructions made in notebook. By now, this kind of research was successfully made on one generation of students. Now with the use of online tests we are expanding the research on new generation of students. The results that we will get from the research, we will summarize in statistical tests, which can help to compare the results obtained on the testing between the two groups of students, and also to compare with the results obtained from the past researches.

Key words: free software, construction, ICT, online test, compare.

Introduction

Good technical equipment of the educational institutions in Republic of Macedonia and permanent education of the teaching staff for using of ICT in education, lead to positive climate for the using of ICT in teaching, both from the teachers, and from the students. But for us to have real applying of ICT in the teaching, we need

to use informatics – mathematics access for performing of the teaching, where the preparations are made from active educators who are good IT specialists and mathematicians, and the students are actively included in performing the teaching with use of ICT.

Why to apply ICT in the teaching of mathematics?

Because the students and the teachers use and communicate between each other with computers, mobiles, tablets... so it's good to use them in the teaching; because it develops creative thinking by the students, helped by the teachers; because the proofs for the theorems and the tasks with use of free softwares, we can visually show them on a monitor; because the IT is our reality that we live in.

With the use of the free software Geogebra, we will present one characteristic example from the theme "Construction of a triangle" which can be resolved practically and shown visually (Stojanovska L, Trifunov Z, 2010), and then we will present the results that are acquired from the research, in which are included two groups, one group uses Geogebra for realization of the teaching contents from the same theme (Ligelfjard T, 2011), and the other group uses classical way without applying of ICT.

Goal of the research

Main goal of the research that is conducted and presented in this topic is determining the quality of the knowledge gained by the students, while learning the theme "Construction of a triangle", with the applying of ICT and informatics – mathematics access, opposite to the classical way of processing the theme and the knowledge gained by the students, through comparing the results achieved on the diagnostic online test and the final test, of the experimental and control group, which are sublimated in statistical tests and evaluation of the hypothesis for the mathematical expectation when known dispersion of the data.

Example on Construction of triangle with use of ICT

First, let's see one example from construction of a triangle how can be resolved with applying of Geogebra.

To resolve a constructive task, it means to draw some geometric figure with help of given tools for drawing. Ancient Greeks considered that "real geometric construction" is the one that can be done only with ruler and calipers (Samardziski A., 1988). In our schools we learn only constructions with ruler and calipers, that's why in this topic we will look only at these constructions. In practice there are constructions with one ruler, with two rulers, with one caliper or with other tools, which won't be examined here.

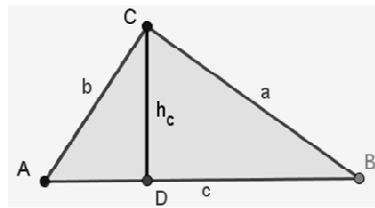
Resolving of one construction task isn't consisted only of the drawing, constructing the figure, but often in the answer of the question how to perform the construction and to proof that the construction is possible, while solution of one construction task we will understand every figure that meets the conditions of the task.

Stages when resolving of construction tasks are: analysis, construction, proof and discussion. As we have written before, resolving of construction tasks in this topic we will present with the help of the free software Geogebra. We will look at all four steps and we will make a comparing of the classical way of construction with help of ruler and calipers, and construction with help of Geogebra.

Task

Construct right triangle if it has given height h_c and the subtraction of the legs $a - b$ ($a \geq b$).

Analysis



In this example, we will make the analysis algebraic. Even in many examples while analyzing we can use the free software and visually determine the dependency of the given elements.

First step is to determine the hypotenuse c (algebraic way) of the required triangle, and the task will be simplified.

Let $a - b = m$. Square of the expression $a - b = m$ is $a^2 - 2ab + b^2 = m^2 \dots (1)$

From the formulas for the area of a rectangular triangle $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$,

follows

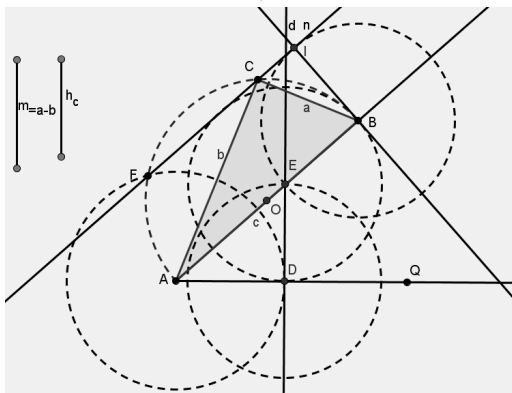
$$a \cdot b = c \cdot h_c \dots (2)$$

If in equation (1) we replace equation (2) and the Pythagorean Theorem $a^2 + b^2 = c^2$, we get $c^2 - 2ch_c = m^2$, i.e. $c^2 - 2ch_c - m^2 = 0$. Solution of the quadratic

equation through c is $c_{1/2} = \frac{2h_c \pm \sqrt{4h_c^2 + 4m^2}}{2}$, after settling and review only the

positive solution we get $c = h_c + \sqrt{h_c^2 + m^2} = h_c + x$, where x is the hypotenuse of a

rectangular triangle with legs h_c and m . Then with intersect of semicircle above the diameter c and parallel line at a distance h_c from c , is formed the third point.



Two lines on which are applied the segments $m = a - b$ and hc

Ray through two points AQ

Circle k_1 with center A and radius m

Intersect of k_1 and ray AQ , point D

Line d , perpendicular line in point D of a line AD

Circle k_2 with center D and radius h_c

Intersect of k_2 and ray d , point E

Ray through two points AE and segment $\overline{AE} = x$

Circle k_3 with center E and radius h_c

Intersect of k_3 and ray AE , point B (out of segment AE)

Perpendicular line in point B of a line AE . The procedures are repeated. Circle k_4 with center B and radius hc . Intersect of k_4 and the normal, point I . Line n , perpendicular line in point I of a line BI .

Midpoint O on AB

Semicircle with center O and diameter AB

Intersect of semicircle and line n , point C

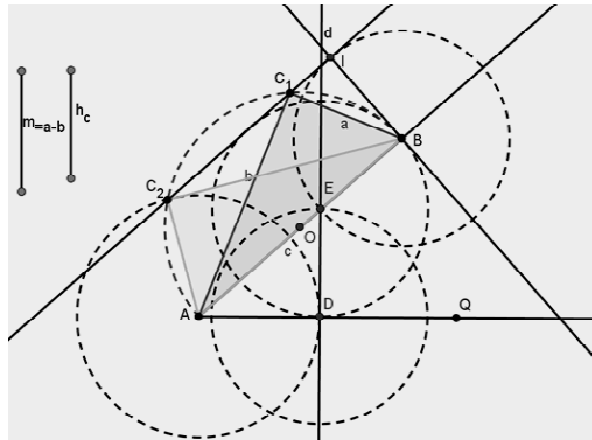
Triangle ABC

Proof

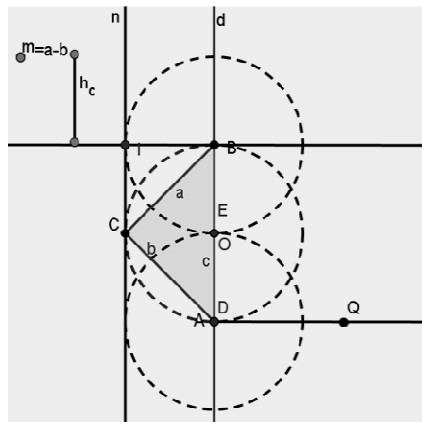
The Triangle ABC fulfils the set conditions, according to their size and position.

Discussion

If $m > 0$, then the task has two solutions ABC1 and ABC2.



If $m = 0$, then the task has one solution ABC (Isosceles right triangle).



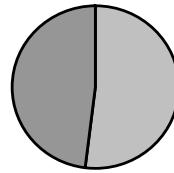
Research

This new way of resolving construction tasks with the help of Geogebra is applied while realizing of teaching classes for construction of a triangle.

By random choice there are picked two classes with 30 students or 60 students together on who the research is made. From the first class (experimental group) 26 students and 24 students from the second class (control group) agreed to allow their results to be used in the survey. Thus, the sample size is 50 students divided into two target groups.

	<i>First group Experimental</i>	<i>Second group Control</i>
Total	26	24

Table 1. Groups



■ First group Experimental ■ Second group Control

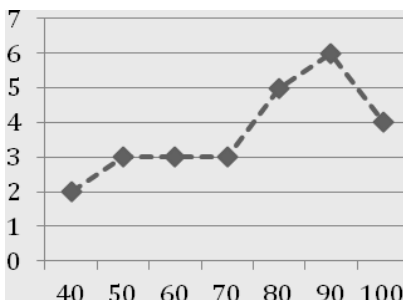
Graph 1. Groups

Students in both groups had studied solving constructive assignments in sixth grade, elementary school. So first we gave online diagnostic test to determine the initial knowledge of the students from the "Construction of a triangle" topic. In this research, the experimental group studied the topic using the free mathematics software Geogebra, to which the students were previously introduced, and the information – mathematical approach was used throughout the teaching. The second group, which is the control group, was taught in the traditional way for studying the same topic, that is, with the help of a ruler and a compass. At the end of the topic, a final test was made, which determined the newly acquired knowledge of students.

Statistical processing of the data

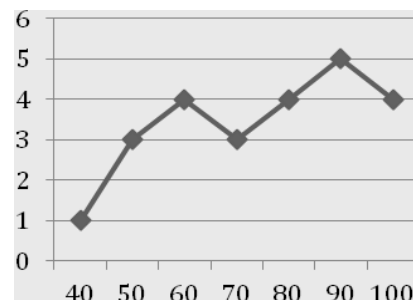
The data that is particularly relevant for the testing of the statistical hypotheses concerning the main objective of this research in this paper is presented in the table and graphic (Pachemska S., et al., 2014). Graphical view of the results of the students from the experimental and the control group of the online diagnostic test are shown on Histogram 1 and Histogram 2.

Arithmetic average: 75,38
Standard deviation: 18,65
Scope: 26



Histogram 1. Results of the diagnostic test of the experimental group

Arithmetic average: 75,42
Standard deviation: 18,02
Scope: 24



Histogram 2. Results of the diagnostic test of the control group

The average results of the diagnostic test of the two groups are approximately the same. We use the t-test for evaluating the equivalence of the mathematical expectation.

Zero hypothesis: $H_0 : E(X) = E(Y)$, where the signifier X is the random variable "results of the students from the experimental group of the diagnostic test," the signifier Y is the random variable "results of the students from the control group of the diagnostic test". $E(X)$ and $E(Y)$ are their respective mathematical expectations.

Alternative hypothesis: $H_1 : E(X) \neq E(Y)$.

The scope of the samples is $n_x = 26$ and $n_y = 24$. The standard deviation σ assess based on the adjusted standard deviation of samples $s_x = 19,02$ and $s_y = 18,41$. The estimation the standard deviation is $\sigma_p = 14,997$. The test value is $t = -0,006$.

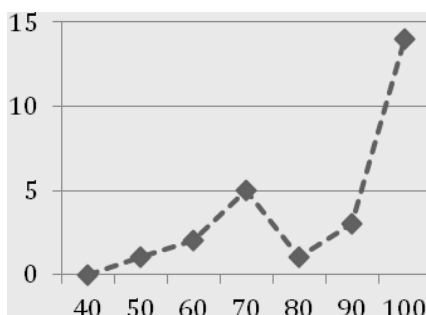
The level of significance of the test is $\alpha = 0,05$, $t_{n_x+n_y-2;0,025} = 2,0114$.

The critical domain is $B = (-\infty; -2,0114) \cup (2,0114; +\infty)$. We get $-0,006 > -2,0114$. Thus does not belong to the critical domain and we accept the null hypothesis and reject the alternative hypothesis.

With probability of 95% we can conclude that both groups have the same initial knowledge of the given topic.

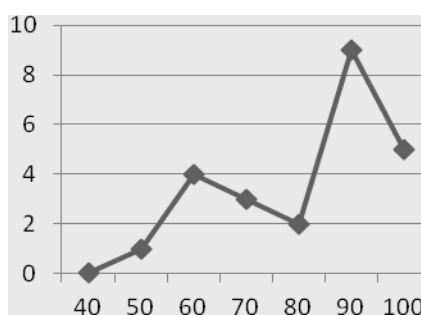
The results of the students from the experimental and control group for the final test are presented Histogram 3 and Histogram 4. The average result on the final test of the experimental group is higher than the average score of the control group. We use the t-test for evaluating the equivalence of the mathematical expectation.

Arithmetic average: 85,38
Standard deviation: 15,31
Scope: 26



Histogram 3. Results of the final test of the experimental group

Arithmetic average: 78,96
Standard deviation: 14,65
Scope: 24



Histogram 4. Results of the final test of the control group

Zero hypothesis, $H_0 : E(X) \leq E(Y)$, where the random variables are “results of the students on the final test” with signifier X for the experimental group and signifier Y for the control group. $E(X)$ and $E(Y)$ are their mathematical expectations.

Alternative hypothesis, $H_1 : E(X) > E(Y)$.

Standard deviations of the sample $s_X = 15,62$ and $s_Y = 14,96$. Estimation of the standard deviation $\sigma_p = 14,997$. The test value is $t = 2,301$.

The level of significance of the test $\alpha = 0,05$, $t_{n_X + n_Y - 2; 0,05} = 1,6794$.

The critical domain is $B = (1,6794; +\infty)$. Comparing $2,301 > 1,6794$, we see that t penetrates deeply into the critical domain, and therefore we reject the null hypothesis and accept the alternative hypothesis.

This means that with probability 95% we can conclude that the results of the students after the learning the construction of a triangle with the information - mathematical approach and the use of GeoGebra, are significantly better than the results of the students that studied the same content using the classic way.

Does the use of ICT equally affect the quality of the knowledge that students gain at all phases of solving the constructive tasks?

To answer this question, we compare the mathematical expectations for each of the phases separately and determined which of the stages in solving constructive tasks statistically differs from the obtained results. In the first three phases: analysis, construction and proof, we use zero hypothesis $H_0 : E(X) = E(Y)$, where the random variables are: "results of the students on the final test at the appropriate phase" with X for the experimental group and Y for the control group and alternative hypothesis $H_1 : E(X) \neq E(Y)$. The level of significance of the test $\alpha = 0,05$ giving the critical domain $B = (-\infty; -2,0141) \cup (2,0141; +\infty)$ and whether the hypothesis H_0 is rejected or not?

At the analysis, $t = 0,062$, comparing $0,062 < 2,0141$, the zero hypothesis isn't rejected,

At the construction, $t = 0,085$, comparing $0,085 < 2,0141$, the zero hypothesis isn't rejected,

At the proof, $t = -0,174$, comparing $-0,174 > -2,0141$, the zero hypothesis isn't rejected.

The fourth phase: discussions, we use zero hypothesis $H_0 : E(X) \leq E(Y)$ and alternative hypothesis $H_1 : E(X) > E(Y)$. The level of significance of the test $\alpha = 0,05$ giving the critical domain $B = (1,6794; +\infty)$ and whether the hypothesis H_0 is rejected or not?

At the discussion, $t = 2,828$, comparing $2,828 > 1,6794$, the zero hypothesis is rejected.

In the results that the students scored in the first three phases the zero hypothesis is not rejected and with 95% probability the results statistically do not differ and depend on the method of teaching. In the fourth phase the null hypothesis is rejected and with accuracy of 95% the alternative hypothesis is accepted showing that the results from the first group statistically differ when compared to the results of the second group. *The results achieved in the final test of the experimental group are better than the results of the control group, which were confirmed by the t-test.*

Conclusion

In this topic using the laws of statistics it is shown that, performing the teaching for construction of a triangle with help of informatics technology and free software GeoGebra, significantly improved the knowledge of students. Also it confirmed the expectations from this research that, the intergraded approach of using the information – communication technologies in visualizing the problems with information – mathematics approach for processing of the contents, positively impacts the quality of the knowledge on the students.

Bettering the knowledge can be connected with the gaining of motivation for learning the subject mathematics with use of the computers, visual assets and animations which can be made by the students.

After finishing the processing of the teaching content an anonymous survey was made, on which were asked questions about the way of performing the teaching and should this way of processing the teaching contents of mathematics continue. 92% from the students were satisfied and showed desire to process the next teaching contents with informatics – mathematics approach.

Using of informatics technology and free softwares for teaching mathematics, contribute to have positive changes at the teachers and the students.

Positive changes at the teachers are: motivated teacher for work, a lot of different opportunities for achieving the educational goals, more quality made preparations, more initiatives for self-improvement.

Positive changes at the students are: increased activity of the students while on class, motivation for learning, opportunity for mutual cooperation, acquiring of permanent and applicable knowledge.

Using of informatics technology and informatics – mathematics approach while realizing the teaching, we can say that leads to, teachers and students use the informatics technology as a learning tool, and not as a goal in itself, because it contributes for bettering the quality of the knowledge on the students.

References

- Stojanovska L. Trifunov Z. (2010), Constructing and Exploring Triangles with GeoGebra. *Anale Seria Informatica*, Vol VIII, Fac.2, 45–54.
- Samardziski A. (1988), *Homotetija, inverzija i zadacite na Apolonij*, Skopje: Nova kniga.
- Ligelfjard T. (2011), The Rebirth of Euclidean Geometry?, *Model-centered Learning ws.ith Geogebra: Theory and Practice in Mathematics Education*. (pp. 205-216). Rotterdam: Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies.
- Pachemska S., Atanasova-Pachemska T., Iliev D., Seweryn-Kuzmanovska M., (2014) Analyses of Student's Achievement Depending on Math Teaching Methods, *Procedia – Social and Behavioral Sciences* 116, 4035 – 4039.
- GeoGebra <http://geogebra.org>

УПОТРЕБА БЕСПЛАТНОГ СОФТВЕРА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Резиме. Да ли техничка опрема у учионици обезбеђује боље резултате у савладавању наставног програма? Да бисмо одговорили на ово питање, спровели смо истраживање које ћемо у овом раду представити и које ће показати квалитет знања које ученици стичу учећи наставну јединицу “Конструисање троугла и четвороугла” уз коришћење бесплатног софтвера *Геогѐбра* и информатичко-математичког приступа, упоређивањем добијених резултата о карактеристикама и финалног теста, код експерименталне и контролне групе. Експериментална група ученика је учила ову наставну јединицу уз помоћ бесплатног софтвера и конструкција урађених на компјутеру, а контролна група на класичан начин, помоћу лењира и шестара и конструкција урађених у свесци. Овај тип истраживања до сада је успешно спроведен са једном генерацијом ученика. Коришћењем „он лајн“ тестова сада смо проширили истраживање на нову генерацију ученика. Резултате које ћемо добити у истраживању објединићемо у статистичким тестовима који могу да допринесу упоређивању резултата добијених на тестовима између две групе ученика, али и упоређивању са резултатима претходних истраживања.

Кључне речи: бесплатни софтвер, конструисање, информациона технологија, „он лајн“ тест, упоређивање.

Верица Милутиновић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу,

Јагодина

verica.milutinovic@pefja.kg.ac.rs

АНАЛИЗА ИСКУСТВА И НАМЕРЕ УПОТРЕБЕ РАЧУНАРА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЋИХ УЧИТЕЉА И НАСТАВНИКА МАТЕМАТИКЕ

Айстиракџи. Циљ ове студије је да се истражи искуство и намера употребе различитих компјутерских технологија у настави математике међу будућим учитељима и наставницима математике у Србији. Врсте компјутерске технологије које смо испитивали су оне од значаја за постизање традиционалних циљева наставе, као и за целоживотно учење. Ту спадају програми за побољшање ефикасности процеса учења, дрил и праксу, развој ученичких сарадничких и организационих вештина за рад у тимовима или индивидуализацију учења ученика. Практика у настави математике указује да би то могло укључити активности као што су: пројекција готових презентација, развој нових презентација, коришћење спремних модела за симулацију, развој нових модела, употреба онлајн-тестова, креирање нових тестова, употреба викија или других Веб 2.0 технологија за размену информација, комуникацију и сараднички тимски рад на развоју пројекта и решавање проблема. Рад има за циљ да анализира утицај искуства на намеру употребе поменутих компјутерских технологија у настави математике. Подаци су прикупљени од 455 будућих наставника кроз самоизвештајне упитнике и анализирани коришћењем СПСС статистичког софтвера. Међу учесницима је било 67.9% (309) будућих учитеља, док је 32.1% (146) било будућих наставника математике. Разматране су импликације за наставу математике.

Кључне речи: настава математике, будући наставници математике, будући учитељи, намера употребе технологије, технолошко искуство.

Увод

У данашњем свету, када се читаво друштво трансформише из индустријског у информатичко или „друштво знања” тј. „дигитално доба”, ђацима је потребно пружити услове за развој компетенција за целоживотно учење које ће им бити потребне у 21. веку. Ученике треба оспособити да се сналазе пред захтевима како професионалног тако и грађанског живота, да проналазе информације, врше селекцију, да критички мисле, разумеју природу података, да

знају који су подаци веродостојини, да знају да разликују чињенице, да умеју да их искористе у конструкцији знања за потребе свакодневног живота. Из тог разлога је важно ђаке припремити за 21. век и код њих развити нове компетенције које прописују стандарди образовне технологије. Међународно удружење за примену технологије у образовању (International Society for Technology in Education) развило је нове стандарде образовне технологије за ученике и наставнике (ISTE, 2007; ISTE, 2008) који позивају на интеграцију технологије у контексту самих предметних области. Посебно се истиче значај развоја вештина код ученика као што су: (1) креативност и стваралаштво, (2) комуникација и сарадња, (3) истраживачка и информациона флуентност, (4) критичко расуђивање, (5) решавање проблема и доношење одлука, (6) дигитално држављанство и технолошка оперативност и разумевање концепата.

Познато је да је за развијање способности решавања проблема у школи, активно учешће ученика у решавању математичких проблема важан предуслов почевши још од основног образовања (NCTM, 2000). Математика, као један од основних предмета, подстиче и негује развој поменутих вештина, посебно када су у питању решавање проблема, критичко мишљење, креативност и сарадња.

Са друге стране, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000, р. 24) наглашава да је технологија од суштинске важности у настави и учењу математике, да она утиче на математику која се учи и унапређује учење. Употреба технологије на одговарајући начин може омогућити активно учешће ученика у настави математике, са учеником у центру.

У ту сврху, транзиције са традиционално орјентисане наставе засноване на предавањима са наставником у центру, на иновативну наставу засновану на технологији, са учеником у центру, образовне реформе позивају на развој и примену технолошки подржаних успешних програма за образовање наставника (UNESCO 2002). У зависности од тога колико наставници користе рачунаре и на који начин, ученици могу боље развити своје компетенције за 21. век. Како би постигли развој ових нових вештина, одговарајућа употреба технологија заснованих на коришћењу рачунара у образовању суштински је важна и стога прихватање наставника и коришћење у свакодневној пракси је од кључног значаја.

Како би се код будућих наставника развиле позитивне намере да користе рачунар треба добро осмислити програм њиховог школовања на студијама као и стручног усавршавања наставника који раде. То је главни разлог што фокусирамо наше анализе у овој студији на испитивање прихватања рачунара будућих учитеља и наставника у настави математике за први циклус основне школе.

Полазне теоријске основе истраживања

Прихватање технологије и искуство

Истраживања у Србији (Dimitrijević и сар., 2012) указују на то да наставници математике технологију углавном користе недовољно и неадекватно у својој настави, како у основним тако и у средњим школама. Аутори такође тврде да је за ефикасну интеграцију технологије у наставном процесу, изузетно важно да се обезбеде услови да се наставници унапред добро припреме пре запослења у настави.

Када је у питању настава математике у 21. веку, јасно је да су наставници под сталним притиском да користе савремене информационо-комуникационе технологије како због потребе да ђаци стекну знања и вештине које ће им бити потребне у модерном друштву, тако и због потенцијалних вредности ових технологија као алата у учењу. Јилдирим (Yildirim, 2000) је утврдио да наставници који више користе рачунаре обично развијају позитивне ставове и намере употребе што промовише њихово даље коришћење рачунара у професионалним обавезама, као што су подучавање и администрација. Зато је потребно, будућим наставницима обезбедити све потребне предуслове и адекватно образовање и праксу, како би били у стању да користе рачунар у настави на адекватан начин. Како би предуслови били обезбеђени потребно је идентификовати предикторе њихове намере употребе рачунара у настави, и у овој студији желимо детаљније испитати утицај искуства као предиктора.

Без обзира на стање технолошког напретка у школама, степен коришћења технологије доста зависи тога да ли наставници прихватају технологију (Huang and Liaw, 2005). Истраживања о прихватању ИКТ у образовању углавном се фокусирају на индивидуално прихватање технологије проучавањем намере употребе технологије као зависне варијабле (Drent and Meelissen 2008; Hermans et al., 2008; Milutinović, 2010; Pierce and Ball 2009; Тео 2009b). Кључни разлог за проучавање намере будућег наставника да користи рачунар је њена способност предвиђања коришћења рачунара у будућности, јер је показано да намере утичу на стварну употребу (Venkatesh et al., 2003; Milutinović, 2010).

Истраживачи сугеришу да је искуство са компјутерском технологијама једна од значајних варијабли које предвиђају разлике у коришћењу рачунара у настави и учењу од стране наставника (Drent & Meelissen, 2008; Hermans et al., 2008; Mueller et al., 2008; Kadijevich & Наарасало, 2008). NCTM (2007) сматра да ако наставник треба да научи како да створи позитивно окружење које промовише решавање проблема кроз сарадњу, инкорпорира технологију на смислен начин, позива на интелектуално истраживање, а подржава размишљање ученика, он мора да искуси учење у таквом окружењу. Расел (Russel et al.,

2003) је са сарадницима утврдио да искуство наставника утиче на њихово самопоуздање у коришћењу технологије. Они препоручују да припрема наставника буде побољшана пружањем могућности за наставнике да виде и искусе позитивне ефекте технологије на наставу и учење још за време студија.

Видови коришћења рачунара у настави математике за 21. век

Истраживања су показала различите могућности и нивое употребе рачунара у образовању (Jonassen, 2000; Tondeur et al., 2007; Tubin, 2006; Maddux et al., 1997; Teo, 2009a; Drent & Meelissen, 2008; Voogt, 2010). Јонасен у својој књизи (Jonassen, 2000) наводи да се рачунари могу користити у образовању као алати за семантичку организацију, за динамичко моделирање (енгл. dynamic modelling tools – DMT), интерпретацију (енгл. interpretation tools – IT), конструкцију знања (енгл. knowledge construction tools – KCT) и конверзацију (енгл. conversation tools – CT). Тондеур и аутори (2007) разликују три врсте употребе рачунара у области образовања: рачунар као информационо средство, као средство за учење и као средство за развој основних рачунарских вештина (Tondeur et al., 2007). Међутим, у последње време, студије о различитим начинима коришћења рачунара у образовању наглашавају стратегије које наставници користе при интеграцији технологије у учионици (Tubin, 2006; Drent & Meelissen, 2008; Teo, 2009a; Voogt, 2010).

Интеграција технологије у наставу математике 21. века представља коришћење рачунара у свим аспектима наставе и учења и инкорпорација технологије у циљеве образовања, лекције и оцењивање исхода учења. У контексту наставе и учења математике, технологија обухвата коришћење рачунара и одговарајућег математичког софтвера нпр. за алгебру, онлајн-дискусије, Јава аплете за интеракцију са математичким проблемима, динамичке софтвере за геометријску анализу и анализу података, тестирање знања ученика. Технологија може пружити ђацима моћне алате за рачунање, конструкцију, визуелно представљање градива и на тај начин им омогућити приступачнијим математичке садржаје и концепте који би им иначе били исувише сложени за истраживање.

За потребе ове студије, одабрали смо примере засноване на примени технологије односно, наставничком коришћењу рачунара на два начина у зависности од стратегије његове интеграције (Tubin, 2006; Maddux et al., 1997). Примена типа I је она која доприноси лакшој, бржој и погоднијој настави на традиционални начин (Tubin, 2006). Примена типа II је она која омогућава нове и боље начине учења и наставе, који не би били могући без коришћења технологије (Tubin, 2006). Даље, у оквиру ова два нивоа покушали смо да укључимо што више начина коришћење рачунара које је поменуо Јонасен (2000).

Традиционални ниво употребе рачунара је употреба ИКТ у настави математике као подршке настави којом руководи наставник, засноване на фронталном облику наставе путем предавања како би се постигли исти традиционални циљеви под истим условима без значајних измена у активностима на часу. Ово виђење традиционалног нивоа је подржано и ранијим истраживањима (Тео, 2009а). Традиционални ниво односи се на коришћење рачунара као средства информисања, кроз рад са студентима на истим материјалима за учење, истим темпом или процењивањем усвојених знања ученика коришћењем квизова и тестова (Voogt, 2010). Примена рачунара, пре свега је усмерена на замену постојеће наставне праксе (нпр. дрил и пракса, обрада текста, програми који доприносе да процес учења буде ефикаснији). Досадашња пракса у настави математике сугерише да би овај ниво коришћења могао да обухвата активности као што су пројекције презентација спремних за коришћење или производња (креирање) нових презентација (тј. ИТ, КСТ), коришћење спремних за употребу модела за симулацију од стране наставника (тј. ИТ, КСТ, DMT), употреба онлајн-тестова и креирање нових тестова знања (СТ).

Са друге стране, иновативна употреба рачунара у настави математике је употреба ИКТ као подршке иновативном учењу, усмереном на ученика и заснованом на технологији, ради постизања образовних циљева заснованим на потребама садашњег друштва знања и циљева целоживотног учења (Tubin, 2006; Drent & Meelissen, 2008; Тео, 2009а). То значи употребу ИКТ ради проширивања граница учионице, повезивања ученика са догађајима из реалног света, и усмеравања ученика како би постали независни корисници (Тео, 2009а). Иновативни ниво односи се на коришћење рачунара као наставног средства за развој сарадничких и организационих способности ученика за рад у тимовима или индивидуализацију учења ученика (Voogt, 2010). Досадашње пракса у настави математике сугерише да би иновативна употреба могла да обухвата активности као што су: развој нових модела у динамичким геометријским софтверима (DMT према Јонасену), коришћење вики или других Веб 2.0 алата за размену информација, комуникацију и сараднички тимски рад на развоју пројеката и решавање проблема (СТ, КСТ према Јонасену).

У овом раду испитали смо и коришћење истог софтвера на различите начине, као што је нпр. коришћење готових модела и креирање нових модела у програму Геогebra, или коришћење викија за размену информација и за групни рад на развоју пројеката.

Методолошки оквир истраживања

Предмет, циљ и задаци истраживања

Предмет истраживања јесте намера употребе различитих компјутерских технологија у настави математике међу будућим учитељима и наставницима математике у Србији и улога искуства у формирању тих намера, у сврху бољег развоја и дизајнирања ефикаснијих програма за информатичко образовање учитеља и наставника математике.

Циљ истраживања је да се утврди како студенти – будући учитељи и будући наставници математике сагледавају значај искуства у коришћењу различитих технологија у настави математике у процесу иницијалног образовања у односу на њихову намеру да их користе у свом будућем раду.

Из циља истраживања изведени су следећи задаци истраживања:

1. Испитати искуство студената – будућих учитеља и наставника математике у коришћењу разних видова технологије у настави математике.
2. Испитати намере студената – учитеља и наставника математике да користе разне видове технологије у својој будућој настави математике.
3. Утврдити да ли се ставови студената – учитеља и наставника математике значајно разликују у вези са искуством и намерама.
4. Испитати утицај искуства на намеру коришћења разних видова технологије у настави математике.

Током истраживања које је предмет ове студије примењене су различите методе, како информатичке тако и педагошко-образовне: развој мултимедијалног видео стимулуса, анкетање, статистичка анализа.

Инструменти

За потребе ове студије конструисан је комбиновани упитник путем кога су испитивани ставови студената, будућих учитеља и наставника математике, о искуству у коришћењу технологије за време иницијалног образовања као и о намери коришћења у будућем раду у настави математике.

Намера коришћења рачунара (BI) и искуство у коришћењу рачунара у настави и учењу математике (EXP) мерени су скалама повезаним са видео стимулусом који су учесници погледали пре попуњавања упитника и садрже свака по осам питања (види Табелу 1). Свака ставка у вези са намером понашања мерена је избором учесника на петостепеној Ликертовој скали, са значењима од 1 – уопште се не слажем до 5 – у потпуности се слажем. Као код Кадијевића и Хапасала (Kadijevich & Haapasalo, 2008) укупно искуство је требало да буде

наведено (у сатима) за сваку активност. Одговори у виду временског интервала као '10–20 h' су такође били дозвољени, али средња вредност одговарајућих бројева је узимана као одговор. Затим су одговори за искуство кодирани и претворени у вредности 1 – за одговоре веће од медијане и 0 – за вредности мање или једнаке медијани те ставке. Кодирани варијабле поред назива имају додатак: _COD.

Табела 1. Питања и ознаке ставки у упитнику

Назив	Искуство (EXP)
	Наведите <u>мерено у сатима</u> Ваше укупно досадашње искуство у раду на рачунару (у школи, на факултету и код куће). Напишите колико оно износи за следеће активности:
EXP1	Коришћење сачињених презентација
EXP2	Прављење (израду) нових презентација
EXP3	Коришћење готових модела
EXP4	Прављење (израду) нових модела
EXP5	Размену информација у неком вики окружењу
EXP6	Развој групних пројеката (нпр. рачунање трошкова екскурзије) у неком вики окружењу
EXP7	Тестирање знања коришћењем већ начињених тестова
EXP8	Прављење нових тестова знања
Назив	Намера употребе (BI)
	Планирам да у настави математике често користим рачунар и одговарајући софтвер за:
BI1	Коришћење сачињених презентација
BI2	Прављење (израду) нових презентација
BI3	Коришћење готових модела
BI4	Прављење (израду) нових модела
BI5	Размену информација у неком вики окружењу
BI6	Развој групних пројеката (нпр. рачунање трошкова екскурзије) у неком вики окружењу
BI7	Тестирање знања коришћењем већ начињених тестова
BI8	Прављење нових тестова знања

Узорак

У истраживању је учествовало 455 будућих учитеља и наставника математике са три Универзитета у Србији. Од укупног броја испитаника, 209 је похађало Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, у Јагодини, 100 испитаника Учитељски факултет у Ужицу и 29 Природно-математички факултет истог Универзитета. Са Математичког факултета Универзитета у Београду учествовало је 75 испитаника и њих 42 са Департмана за математику, Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду. Међу учесницима, 11,6% (53) су били мушкарци, а просечна старост свих учесника била је 22.52 (SD = 1,29) године. Већина учесника, њих 250 (54,9%), одслушала је трећу годину својих студија, док су остали одслушали четврту. За испитивање

по типовима будућих наставника било је 309 будућих учитеља а 146 будућих наставника математике.

Испитаницима који су учествовали у истраживању представљена је сврха ове студије и указано на њихово право да се повуку у било ком тренутку током или након попуњавања упитника. Сви учесници најпре су одгледали кратак видео-стимулус (филмски инсерт) како би боље схватили видове коришћења рачунара у настави математике на које се односе питања у вези са искуством и намером понашања, а затим су попунили анкетни листић. У просеку, сваком учеснику је било потребно око 10 минута за попуњавање упитника. Учесници ове студије нису добили додатне поене на курсевима или награде, а учешће је било добровољно.

Видео-стимулус

Филм је припремљен према важећем Наставном плану и програму предмета Математика за четврти разред (намењен будућим учитељима) и осми разред (намењен будућим наставницима математике) основне школе. За филм су одабрани садржаји погодни за сваки вид наведене употребе по нивоима уз коришћење одговарајућег софтвера.

Бројни истраживачи су сугерисали да гледање видео материјала од стране учитеља и наставника носи потенцијал да скрене пажњу на важне аспекте наставе и учења (Sherin & Han, 2004; Star & Strickland, 2007; Lampert & Ball, 1998). Имајући у виду да будући учитељи и наставници математике у Србији ограничено користе или прате у пракси коришћење ИКТ у настави математике, због различите доступности рачунарске опреме у основним школама, дизајниран је 6 мин. дуг видео запис – стимулус. На тај начин обезбеђено је да се учесници усредсреде на технологију када одговарају на анкету и на исти начин схвате типове употребе који се помињу у упитнику. Стимулус садржи кратке наставне видео-клипове који илуструју осам различитих видова коришћења рачунара у наставној пракси математике. Наглашене су предности и недостаци сваког представљеног типа тако што се у сваком сегменту појављују оквири за текст на српском језику указујући на исте.

Уређени видео-клипови приказују: употребу сачињених презентација спремних за коришћење, прављење (израду) нових презентација, коришћење готових модела, прављење (израду) нових модела (на пр. коришћењем програма Геогebra), размену информација у неком вики окружењу, развој групних пројеката (нпр. рачунање трошкова екскурзије) у неком вики окружењу, тестирање знања коришћењем већ начињених тестова и прављење нових тестова знања.

Резултати

Искуство у употреби рачунара у настави математике код будућих учитеља и наставника математике

Просечне вредности варијабли, као и медијане, указују на то да највише искуства у руковању рачунаром и одговарајућим софтвером обе групе испитаника показују у вези са коришћењем готових и креирањем нових презентација и модела (видети Табелу 2). Будући наставници математике показују веће искуство у односу на учитеље, док и једни и други најмање искуства имају у развоју групних пројеката у неком вики окружењу и прављењу нових тестова знања.

Табела 2. Дескриптивна статистика за искуство у употреби рачунара и Mann Whitney u тест

Тип студената		N	Mean	Std. Dev.	Median	MannWhitneyu тест			
						U	z	p	r
EXP1	Будући учитељи	309	13,921	13,8067	10,00	18038,00	-3,477	0,001	-0,16
	Будући наст. математ.	146	34,065	87,6231	19,00				
	Укупно	455	20,385	51,6731	10,00				
EXP2	Будући учитељи	309	18,761	17,1092	15,00	16385,00	-4,747	0,000	-0,22
	Будући наст. математ.	146	31,822	32,5375	20,00				
	Укупно	455	22,952	23,9577	20,00				
EXP3	Будући учитељи	309	10,209	14,5332	5,00	20187,00	-1,836	0,066	-0,09
	Будући наст. математ.	146	15,904	22,4942	10,00				
	Укупно	455	12,036	17,6629	5,00				
EXP4	Будући учитељи	309	9,531	16,3714	5,00	18948,00	-2,827	0,005	-0,13
	Будући наст. математ.	146	21,091	84,1173	10,00				
	Укупно	455	13,240	49,7080	5,00				
EXP5	Будући учитељи	309	7,340	11,4960	1,00	21956,50	-0,489	0,625	-0,02
	Будући наст. математ.	146	10,605	20,3506	1,00				
	Укупно	455	8,388	14,9753	1,00				
EXP6	Будући учитељи	309	4,272	8,1997	0,00	20961,50	-1,459	0,145	-0,07
	Будући наст. математ.	146	4,664	12,4053	0,00				
	Укупно	455	4,398	9,7363	0,00				
EXP7	Будући учитељи	309	9,010	13,0648	5,00	20593,50	-1,545	0,122	-0,07
	Будући наст. математ.	146	9,154	17,7058	2,00				
	Укупно	455	9,056	14,6945	3,00				
EXP8	Будући учитељи	309	7,222	12,4080	2,00	19726,50	-2,294	0,022	-0,11
	Будући наст. математ.	146	6,394	14,7022	0,00				
	Укупно	455	6,956	13,1770	1,00				

Како се испитивањем варијабли EXP1,...,EXP8, у овом истраживању, показало да оне немају нормалну расподелу, за испитивање разлика у искуству код будућих учитеља и будућих наставника математике користили смо непараметарски Mann–Whitneyу тест. Сви резултати Mann Whitney u тестова приказани су у табели 2. Овај тест урађен је за сваки вид коришћења технологије и показало

се да не постоје статистички значајне разлике између учитеља и будућих наставника математике, осим у случајевима коришћења готових и креирања нових презентација као и креирања нових модела ($p < 0,01$) у корист будућих наставника математике. На нивоу значајности $p < 0,05$ показала се значајном разлика у искуству код креирања нових тестова у корист будућих учитеља.

Намера употребе рачунара у настави математике код будућих учитеља и наставника математике

Табела 3. Фреквенције и проценти ставова студената о намери коришћења разних видова технологије у настави математике

Питање	Испитаници		уопште се не	не слажем се	нити се слажем	нити се не	слажем се	слажем се у	Укупно
			слажем		слажем	слажем се	потпуности		
B11	Будући учитељи	f	9	18	70		106	106	309
		%	2.9%	5.8%	22.7%		34.3%	34.3%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	4	11	36		61	34	146
B12	Будући учитељи	%	2.7%	7.5%	24.7%		41.8%	23.3%	100.0%
		f	4	10	45		100	150	309
	%	1.3%	3.2%	14.6%		32.4%	48.5%	100.0%	
	Будући наст. математ.	f	2	8	20		54	62	146
	%	1.4%	5.5%	13.7%		37.0%	42.5%	100.0%	
B13	Будући учитељи	f	9	25	87		117	71	309
		%	2.9%	8.1%	28.2%		37.9%	23.0%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	3	13	38		68	24	146
	%	2.1%	8.9%	26.0%		46.6%	16.4%	100.0%	
B14	Будући учитељи	f	13	29	87		100	80	309
		%	4.2%	9.4%	28.2%		32.4%	25.9%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	3	13	39		55	36	146
	%	2.1%	8.9%	26.7%		37.7%	24.7%	100.0%	
B15	Будући учитељи	f	24	26	119		88	52	309
		%	7.8%	8.4%	38.5%		28.5%	16.8%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	9	23	50		40	24	146
	%	6.2%	15.8%	34.2%		27.4%	16.4%	100.0%	
B16	Будући учитељи	f	27	37	107		101	37	309
		%	8.7%	12.0%	34.6%		32.7%	12.0%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	10	22	60		39	15	146
	%	6.8%	15.1%	41.1%		26.7%	10.3%	100.0%	
B17	Будући учитељи	f	7	15	67		124	96	309
		%	2.3%	4.9%	21.7%		40.1%	31.1%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	5	15	35		54	37	146
	%	3.4%	10.3%	24.0%		37.0%	25.3%	100.0%	
B18	Будући учитељи	f	3	10	44		112	140	309
		%	1.0%	3.2%	14.2%		36.2%	45.3%	100.0%
	Будући наст. математ.	f	3	5	22		40	76	146
	%	2.1%	3.4%	15.1%		27.4%	52.1%	100.0%	

Фреквенције и проценти ставова студената о намери коришћења разних видова технологије у настави математике као и просечне вредности варијабли и медијане указују на то да обе групе испитаника највише намеравају да користе рачунар и одговарајућим софтвер за коришћење готових и креирање нових презентација и модела (видети Табеле 3 и 4). И једни и други, за сада, најмање намеравају да користе вики окружење како за развој групних пројеката тако и за размену информација. Ипак, ставови студената генерално су позитивни с обзиром да су средње вредности свих варијабли веће од средње вредности 3.

За испитивање разлика у намери употребе разних видова технологије у настави математике (BI1,...,BI8) код будућих учитеља и будућих наставника математике користили смо непараметарски Mann–Whitney тест. Тестови урађени за сваки вид коришћења технологије, показали су да не постоје статистички значајне разлике у намери употребе између учитеља и будућих наставника математике, осим у случају коришћења готових тестова у корист будућих учитеља и то на нивоу значајности $p < 0,05$.

Табела 4. Дескриптивна статистика за намеру коришћења рачунара у настави математике и Mann Whitney u тест

	Тип студената	N	Mean	Std. Dev.	Median	MannWhitneyu тест			
						U	z	p	r
BI1	Будући учитељи	309	3,91	1,030	4,00	20302,00	-1,807	0,071	-0,08
	Будући наст. математ.	146	3,75	0,987	4,00				
	Укупно	455	3,86	1,018	4,00				
BI2	Будући учитељи	309	4,24	0,908	4,00	21200,00	-1,119	0,263	-0,05
	Будући наст. математ.	146	4,14	0,944	4,00				
	Укупно	455	4,20	0,920	4,00				
BI3	Будући учитељи	309	3,70	1,005	4,00	22008,00	-0,441	0,659	-0,02
	Будући наст. математ.	146	3,66	0,927	4,00				
	Укупно	455	3,69	0,980	4,00				
BI4	Будући учитељи	309	3,66	1,089	4,00	21873,50	-0,544	0,587	-0,03
	Будући наст. математ.	146	3,74	0,997	4,00				
	Укупно	455	3,69	1,060	4,00				
BI5	Будући учитељи	309	3,38	1,100	3,00	21746,00	-0,646	0,518	-0,03
	Будући наст. математ.	146	3,32	1,114	3,00				
	Укупно	455	3,36	1,104	3,00				
BI6	Будући учитељи	309	3,27	1,098	3,00	21182,00	-1,097	0,273	-0,05
	Будући наст. математ.	146	3,18	1,037	3,00				
	Укупно	455	3,24	1,078	3,00				
BI7	Будући учитељи	309	3,93	0,961	4,00	19988,50	-2,064	0,039	-0,10
	Будући наст. математ.	146	3,71	1,065	4,00				
	Укупно	455	3,86	1,000	4,00				
BI8	Будући учитељи	309	4,22	0,876	4,00	21615,50	-0,779	0,436	-0,04
	Будући наст. математ.	146	4,24	0,971	5,00				
	Укупно	455	4,22	0,907	4,00				

r – величина утицаја

Утицај искуства на намеру коришћења разних видова технологије у настави математике.

Хи-квадрат тест независности проведен је више пута како би се утврдило постојање међузависности искуства и намере употребе рачунара и одговарајућег софтвера у настави математике. Тестови су показали да намера коришћења сваке од поменутих технологија зависи од искуства са том технологијом (видети Табелу 5). Односно, постоје статистички значајне везе између искуства и намере употребе, између група формираних на основу одговора на питања о искуству. Они испитаници који су показали нижи степен искуства у мањој мери намеравају да користе технологију у односу на оне са више искуства.

Табела 5. Хи-квадрат тестови за испитивање зависности у различитим случајевима искуства и намере употребе рачунара у настави математике

2x5 табела	Pearson Chi-Square χ^2	df	N	P (<0,05)	Phi	ЗНАЧАЈ ВЕЗЕ
EXP1_COD x BI1	12,171	4	455	0,016	0,164	Значајна
EXP1_COD x BI2	1,682	4	455	0,794	0,061	Није значајна
EXP2_COD x BI2	24,912	4	455	0,000	0,234	Значајна
EXP2_COD x BI1	22,774	4	455	0,000	0,224	Значајна
EXP3_COD x BI3	17,021	4	455	0,002	0,193	Значајна
EXP3_COD x BI4	24,546	4	455	0,000	0,232	Значајна
EXP4_COD x BI4	39,215	4	455	0,000	0,294	Значајна
EXP4_COD x BI3	5,505	4	455	0,239	0,110	Није значајна
EXP5_COD x BI5	38,119	4	455	0,000	0,289	Значајна
EXP5_COD x BI6	16,974	4	455	0,002	0,193	Значајна
EXP6_COD x BI6	31,210	4	455	0,000	0,262	Значајна
EXP6_COD x BI5	28,016	4	455	0,000	0,248	Значајна
EXP7_COD x BI7	19,989	4	455	0,001	0,210	Значајна
EXP7_COD x BI8	4,309	4	455	0,366	0,097	Није значајна
EXP8_COD x BI8	13,657	4	455	0,008	0,173	Значајна
EXP8_COD x BI7	4,537	4	455	0,338	0,100	Није значајна

Желели смо да испитамо не само да ли су у вези конкретна искуства са одређеним видом технологије и намера коришћења те технологије, већ и искуство у раду са одговарајућим софтвером и коришћење тог софтвера на исти или другачији начин. На пример, да ли искуство у креирању презентација има утицаја на намеру коришћења готових презентација, или искуство у коришћењу готових презентација утиче на намеру креирања нових. Резултати указују на то да не утиче свако коришћење одговарајућег софтвера на било какву намеру употребе тог софтвера.

Дискусија

Циљ ове студије била је идентификација видова коришћења рачунара у настави математике, утврђивање нивоа искуства и намере коришћења идентификованих видова код будућих учитеља и наставника математике. Такође, циљ је био и испитивање постојања значајних разлика у искуству и намери коришћења различитих видова технологије у настави математике, као и утврђивање утицаја искуства на намеру коришћења.

Идентификовани видови коришћења рачунара су пројекције презентација спремних за коришћење, производња (креирање) нових презентација, коришћење спремних за употребу модела за симулацију, развој нових модела у динамичким геометријским софтверима, коришћење вики или других Веб 2.0 алата за размену информација, комуникацију, сараднички тимски рад на развоју пројекта и решавање проблема, употреба онлајн-тестова и креирање нових тестова знања. Резултати истраживања показали су да највише искуства у руковању рачунаром и одговарајућим софтвером обе групе испитаника показују у вези са коришћењем готових и креирањем нових презентација и модела, али будући наставници математике показују веће искуство у односу на учитеље у Србији. Будући учитељи као и наставници математике најмање искуства имају у развоју групних пројеката у неком вики окружењу и прављењу нових тестова знања. Ови налази не изненађују с обзиром да групе испитаника имају слично академско искуство, а опет међусобно различито. Будући учитељи и наставници математике у овој студији били су старији студенти који су завршавали основне студије, завршили су већину курсева из информатике, педагогије и предметне области (математике). Међутим, будући да се програми за образовање учитеља доста разликују од програма за образовање наставника математике, то се одразило и на њихова различита искуства у коришћењу технологије.

Са друге стране, тај различит ниво академског образовања студената није довео и до значајних разлика у намери употребе рачунара у настави математике код будућих учитеља и код будућих наставника математике, јер су оне генерално позитивне за сваки вид употребе. Ипак, додатна тестирања, показала су да намера коришћења зависи од конкретног искуства са тим видом технологије. То значи да студенти схватају значај коришћења савремене технологије у својој будућој настави, и желе да је користе на различите начине, али у зависности од стеченог искуства њихове намере су више или мање изражене.

У овој студији искуство је имало директан позитиван утицај на намеру понашања за било који вид коришћења рачунара. Дакле, ако студенти, будући учитељи и наставници математике имају лоше искуство са употребом рачунара у настави математике њихова намера ће бити у складу са тим искуством. Ово је у складу са студијом Дрента и Мелисена (Drent & Meelissen, 2008) који

су пронашли да фактор рачунарско искуство има директан позитиван утицај на зависну варијаблу иновативну употребу ИКТ од стране наставника едукатора. Мулер и сар. (Mueller et al., 2008) такође су нашли да је искуство са компјутерском технологијом важан фактор који предвиђа разлике у коришћењу рачунара од стране учитеља.

Међутим, резултати хи-квадрат тестова показали су да не утиче свако искуство са коришћењем одговарајућег софтвера на било какву намеру употребе тог софтвера. За студенте је изузетно важно да стекну одговарајуће искуство у коришћењу одређене технологије и софтвера у настави математике.

Налази ове студије специфични су за будуће наставнике у Србији и едукаторе учитеља и наставника математике у сличним земљама у развоју. Ова студија би требало да помогне руководиоцима у образовним установама да обрате посебну пажњу на факторе који имају одлучујућу улогу у побољшању прихватања технологије будућег учитеља и наставника у настави математике.

Због тога је важно да руководства одговарајућих факултета уложе свестан напор у стварању повољног окружења за учење у коме студенти могу стећи успешна искустава у коришћењу технологије за наставу и учење. Стечена искуства у коришћењу рачунара у математичкој учионици још за време студирања, могла би бити драгоцену у формирању њихових ставова и намере коришћења. Барак (Barak, 2014) тврди да су институције за образовање наставника одговорне за постављање примера интеграције ИКТ на иновативни начин. STEM едукатори наставника треба да уложе значајне напоре да интегришу ИКТ које ће подржати учење усмерено на ученика, учење кроз рад, истраживачко учење и сарадничко учење; што би учинило процес и изазовним и забавним (Barak, 2014, p. 14). Припрема наставника да предају са технологијом требало би да буде усмерена на наставу са технологијом, уместо искључиво на наставне технологије (Russel et al., 2003). Кенгве и сарадници сматрају да би школе требало да настоје да створе јаке визије засноване на интеграцији технологије и да пружају релевантне програме стручног усавршавања који би подржавали наставнике да експериментишу са новим образовним технологијама (Keengwe et al., 2008, p. 563). Вогт (Voogt, 2010) је утврдио да „наставници природних наука који обимно користе ИКТ, много више од својих колега који мало користе ИКТ теже постизању наставних циљева и пружању знања оријентисаним ка доживотном учењу“.

Друштвени допринос резултата ове студије огледа се у идентификацији програма и активности за које се будући учитељи и наставници опредељују да користе у настави математике у основној школи, затим, у одговору на питање да ли постоји разлика у њиховом опредељењу тј. избору активности у нижим и вишим разредима и разлика у избору једноставнијих и сложенијих активности, као и на крају колико искуство утиче на њихово опредељење тј. на разлике у

њиховим одлукама. Добијени резултати дају смернице и препоруке за унапређење даљег образовања будућих учитеља и наставника у области математике.

Иако су предузете све мере предострожности у вези са методологијом, постоје ограничења. Прво, подаци су прикупљени путем самоизвештаја што има своје предности, али може довести до заједничке варијансе методе, и на тај начин вештачки повећати вредности правих односа између варијабли. Друго, избор студената, будућих учитеља и наставника математике, као узорка уместо запослених наставника, изгледало је као добро решење. С друге стране, њихов недостатак искуства у пракси и стресова који су укључени у интеграцију рачунара у стварном наставном процесу, може да доведе до лошег представљања праве слике. Наставници математике у основној школи од 5. до 8. разреда и наставници математике у средњој школи, као ни учитељи нису испитивани у овој студији.

Будућа истраживања могла би се усредсредити на поређење запослених наставника са будућим наставницима како би се разумеле разлике, ако их има, у њиховим ставовима према употреби рачунара и да ли на њих утичу сличне варијабле од интереса. На крају, корисно је испитати да ли постоје разлике између самоизвештаја и праксе и, ако постоје, идентификовати факторе који објашњавају ту празнину.

Закључак

Ова студија испитује постојање значајних разлика у искуству и намери коришћења различитих видова технологије у настави математике, код будућих учитеља и наставника математике у Србији. Такође, испитан је и утицај искуства на намеру будућих учитеља и наставника математике да користе рачунар у настави математике на различитим нивоима употребе.

Утврђено је да су обе групе испитаника показале највиши ниво искуства у коришћењу готових и креирању нових презентација и модела, где будући наставници математике показују веће искуство у односу на учитеље. Најмање искуства обе групе испитанике показале су у развоју групних пројеката у неком вики окружењу и прављењу нових тестова знања. Са друге стране, нису се показале значајне разлике у намери употребе рачунара у настави математике код будућих учитеља и код будућих наставника математике, и оне су позитивне за сваки вид употребе.

Изнети су емпиријски докази у овој студији да постоји значајна веза између самоперцепције стеченог искуства будућих учитеља и наставника математике и њихових планова у вези са различитим видовима коришћења рачунара у настави математике. Међутим, није било какво стечено искуство са одре-

ђеним видом технологије значајно за намеру коришћења, већ тачно одређено искуство баш са том технологијом која треба да се користи.

С обзиром на недостатак истраживања ове природе, ова студија може да послужи као полазна тачка у разумевању намере будућих учитеља и наставника математике да користе рачунар на различитим нивоима употребе у настави математике у Србији и друштвима која деле сличан ниво технолошког развоја.

Из теоријске перспективе, ова студија доприноси истраживањима о прихватању рачунара на различитим нивоима употребе за предметну наставу (нпр. математике) међу корисницима у незападним културама које немају исти ниво технолошког напретка као оне које се у великом обиму извештавају у литератури.

Резултати треба да буду примењени у пракси и да допринесу унапређењу наставе и процеса учења.

Литература

- Barak, M. (2014). Closing the Gap Between Attitudes and Perceptions About ICT-Enhanced Learning Among Pre-service STEM Teachers. *J Sci Educ Technol*, 23, 1–14.
- Dimitrijević, S., Popović, B., & Stanić, M. (2012). Computer use in mathematics teaching – overview of the situation in Serbia. *Croatian journal of education-hrvatski casopis za odgoj i obrazovanje*, 14, 387–415.
- Drent, M., & Meelissen, M. (2008). Which factors obstruct or stimulate teacher educators to use ICT innovatively? *Computers & Education*, 51(1), 187–199.
- Hermans, R., Tondeur, J., van Braak, J., & Valcke, M. (2008). The Impact of Primary School Teachers' Educational Beliefs on The Classroom Use of Computers. *Computers & Education*, 51(4), 1499–1509.
- Huang, H. M., & Liaw, S. S. (2005). Exploring user's attitudes and intentions toward the web as a survey tool. *Computers in Human Behavior*, 21(5), 729–743.
- ISTE (International Society for Technology in Education). 2007. *ISTE Standards for Students (Standards•S)*. Retrieved August 30, 2014 from the World Wide Web http://www.iste.org/docs/pdfs/20-14_ISTE_Standards-S_PDF.pdf
- ISTE (International Society for Technology in Education). 2008. *ISTE Standards for Teachers (Standards•T)*. Retrieved August 30, 2014 from the World Wide Web http://www.iste.org/docs/pdfs/20-14_ISTE_Standards-T_PDF.pdf
- Jonassen, D. H. (2000). *Computers as Mindtools for Schools (2nd edition)*. Upper Saddle River, NJ: Merrill
- Kadijevich, Dj., & Haapasalo, L. (2008). Factors that influence student teacher's interest to achieve educational technology standards. *Computers & Education*, 50, 262–270.
- Keengwe, J., Onchwari, G., & Wachira, P. (2008). Computer Technology Integration and Student Learning: Barriers and Promise. *J Sci Educ Technol*, 17, 560–565.
- Lampert, M., & Ball, D. L. (1998). *Teaching, multimedia, and mathematics: Investigations of real practice*. New York: Teachers College Press.
- Maddux, C. D., Johnson, D. L., & Willis, J. W. (1997). *Educational computing: Learning with tomorrow's technologies*. Boston: Allyn & Bacon.

- Milutinovic, V. (2009). Factors of ICT application in education: Mentors and student teachers. In M. Meri (Ed.), *Promoting Teacher Education – From Intake System To Teaching Practice: proceedings of the international conference*, (Vol.1, pp. 175–187). Jagodina: Faculty of Education in Jagodina.
- Mueller, J. W., Wood, E., Willoughby, T., Ross, C. & Specht, J. (2008). Identifying discriminating variables between teachers who fully integrate computers and teachers with limited integration. *Computers & Education*, 51, 1523–1537.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2007). *Mathematics teaching today: Improving practice, improving student learning* (2nd ed.). Reston, VA: Author.
- Pierce, R., & Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 299–317.
- Russel, M., Bebell, D., O'Dwyer, L., & O'Connor, K. (2003). Examining teacher technology use implications for preservice and inservice teacher preparation. *Journal of Teacher Education*, 54(4), 297–310.
- Sherin, M. G., & Han, S. Y. (2004). Teacher learning in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 20, 163–183.
- Star, J. , & Strickland, S. (2007). Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107–125.
- Teo, T. (2009a). Examining the relationship between student teachers' self- efficacy beliefs and their intended uses of technology for teaching: a structural equation modelling approach. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 8(4), 7–16.
- Teo, T. (2009b). Modelling technology acceptance in education: A study of pre-service teachers. *Computers & Education*, 52, 302–312.
- Tondeur, J., Van Braak, J., & Valcke, M. (2007). Towards a typology of computer use in primary education. *Journal of computer assisted learning*, 23, 197–206.
- UNESCO (2002). *Information and communication technologies in teacher education: A planning guide*. P. Resta (Ed.). Unesco.
- Venkatesh, V., Morris, M., Davis, G., & Davis, F. (2003). User acceptance of information technology: Toward a unified view. *MIS Quarterly*, 27 (3) , 425–478.
- Voogt, J. (2010). Teacher factors associated with innovative curriculum goals and pedagogical practices: differences between extensive and non-extensive ICT-using science teachers. *Journal of Computer Assisted Learning*, 26(6), 453–464.
- Yildirim, S. (2000). Effects of an educational computing course on pre-service and inservice teachers: a discussion and analysis of attitudes and use. *Journal of Research on Computing in Education*, 32(4), 479–495.

ANALYSIS OF THE EXPERIENCE AND THE INTENTION TO USE COMPUTER IN MATHEMATICS TEACHING OF PRE-SERVICE CLASSROOM AND MATHEMATICS TEACHERS

Summary. The purpose of this study is to explore the experience and intention to use different computer technologies in mathematics teaching among class teachers and mathematics pre-service teachers in Serbia. The types of computer use we addressed are those important for

attaining traditional and lifelong learning curriculum goals. These are programs for making the learning process more efficient, such as drill and practice, development of students' collaborative and organizational skills for working in teams or individualization of students' learning. Teaching practice in mathematics indicates that this could include activities like: projection of ready to use presentations, production of new presentations, using of ready to use models for simulation, development of new models, use of on-line tests, producing new test, use of wiki or other Web 2.0 tools for exchange of information, communication and collaborative team work for project development and problem solving. The paper aims to analyze the influence of the experience on the behavioural intention to use above mentioned computer technologies in mathematics teaching. Data were collected from 455 pre-service teachers through a self-report questionnaire and analyzed using the SPSS statistics software. Among the participants 67.9% (309) were pre-service class teachers while 32.1% (146) were pre-service mathematics teachers. Implications for mathematics teaching were discussed.

Keywords: mathematics instruction, pre-service mathematics teachers, pre-service classroom teachers, intention to use technology, technology experience

Љубица Диковић

Висока пословно-техничка школа струковних студија

Ужице

dikoviclj@gmail.com

ИНТЕРАКТИВНИ МЕТОД УЧЕЊА МАТРИЦА И ДЕТЕРМИНАНТИ

Айсџиракџи. Данас, када располажемо моћним софтверским алатима као што су Geogebra, Mathlab, Mathcad, Scientific Notebook, Mathematica итд. савремени наставни трендови намећу потребу за трошењем мање времена на манипулативни и рутински приступ, стављајући акценат на концептуално разумевање материје и њену примену у реалном свету. У раду се разматрају предности настале интеграцијом компјутерске технологије и интерактивног софтвера у ове теме линеарне алгебре. Додатно, аутор препоручује одговарајуће веб-ресурсе који могу додати нову димензију учења математике и учинити могућим имплементацију стимулативног, визуелног и интерактивног метода у настави матрица и детерминанти, које су познате као изузетно сувопаран део математике. Изазов наставницима је свакако инкорпорација нових технологија и трендова у смислу начина презентовања материје и демонстрирање њене примене, уз задржавање кључних предности традиционалног метода наставе. Одговарајућа комбинација компјутерских облика наставе после традиционалних облика наставе ће сигурно током времена постати не иновативни већ легитимни метод рада у настави математике.

Кључне речи: матрице, детерминанте, интерактивно учење

1. Увод. Технологија у настави математике

По мишљењу неких математичара, математика је најатрактивније поље за развој и примену нових технологија (Engler, Jeschke и др., 2006): најпре, технологија (у смислу свих тренутно расположивих информационо-комуникационих технологија) је кључ развоја у свим научним областима у времену у коме живимо, затим студије на техничко-технолошком пољу, пре свега у домену инжењерских или рачунарских наука, али и многих других области, зависе у доброј мери од квалитета стеченог општег, фундаменталног математичког знања.

Визуализација је одувек представљала важну компоненту у учењу математике на свим старосним нивоима, коју посебно можемо употребљавати да-

нас у ери експанзивног развоја рачунара, софтвера и њихових графичких могућности. Циљ визуелне математике је да покуша да преведе на језик слика или анимација различите, математичке концепте, структуре и њихова својства, укључујући и најапстрактније, и да нам на динамичан, креативан, визуелан начин омогући стицање математичког знања. Овакав концепт рада скоро увек подразумева и директну интерактивност корисника са математиком (индивидуализација наставе, 2013).

Уважавање когнитивних стилова и стилова учења обезбеђује индивидуализацију процеса учења, што и јесте тенденција савременог образовања. Једино такво учење ће имати успеха и решавати проблеме школског неуспеха, пре свега у настави математике. Када наставници уважавају когнитивне стилове и стилове учења својих ученика, ученици постижу боље резултате у учењу, мотивисани су у раду, у процесу учења користе своје јаче стране и развијају се у складу са својим потенцијалима (Husaric, 2011).

Циљ употребе технологије јесте да обезбеди окружење за активно истраживање математичких структура путем вишеструких репрезентација, или показати студентима неке аспекте математике који нису могући употребом оловке и папира. Многи наставници ће се сложити са тим да после ручно развијених техника израчунавања, употреба машинске аритметике може бити веома пожељна и корисна (Dikovic, 2007).

Истраживања указују на различите аспекте интеграције технологије, посебно CAS, на универзитетском нивоу у настави математике. На пример, отвара се посебан простор преко образовних технологија у пољу тзв. педагошке иновације. Такође, истиче се да упркос бројним погодностима о употреби технологије у математици, процес примене технологије у настави је спор и веома комплексан, као и да употреба информационо-комуникационих технологија у настави зависи од сваког наставника појединачно (Lavicza, 2008).

У документу NCTM (2000), такође стоји:

„Ефективна употреба технологије у математичким учионицама зависи од наставника. Као и свако друго наставно средство и ово може бити искоришћено потпуно, или слабо. Наставници би требало да користе технологију у одабиру или креирању математичких активности које се ефикасно могу извршити уз помоћ технологије – графика, визуализација и израчунавања, како би се повећале могућности студената.“

За потпуно разумевање математичких концепата, неопходно је да студенти стекну обострано искуство: као пасивни посматрачи наставничког рада, али и кроз сопствени, активни рад са вишеструким и међусобно повезаним репрезентацијама (вербалне, симболичке, нумеричке и графичке) тих концепата. Анализирајући ефекте технологије у достизању исхода у настави математи-

ке, доказано је да они студенти који користе технологију ефикасније достижу тражене исходе и циљеве (Blubaugh, 2004).

Штавише, у многим случајевима интеграција технологије у наставу математике, посматра се као начин да се ревитализује настава и да се помогне студентима у подизању њиховог нивоа разумевања математике (Lavicza, 2008).

При решавању проблема и креирању концепата, студенти имају велику предност, јер имају нумерички, графички и симболички приступ ситуацијама (Wurnig, 2008).

Већина истраживања из области примене технологије у настави, показује да студенти који користе технологију у своме учењу постижу боље излазне резултате у односу на студенте који у свом учењу не користе технологију (Waxman и др., 2002).

2. Примери и дискусија за интерактивно учење матричног рачуна

Почетком 2005. године, визуализација математичких садржаја је успешно имплементирана на предмету линеарне алгебре за студенте на пољу инжењерства, резултирајући значајна побољшања на завршним испитима, у односу на студенте који су испит спремали на „стари“ начин (Engler, Jeschke и др., 2006).

Доказано је да математичари који користе CAS (скр. Computer Algebra System) у настави, истичу важност CAS у настави математике, у односу на колеге које га не користе. Сходно томе, сугерише се да наставници који су по својој природи ентузијастички, радије користе CAS и размишљају позитивније о његовој употребљивости у настави (Lavicza, 2008).

Што се интерактивности тиче, основни позитивни ефекти коришћења интерактивног видеа у једном истраживању, били су: могућност коришћења нових информација и идеја као допуну постојећих извора информација, ученици су уживали користећи интерактивне медије чиме је ангажовано више чула у процесу стицања знања у односу на штампане материјале, коришћење интерактивног видеа омогућило је преглед садржаја у складу са индивидуалним интересовањима ученика, развијала се сопствена одговорност за самостално учење (Мандић, 2004).

Циљ предмета Математика 1 који се изучава на првој години студија на техничко-технолошком пољу је развој математичког мишљења и математичке логике, стварање основе за виши ниво дедукције при увођењу формалних дефиниција, визуализација наставе математике и стицање математичких знања потребних за примену у реалним ситуацијама. У том смислу, веома је важно да наставник кроз одабрани скуп примера из свакодневног живота и различитих

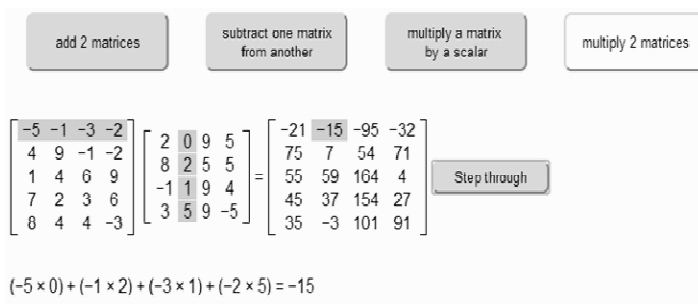
области рада прикаже могућности математичких апарата за решавање конкретних проблема.

Иако матрице и детерминанте по својој суштини спадају у апстрактне математичке концепте, посматрано из угла извођења наставе можемо се сложити да студенти релативно успешно савладају математички апарат матричне алгебре. Опасност таквог приступа лежи у томе што студент може доживети математику ради ње саме, а не ради њене примене у реалном животу и реалном окружењу.

Углавном је у традиционалном концепту ове наставне јединице циљ овладати практичним знањима везаним за појам и операције над матрицама (сабирање, одузимање, множење матрице бројем, множење матрица, степеновање матрица, рачунање инверзне матрице, као и примена алгебарских трансформација над матрицама), што је уобичајено довољно за успешну проверу знања студената у овој области. Оно што свакако треба нагласити је да ручне технике при димензијама матрице већим од 3 постају екстремно напорне и сложене, упоредо са повећавањем димензија матрица и детерминанти.

У наредном делу рада биће показано како за неке теме матричног рачуна наставници могу релативно лако интегрисати расположива технолошка решења у редовну наставу, чиме студентима пружају више могућности за сопствено истраживање и дубље разумевање материје.

Операције над матрицама на интерактиван начин (сабирање, одузимање, множење скаларом и множење матрица) приказане су на слици бр. 1.

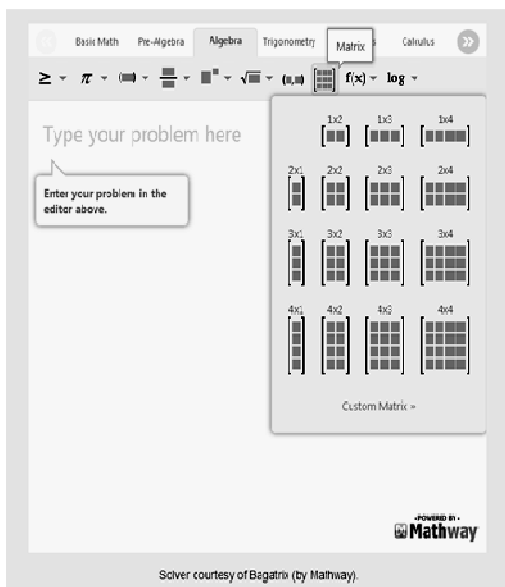


Слика 1. Операције над матрицама на интерактиван начин

Помоћу Јава аплета [1] биће генерисане различите матрице различитих димензија, али највише (5x5), при чему ће сваки пут елементи матрице бити генерисани на случајан начин. Аплет конципиран на овај начин, омогућава мноштво примера матричних операција. Нарочито би било корисно комбиновати ручну технику приликом множења две матрице или приликом израчунавања инверзне матрице, са употребом софтвера, како би се лако и брзо утврдила тачност добијених решења. На тај начин студент спроводи поступак самост

валуације свог знања коришћењем оваквих софтверских решења. У случају да решење није тачно, студент може проћи „корак по корак“ интерактивним избором те опције и добити цео поступак добијања исправног решења. Наравно да у оваквом процесу интерактивног рада студент учи: надомештава недовољно стечена знања или утврђује стечена знања. Посебно треба нагласити да овај интерактивни софтвер функционише и на мобилним телефонима.

Могуће је користити и разне типове on-line algebra Solvera [2], који такође поседују у себи интерактивну технику рада, презентујући добијено решење корак по корак. Почетни интерфејс овог софтвера приказан је на слици 2:



Слика 2. Приказ интерфејса софтвера (on-line algebra Solver)

У случају рада са детерминантама на располагању је одличан онлајн-туторијал намењен за интерактивно учење детерминанти другог и трећег реда [3]. Део интерфејса овог софтвера који веома јасно приказује поступак израчунавања минора једне детерминанте трећег реда, као и алгебарских кофактора, што је предуслов за Лапласов развој по елементима прве врсте преко кога је израчуната вредност ове детерминанте, приказан је на слици 3:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
$M_{1,1}$	$M_{1,2}$	$M_{1,3}$	$M_{1,4}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
$M_{1,1} = 0$	$M_{1,2} = 0$	$M_{1,3} = 3$	$M_{1,4} = 0$
$A_{1,1} = (-1)^{1+1}M_{1,1}$ $= (-1)^2(0)$ $= 0$	$A_{1,2} = (-1)^{1+2}M_{1,2}$ $= (-1)^3(0)$ $= 0$	$A_{1,3} = (-1)^{1+3}M_{1,3}$ $= (-1)^4(3)$ $= 3$	$A_{1,4} = (-1)^{1+4}M_{1,4}$ $= (-1)^5(0)$ $= 0$

So the determinant of this matrix is:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3} + a_{1,4}A_{1,4} \\ &= 1(0) + 3(0) + (-2)(3) + 1(0) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Слика 3. Лапласов развој детерминанти трећег реда на интерактиван начин

После увежбавања израчунавања детерминанти и стицања потребне рутине у раду, треба демонстрирати сет задатака који се односи на примену детерминанти.

- Крамерове формуле за израчунавање система од n линеарних једначина са n непознатих.
- Израчунавање површине троугла ABC код кога су познате координате

$$\text{тачка } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), \text{ тј. } P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

- Израчунавање површине паралелограма $ABCD$ код кога су познате координате тачака $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ тј.

$$P(ABC) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \text{ (једно од могућих решења).}$$

- Израчунавање једначине праве која пролази кроз тачке $A(x_1, y_1)$ и

$$B(x_2, y_2) \text{ добија се израчунавањем детерминанте } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Веб-адреса портала [3] може се искоритити и за увежбавање Крамеровог правила кога користимо у већини случајева за решавање система линеарних једначина $(n \times n)$. Такође, начин израчунавања једне инверзне матрице, користећи јединичну матрицу и приказане елементарне трансформације над матрицама, приказан је на слици 4:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[-R_1+R_2]{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-3R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{-3R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Слика 4. Презентација израчунавања инверзне матрице

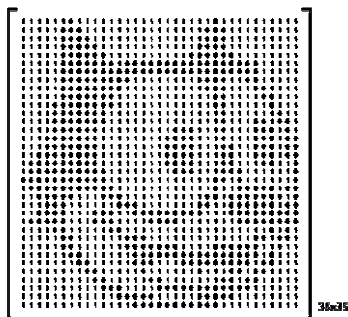
Пожељно би било студентима демонстрирати што већи број проблема из праксе и демонстрирати решења, како би схватили употребљивост математичког апарата који је саставни део матричног рачуна.

На пример, у домену вештачке интелигенције (роботика) производ следеће две матрице се користе као механизам покрета руке робота:

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.464 \\ 3.732 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Претходни пример множења две матрице заправо интерпретирамо на следећи начин: Рука робота се помера са позиције (2,4,0) на позицију (-2.464,3.732,0) у равни XY, док је Z=0. Прва матрица садржи тригонометријске вредности које указују степене померања руке робота.

Дигиталне слике које користе две боје се називају бинарне или Булове слике. Број 0 означава црну боју, а број 1 означава белу боју (pixel). На адреси [4] се налази интерактивни Јава аплет који дигиталну слику кодира у одговарајућу Булову матрицу и обрнуто. На пример, слика 5 биће представљена као матрица типа 35 × 35, чији елементи су бројеви 0 и 1, што је приказано на слици 5:



Слика 6. Приказ дигиталне слике кодиране преко Булове матрице

Дакле, нема дилеме да употреба одговарајућих софтверских решења постаје моћан алат који може да се удружује са класичном наставом математике. Додатно, студент стичу искуство у коришћењу веба као ресурса у настави

математике током студија. Тиме се додаје једна нова димензија интерактивности која свакако недостаје у традиционалном концепту наставе.

Учење математике је уско повезана са открићем, открићем апстрактних појмова, објеката и разних механизма математичког моделирања. Визуелизација, кроз горе поменуте интерактивне софтвере, има значајну улогу у том својеврсном процесу истраживања, где онај који учи може да усваја концепте и концептуалне објекте, чак и у случајевима да не поседује адекватну вербалну терминологију.

Многа искуства указују да је таква настава интересантнија и комфорнија за студента. Питање балансирања при употреби софтвера и стандардних наставних метода остаје као питање мере коју сваки наставник треба да одреди имајући на уму циљеве наставе, као и групу студената.

Закључак

Пре употребе технологије у настави математике, неопходно је ставити фокус на садржај и циљеве наставе, као и улогу студента у том процесу. Може ли технологија да унапреди наставу или ће бити баријера између студента и математичког садржаја? Да ли ће студенти бити активнији употребом технологије улазећи у суштину одређеног математичког концепта или ће бити само пасивни посматрачи неког приказаног садржаја преко видео-бима? Применом различитих видова технологије у настави математике се евидентно постиже циљ индивидуализације наставе, уз уважавање разлика између корисника, односно ствара се могућност напредовања према сопственим афинитетима и потребама. У овом раду је показано како софтверско окружење може лако и брзо оплемени и унапредити традиционални приступ методама матричног рачуна. Аутор рада сматра да не треба фаворизовати употребу технолошких ресурса у настави, али да их треба користити кад год доприносе бољем разумевању нарочито апстрактних математичких концепата, чиме се стварају могућности за атрактивнију и ефикаснију наставу. Такође, указујући на референце расположивог и лако доступног математичког софтвера, као вид новог медија у настави математике, аутор предлаже његово коришћење кроз примену визуализације и бројне интерактивне компоненте.

Литература

- [1] Lavicza Z., (2008): A comparative analysis of academic mathematicians' conceptions and professional use of computer algebra systems in university mathematics (Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy), Faculty of Education, University of Cambridge, UK Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web
file:///C:/Users/VPPTS/Desktop/Downloads/CAS-Dissertation-Zsolt-Lavicza-FN.pdf

- [2] NCTM, (2000): Principles and Standards for School Mathematics, Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <http://standards.nctm.org>
- [3] Habre, S. (2013): Enhancing Mathematics Understanding through Visualization: The Role of Dynamical Software, Chapter 9: Dikovic Lj.: Dynamical Software and the Derivative concept, (pp. 153–167). United States of America: IGI Global.
- [4] Lavicza Z., (2008): The examination of technology use in university-level mathematics teaching, Faculty of Education, University of Cambridge, UK, ICMI Symposium Rome 2008, Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG4/Papers/LAVICZA.pdf>
- [5] Blubaugh, W. (2004): Teaching and Learning Business Calculus Through Technology, Electronic Proceedings of the Seventeenth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics New Orleans, Louisiana, ISBN 0–321–43792–6, Paper S052, Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/i/17/S052.html>
- [6] Waxman H., Connell M., Gray J. (2002): A Quantitative Synthesis of Recent Research on the Effects of Teaching and Learning With Technology on Student Outcomes, NCREL, Retrieved April 30, 2014 www.coe.ufl.edu/Courses/eme5054/Foundations/Articles/waxman.pdf
- [7] Diković Lj. (2007): An Interactive Learning and Teaching of Linear Algebra by Web Technologies: Some Examples, Journal The Teaching of mathematics, X_2, p:109–116, Beograd
- [8] Husaric M. (2011): Важност уважавања когнитивних стилова и стилова учења код ученика у процесу поучавања, Metodički obzori 6, Retrieved April 30, 2014 from the World Wide Web, file:///C:/Users/VPTS/Desktop/Downloads/Microsoft_Word_12.pdf
- [9] T. S. Vinuesa, R. M. Fornos, (2007): A virtual mathematics learning environment for engineering students, Interactive Educational Multimedia, Number 14, pp. 1–18, Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web www.ub.edu/multimedia/iem
- [10] Engler, L., Jeschke, S.; Ndjeka, E., Seiler, R., Steinmüller, U., (2006): Members: The Impact of eLTR-Technologies on Mathematical Education of Non-Native Speakers, In E. Pearson & P. Bohman (Eds.), Proceedings of World Conference on Educational Media and Technology 2006 (pp. 178–184), Association for the Advancement of Computing in Education (AACE), Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <https://www.mumie.net/wp/assets/Members.pdf>
- [11] Ryve, A., Nilsson, P., Mason, J. (2011): Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education, Journal: Educational Studies in Mathematics, Volume 81, Number 1, Page 1, DOI: 10.1007/s10649–011–9371–9
- [12] Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web www.intmath.com/matrices-determinants/matrix-addition-multiplication-applet.php
- [13] Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <https://www.mathway.com/>
- [14] Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web <http://www.purplemath.com/modules/determs.htm>
- [15] Retrieved April 25, 2014 from the World Wide Web http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_en.html
- [16] Мандић, А., (2004): Значај мултимедијалних система за развој почетних математичких појмова, Учитељски факултет, Универзитет у Београду, Retrieved April 25, 2014 http://www.edu-soft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/Multimedija_i_pocetni_matematicki_pojmovi_.pdf

THE INTERACTIVE METHOD OF LEARNING MATRIX AND DETERMINANTS

Summary. Nowadays, when we dispose of powerful software tools such as Geogebra, Mathlab, Mathcad, Scientific Notebook, Mathematica, etc. modern educational trends impose the need for spending less time on the manipulative and routine approach, putting the accent on conceptual understanding of the matter and its applications in the real world. This paper discusses the benefits resulting from the integration of computer technology and interactive software in these topics of linear algebra. In addition, the author recommends the appropriate Web resources which can add a new dimension to the learning of mathematics and make possible the implementation of a stimulating, visual and interactive method of teaching matrices and determinants, which are known as an extremely dry part of mathematics. The challenge of teachers is definitely the incorporation of new technologies and trends in the way of presentation of matter and demonstrating of its application, while keeping the key benefits of traditional teaching methods. The right mix of computer activities after traditional activities is something which will certainly evolve over time as software develops. An appropriate combination of computer forms of teaching after traditional forms of teaching will surely over time become not innovative, but a legitimate method in teaching mathematics.

Key words: matrices, determinants, interactive learning.

Бранка Арсовић

Универзитет у Крагујевцу

Учитељски факултет у Ужицу

arsovic@ucfu.kg.ac.rs

АДАПТИВНИ СИСТЕМИ ЗА Е–УЧЕЊЕ – ИЗАЗОВИ И МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Айсїраќїї. Персонализовано образовно окружење, учење прилагођено ученику и његовим потребама, склоностима и способностима, јесте давнашња идеја како просветних радника, тако и научних дисциплина које изучавају учење и подучавање. Развој савремених технологија, првенствено информатичко – комуникационих технологија (ИКТ), је у знатној мери идеју адаптивног учења приближило реалности и учинило остварљивом. Сведоци смо развијања и постојања бројних софтверских алата, платформи и система за е-учење, који имају могућност прилагођавања према захтевима ученика. Захтеви према којима се врши прилагођавање и персонализација система за е-учење могу бити разнородни, почевши од: нивоа предзнања ученика, стила учења, персонализоване повратне информације система, персонализованог интерфејса система, итд. Довољан изазов за аутора једног таквог адаптивног система за е-учење јесте проналажење одговарајућег адаптивног модела, а додатни захтеви се јављају када је у питању систем за е-учење математике. Математика, као наставни предмет, има карактеристичне педагошко – методичке захтеве који морају бити испоштовани у једном адаптивном систему е-учења. Рад разматра могућности примене адаптивних система за е-учење математике, уз препознавање изазова који се јављају приликом креирања једног таквог система.

Кључне речи: адаптивни системи за е-учење, персонализована настава, настава математике.

Увод

У раду се разматрају општи изазови употребе савремених информатичко – комуникационих технологија (ИКТ) у образовању и покушава се одговорити на нека отворена питања, чији би одговори дали и утврдили начин на који се *e-Learning* технологија може прикладно користити у настави математике.

Иако изазови у настави математике кроз технологију произилазе из социјалних и инфраструктурних питања везаних за ИКТ у нашем окружењу, теш-

коће које се јављају су, такође, повезане и са разумевањем принципа структуре математике. Ове тешкоће нису непремостиве.

Е-учење, широко дефинисано, представља употребу информатичке технологије приликом образовања и достављања образовних садржаја, материјала, апликација, као и током праћења перформанси ученика и креирања извештаја о напретку током учења. Е-учење се дефинише као иновативни приступ за испоруку електронски посредованих, добро дизајнираних, интерактивних образовних окружења у којима је ученик у центру, било где, било када, помоћу интернета и дигиталних технологија (Hedge & Hayward, 2004). Међутим, треба напоменути да су наставни методи током размене информација на релацији наставник – ученик ограничени унутрашњом структуром саме дисциплине. Стога је студија семантике и структуре дисциплине увек у центру проблема трансфера, па чак и у е-учењу. Веровања о томе како математички и научни језик може да се користи за разумевање математичких структуралних принципа има директан утицај на имплементацију ефективног електронског учења у области исте. Ово је област који намеће огромне изазове, јер указује на проблеме који захтевају методолошку револуцију за коју данашње школство можда није у потпуности спремно. Проучавање језика и структуре дисциплине, и начина комуникације у таквој структури, није пустило корена у математичким истраживањима.

Изазови у образовној примени ИКТ

Иако постоји реална потреба да се е-учење уведе у регуларну, свакодневну наставу, све је још увек на ниском нивоу због слабе инфраструктуре ИКТ, несензибилисаног и технофобичног особља.

Велики јаз између искуства ИКТ стручњака, који развијају системе за е-учење и спорих, а понекад невољних, немотивисаних наставника и стручног особља, изазов је који треба премостити кроз одговарајуће обуке наставног кадра.

Неки од изазова е-учења у српским школама су следећи:

- инсистирање на традиционалном наставним методама, упркос националној политици и ставу према ИКТ, технолошком образовању (наставника) и дигиталној инклузији;
- мали број истраживања и, последично томе, неразумевanje структуре математике;
- иако је мобилна технологија широко прихваћена, она је повезана са релативно високим трошковима коришћења, али и оријентисаношћу корисника претежно на забавни садржај и апликације (онлајн-игрице, друштвене мреже и сл.);

- трошкови набавке рачунара, лаптопа, софтвера, интернет конекције и њихова техничка подршка и даље представљају релативно висок трошак;
- већина наставног особља и велики број студената су и даље везани само за наставу лицем-у-лице, без слуха за технолошки напредак.

Наведени изазови постоје за скоро све категорије могућих корисника који намеравају да употребљавају ИКТ у било којој образовној области. Имплементација е-учења у математици се суочава са двоструким изазовима. Осим наведених ту су и изазови који произилазе из саме природе дисциплине. Питања са којим се овај рад хвата у коштац, а на који би будући истраживачи требали да се фокусирају, односе се на следеће:

- тумачење и разумевање структуре математике;
- који је оптималан вид и начин комуницирања у математичком образовању?
- који принципи се могу користити за унапређивање самопоуздања ученика, преиспитивање и оптимистичан став у настави и учењу математике?
- како ИКТ да подржи разумевање и комуникацију својствену структури математике?

Индивидуализована настава – адаптивни системи за е-учење математике

Индивидуализована, персонализована настава је тема бројних расправа и истраживања скоро цео век. Персонализовано образовно окружење, учење прилагођено потребама, склоностима и способностима ученика је давнашња идеја како просветних радника, тако и научних дисциплина које изучавају учење и подучавање.

Онда не изненађује, притисак под којим се налази данашњи образовни систем, а све због немогућности да изађе у сусрет карактеристичним потребама ученика. Покушај прилагођавања традиционалног образовања перформанса ученика, би требало да буде инициран од стране наставника, јер је одговоран за напредак својих ученика. Оваква идеја директно произилази из технолошких иновација: е-учења и система за управљање учењем (LMS-Learning Management System). Помоћу поменутих достигнућа могуће је праћење и вођење ученика кроз образовне садржаје наставног програма, а на начин близак и прилагођен самом ученику.

Технолошка експанзија и развој савремених ИКТ приближили су концепт индивидуализоване наставе реалности. Постоје бројни софтверски алати,

платформе и системи за е-учење, са могућношћу прилагођавања захтевима ученика. Такви системи су у пракси познати као адаптивни системи за е-учење.

Бројни су захтеви према којима се врши прилагођавање и персонализација система за е-учење:

- ниво предзнања ученика;
- стил учења;
- персонализована повратна информација система;
- персонализован интерфејс система...

У пракси су ретке платформе које су прилагодљиве по више основа, најчешће је у питању адаптивност по стилу учења или нивоу претходног знања ученика.

Како су адаптивни системи за е-учење унапређени системи за управљање учењем, то наслеђују и све изазове који су постојали и код традиционалних система за е-учење. Имплементација у настави математике се суочава и са изазовима карактеристичним за дисциплину, поред већ поменутих општих проблема примене савремених ИКТ.

Карактеристични педагошко-методички захтеви саме дисциплине произилазе из специфичности математике, а то су:

- апстрактност;
- математичка грађа и садржаји су многоструко повезани и испреплитани;
- карактеристична терминологија и семантика;
- кумулативна наука.

Они морају бити испоштовани приликом креирања једног адаптивног система за учење математике. И управо начини њиховог испуњавања дефинишу начин формирања и саму структуру система за е-учење, али и његове персонализације.

Апстрактност математике, као научне дисциплине, испоштована је кроз креирање великог броја различитих, апстрактних примера и задатака, али и конкретних реалних проблемских ситуација, симулација и модела. У систему се мора користити правилна и прецизна терминологија (на нивоу разумљивом ученику) и математичка семантика. Повезивањем новоуведених појмова са већ познатим се подржава карактеристична структура математичких садржаја (испреплетаност и вишеструка повезаност садржаја). Креирањем логичких веза са претходним градивом и знањима подражава се кумулативна природа саме дисциплине. Управо због кумулативне природе математике, логично се намеће идеја прилагођавања *e-Learning* система према предзнању ученика.

Адаптивност на основу предзнања ученика

У даљем тексту је описан конкретан пример модела адаптивног система за е-учење математике, који је персонализован на основу предзнања ученика. Треба напоменути да је систем развијен на основу већ постојеће LMS платформе развијене у Moodle, а адаптивност се постиже кроз креиране додатке (моделе ученика, садржаја, адаптационог модула...).

Модел садржаја је дизајниран коришћењем стабла зависности са више-струким линковима (Hwang et al, 2010 a). Исти образовни садржај је презентован на три различита нивоа, растуће сложености. Овако адаптивна структура курса разликује различите категорије ученика: почетнике, просечне и надарене (Hwang et al, 2010 a). Први ниво (ниво 1) пружа само кратак увод и увид у тему предмета, које могу упознати ученици нивоа почетника, а без неког захтеваног предзнања. Други ниво (ниво 2) је мало напреднији од првог и пружа више детаља о обрађиваној теми, са пратећим објашњењима, примерима, вежбама, итд. које могу задовољити захтеве просечних ученика. Трећи ниво (ниво 3) обезбеђује напредније карактеристике и опширнија, дубља знања из обрађиване области, за напредније ученике.

Потребно је претходно одредити којој категорији припада ученик, а то се постиже анкетирањем ученика приликом првог пријављивања на курс у систему е-учења. Током пријављивања и регистрације на курс, ученик попуњава упитник (предтест). Модел ученика прати ученикове перформансе. На основу способности и знања испољених у овом предтесту, студенти се категоризују као почетници, просечни или напредни. Оваква категоризација се обавља у зависности од постигнутог *confidence* фактора, који може варирати од 0 до 1. Стабло зависности, уз помоћ модела ученика, асистира ученику током одговарајућих навигационих линкова, сугеришући пригодан, одговарајући ниво.

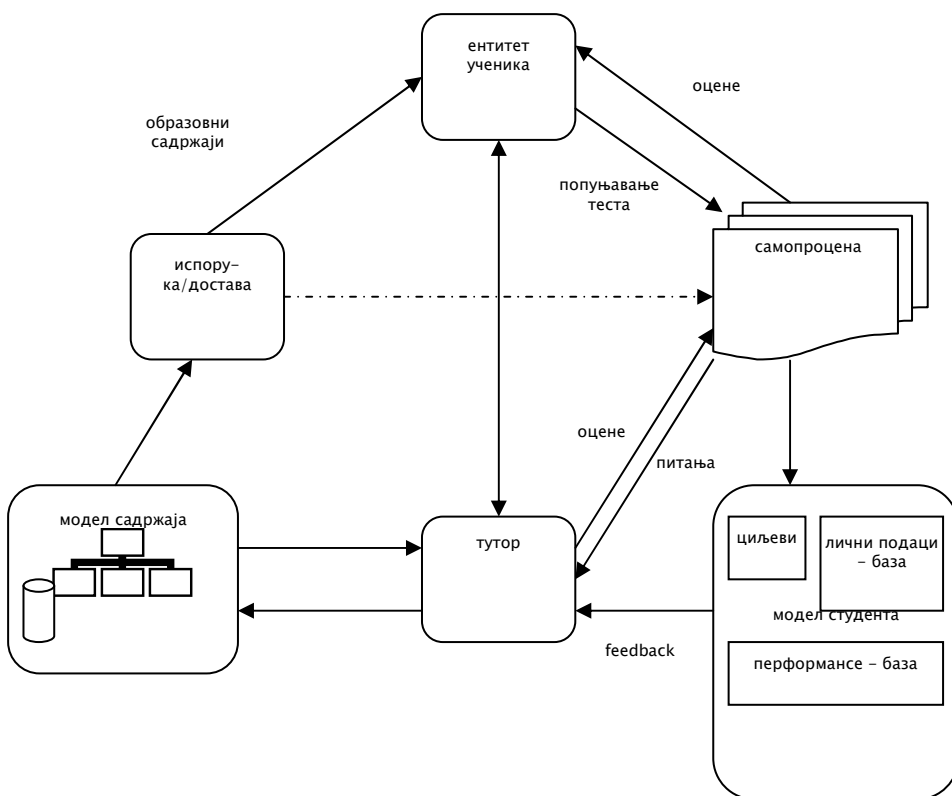
Табела 1 илуструје класификацију ученика засновану на њиховом *confidence* фактору, добијеном у предтесту, током регистрације на сам курс.

Табела 1. Класификација студената заснована на њиховом *confidence* фактору

Категорија ученика	<i>Confidence</i> фактор
Почетник	0,00–0,40
Просечан	0,41–0,70
Напредан	0,71–1,00

Ученици почетници (са фактором 0 до 0,4) се упознају са садржајем курса првог нивоа. Просечни ученици (фактора 0,41–0,7) се прослеђују на садржај нивоа 2; док напредни ученици (фактора 0,71–1,0) бивају упућени на садржајни ниво 3, путем кога продубљују знања из обрађиване области.

Архитектура предложеног адаптивног система је дата на слици 1.



Слика 1. Архитектура система за е-учење, адаптивног према предзнању ученика(Hwang et al, 2010 b)

Ентитет ученика: може представљати једног или групу ученика са различитим нивоима предзнања. Ученици добијају одређен образовни садржај курса, у зависности од свог нивоа знања.

Процес самопроцене: систем прати промене ученикових перформанси током времена проведеног на курсу. Питања су организована од стране скупа експерата или татора на датом предмету. То су обично питања вишеструког избора или питања са одговором (дужине једне речи – да/не). Перформансе ученика се складиште у базу података која се прослеђује како ученику, тако и наставнику, па на тај начин ученици могу да обратe посебну пажњу на оне области у којима им знања нису на адекватном, жељеном нивоу. Са друге стране, наставник има прилику да подеси курсеве према тренутној групи ученика.

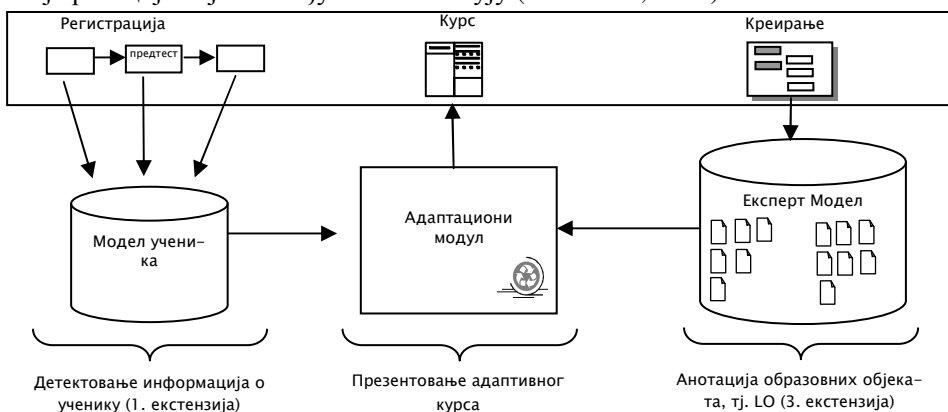
Модел ученика: је експлицитна репрезентација знања ученика. Модел ученика садржи три компоненте: образовне циљеве ученика, базу перформанси ученика и базу личних података ученика. Образовни циљеви ученика су обично успешно завршавање курса, као и правилно разумевање сваког образовног материјала и стицање знања. База перформанси садржи *confidence* фактор ученика, који је он освојио у предтесту, заједно са њиховом категоризацијом.

Такође садржи и податак о томе какав успех ученика остварује у сваком од делова (поглавља/јединица) курса. База личних података садржи све детаље о ученику (са именом, идентитетом, регистрационим бројем, датумом регистрације на курс, итд.).

Туџор: предметни садржај (образовни садржаја) је дизајниран од стране тима експерата. Тим експерата дизајнира и креира садржај курса на различитим нивоима, тако да нивои буду одговарајући различитим студентима, који су на различитим нивоима знања. При том поштују све поменуте дидактичко-методичке захтеве математике.

Модел садржаја: основни интерес овако предложене структуре складишта предметног домена за *e-Learning* је дефинисање одговарајуће структуре, такве да ученици могу једноставно и логично пронаћи најбитније информације, опет у зависности од сопственог нивоа знања.

Образовни материјал је организован као скуп поглавља. Свако поглавље је класификовано у сопствени скуп потпоглавља, а опет свако потпоглавље је даље подељено у скуп потпотглавља. Међу поглављима и потпоглављима постоје релације које их међусобно повезују (Blochletal, 2005).



Слика2. Примена предложеног модела на постојећиLMS (Арсовић & Стефановић, 2010)

Закључак

ИКТ доносе бројне промене и иновације свакодневно. Традиционално окружење е-учења обезбеђује и прослеђује исти образовни садржај сваком ученику. Управо због такве структуре, традиционално *e-Learning* окружење је посебно критиковано у погледу индивидуалног учења. Критике и иновативни приступи доводе до постепене замене постојећих окружења за е-учење са персонализованим, интелигентним окружењима за електронско учења. Захваљујући овим новим приступима, е-учење узима у обзир индивидуалне разлике ученика, као што је стил учење, предзнање, персонализовани интерфејс и дру-

го. У раду је представљена могућа структура једног адаптивног система за учење математике, персонализованог према нивоу предзнања ученика. Корак даље, у развијању и унапређивању сличних система би било креирање интелигентних адаптивних система за е-учење, који имају унапређене карактеристике: бележе напредак ученика током курса, препознају промену категорије нивоа знања и аутоматски реагују променом презентованог модула курса. Простора за даље усавршавање има више него довољно, све док се не постигне такав систем за е-учење математике који ће бити најприближније прилагођен већини потреба, склоности и перформанси ученика.

Литература

- Арсовић, Б., & Стефановић, Д. (2010). Значај колаборативних наставних материјала у е-Лearнинг системима. *Инфо М*, 8(33), 19–25.
- Blochl, M. Rumetshofer, H. and Wob, W. (2003). Individualized E-Learning Systems Enabled by a Semantically Determined Adaptation of Learning Fragments. *Proceedings of 14th International Workshop on Database and Expert Systems Applications (DEXA '03)*. IEEE Computer Society.
- Hwang, G. J., Chu, H. C., Shih, J. L., Huang, S. H. , & Tsai, C. C. (2010). A decision-tree-oriented guidance mechanism for conducting nature science observation activities in a context-aware ubiquitous learning environment. *Educational Technology & Society*, 13(2), 53–64.
- Hwang, G. J., Kuo, F. R., Yin, P. Y., & Chuang, K. H. (2010). A heuristic algorithm for planning personalized learning paths for context-aware ubiquitous learning. *Computers & Education*, 54(2), 404–415.

ADAPTIVE SYSTEMS FOR E-LEARNING – CHALLENGES AND OPPORTUNITIES OF APPLICATION FOR TEACHING MATHEMATICS

Summary. Personalized learning environment, learning tailored to the student and his or her needs, preferences and capabilities is long-run ideas to teachers, and the scientific disciplines that study the teaching and learning. The development of new technologies, especially information - communication technologies (ICT), is substantially the idea of adaptive learning closer to reality and made it feasible. We are witnessing the development and existence of numerous software tools, platforms and systems for e-learning, which have the ability to adapt to the demands of students. Requirements according to which performs adaptation and personalization system for e-learning can be diverse, ranging from: the level of knowledge of students, learning styles, personalized system feedback, personalized system interface, and so on. Sufficient challenge for the author of such adaptive systems for e-Learning is to find an appropriate adaptive model, and additional requirements arise when it comes to the system for e-Learning of mathematics. Mathematics as a subject has characteristic pedagogical - didactic requirements that must be met in an adaptive e-Learning system. This paper discusses the possibilities of adaptive systems for e-Learning of mathematics, recognizing the challenges that arise when designing such a learning management system.

Key words: adaptive systems for e-Learning, personalized learning, mathematics instruction.

Slaviša Radović

Miroslav Marić

Ljiljana Golubović

Математички факултет, Универзитет у Београду

radovic.slavisa@gmail.com

MOGUĆNOSTI UPOTREBE IKT-A I PLATFORME *EZBIRKA* U NASTAVNIM AKTIVNOSTIMA¹

Apstrakt. Ubrzan razvoj informaciono-komunikacionih tehnologija (IKT) i razvoj savremenih obrazovnih programa postavlja brojne zahteve pred vaspitno-obrazovni proces, pre svega u načinu osposobljavanja učenika za kreativnu primenu stečenih znanja. Rezultati istraživanja stavova nastavnika o savremenom pristupu nastavi ukazuju na to da su nastavnici spremni za aktivno uključivanje IKT-a u obrazovni proces. Pored prikaza analize rezultata sprovedenog istraživanja, u radu će biti predstavljena javno dostupna obrazovna platforma eZbirka, kao i mogućnost uticaja te platforme na prilagođavanje nastave potrebama svakog učenika.

Ključne reči. Platforma eZbirka, digitalni nastavni materijali, primena IKT-a u nastavi, unapređenje obrazovnog procesa.

Uvod

Ubrzani razvoj IKT uslovio je intenzivan razvoj nauke, tehnike i kulture celokupnog društva. Primena obrazovnih softvera u nastavi, namenjenih širenju i evaluaciji znanja je jedan od ciljeva razvoja obrazovanja (Deng, Tavares, 2013; Islam, 2012). Upotrebom različitih programskih jezika i napretkom tehnologije stvaraju se inovativni obrazovni softveri sa tendencijom da postanu primarni nastavni alati (NCTM, 2000). Obrazovni softveri koji se mogu koristiti u učionicama, kao i van njih, omogućavaju nastavnicima da prate napredak učenika, a učenicima pružaju mogućnost da imaju uvid u svoje znanje i da utiču na proces učenja u cilju formiranja radnih navika (Middleton, Spanias, 1999; Morgan, O'Reilly, 2001). Osnova takve savremene škole jeste aktivnost, jer se akcenat stavlja na učenika kao aktivnog

¹ Rad je deo projekta „Platforma eZbirka kao podrška efikasnosti nastave“, Ministarstva trgovine, turizma i telekomunikacija Republike Srbije i Društva matematičara Srbije i projekta 174010, Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

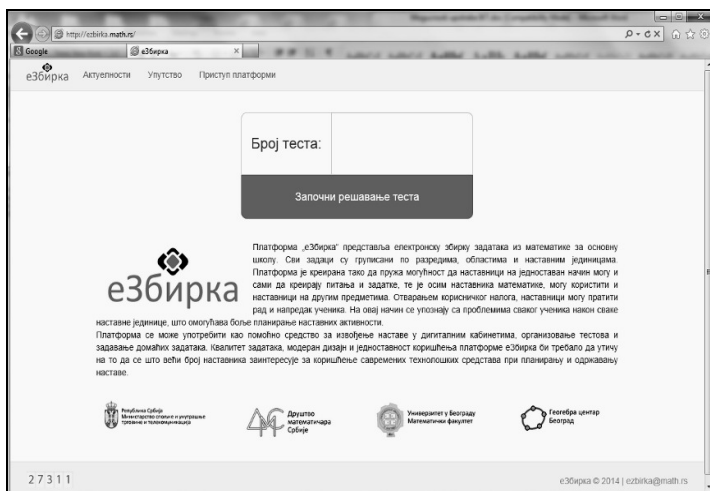
subjekta u nastavi, a učenje se može definisati kao interakcija učenika sa okruženjem, bez obzira na mesto i vreme učenja (Radojičić i sar., 2014). Uloga nastavnika u nastavnom procesu je nezamenjiva, ali u tako organizovanoj nastavi, nastavnik usmerava, odnosno organizuje i koordinira procesom učenja koristeći nove tehnologije (Galbraith, Haines, 1998).

Deljenje nastavnih materijala putem Interneta, pružanje mogućnosti za komunikaciju između učenika i nastavnika van učionice i praćenje napretka učenika su neke od ključnih prednosti obrazovnih platformi. One postaju skoro nezamenljivo sredstvo u nastavi (Alvarez et al., 2013). Uticaj koji nove tehnologije mogu da imaju na nastavu i učenje je potencijalno veliki, ali on dolazi do izražaja i zavisi isključivo od toga koliko su nastavnici i učenici spremni da se uključe u proces primene tehnologija (Chen et al., 2011). Bez obzira da li je fokus obrazovanje na daljinu ili u učionici, edukativne platforme mogu da se koriste kao podrška nastavnom procesu. Ishodi takvog obrazovanja su pre svega povećanje kvaliteta nastave i postavljanje učenika u centar nastavnog procesa (Islam, 2012). IKT dopunjuju već postojeći obrazovni sistem, unapređuju i osavremenjavaju ga, a nastavnici se osposobljavaju za nove uloge i zadatke koji se pred njih stavljaju. Brojni su faktori koji mogu uticati na prihvatanje jednog obrazovnog softvera u nastavnim aktivnostima. Ti faktori zavise od percepcija korisnika i odnose se na lakoću upotrebe (Sumak et al., 2011), svrsishodnost (Larsen et al., 2009) i kvalitet informacija i celog sistema (Roca et al., 2006).

Razvoj primene IKT-a u nastavi

U mnogim državama se ulažu velika sredstva kako bi učenici i nastavnici bili u korak sa razvojem IKT-a. U nekim državama, kao npr. u Bugarskoj je do 2007. reformisan kurikulum tako da uključuje korišćenje IKT-a u svim predmetima. U Hrvatskoj i drugim državama su pokrenuti i implementirani mnogi značajni projekti kao pokretači promena u obrazovanju. U Srbiji je od strane Ministarstva spoljne i unutrašnje trgovine i telekomunikacija implementiran veliki broj projekata (jedan od njih „Digitalna škola“) putem kojih je mnogo osnovnih škola dobilo opremljene računarske kabinete ili neophodnu informatičku infrastrukturu. U Srbiji, Zakon o osnovama sistema obrazovanja i vaspitanja (ZOSOV) navodi kao jedan od ciljeva obrazovanja i vaspitanja, sticanje informatičke i digitalne pismenosti.

U radu će biti predstavljena javno dostupna obrazovna platforma eZbirka, koja je nastala kao deo projekta „Platforma eZbirka kao podrška efikasnosti nastave“, Ministarstva spoljne i unutrašnje trgovine i telekomunikacija Republike Srbije i Društva matematičara Srbije. To je elektronska zbirka zadataka iz matematike za više razrede osnovne škole (Slika 1). Zbog kvaliteta zadataka, modernog dizajna i jednostavnosti korišćenja predstavlja savremen alat za planiranje i održavanje nastave.



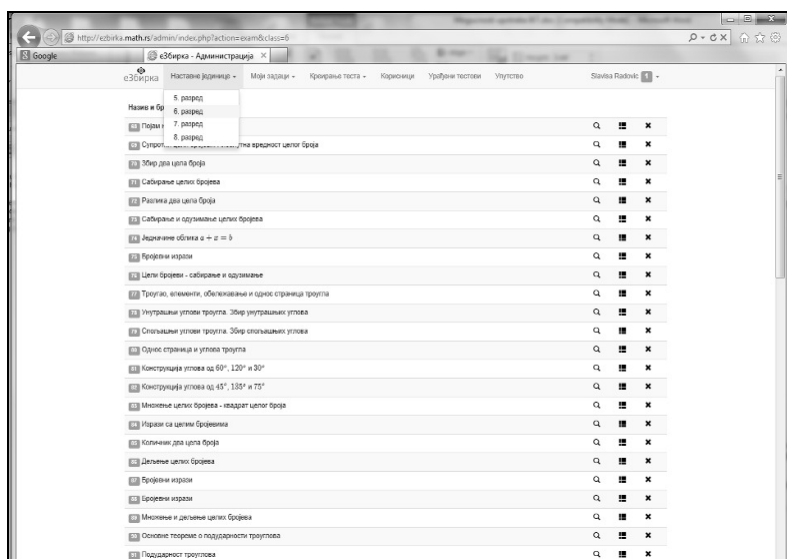
Slika 1. Izgled početne strane platforme eZbirka (www.ezbirka.math.rs)

U daljem toku rada biće predstavljeni rezultati sprovedenog istraživanje stava i spremnosti nastavnika za savremeni pristup nastavi koji iziskuje aktivno uključivanje IKT-a u nastavni proces. Istraživanje je obuhvatilo različite aspekte primene IKT-a u nastavi – sagledane su potrebe, prepreke i prednosti sa kojima se susreću učesnici obrazovnog procesa.

Edukativna platforma eZbirka

Edukativna platforma eZbirka je javno dostupna i besplatna za upotrebu. U cilju promovisanja novog nastavnog alata i obuke nastavnika za korišćenje, održane su brojne radionice i edukativni skupovi (Marić i sar., 2014). Dizajn platforme je takav da odgovara potrebama učenika i nastavnika i da unapređuje tok nastavnih aktivnosti. Omogućene funkcionalnosti pospešuju motivaciju i zainteresovanost učenika za samostalni rad, doprinose boljem dostizanju ciljeva časa i podižu kvalitet nastave.

Nakon otvaranja korisničkog naloga, nastavnik ima uvid u sve nastavne materijale (Marić, 2014). Svi zadaci koji se nalaze na platformi su grupisani po razredima i nastavnim jedinicama kako bi se olakšala njihova pretraga i korišćenje. Odabirom razreda, iz trake sa alatima, nastavniku su na raspolaganju sve nastavne jedinice čiji zadaci pripadaju izabranom razredu (Slika 2). Svaka nastavna jedinica se sastoji od 6 zadataka, a svaki zadatak se bira iz grupe sličnih zadataka. Zadaci iste grupe se razlikuju po početnim podacima ili formulaciji problema.



Slika 202. Spisak nastavnih jedinica u petom razredu

Nastavnik zadaje test učenicima tako što im saopštava redni broj testa koji je odabrao. Učenici treba da posete sajt platforme <http://ezbirka.math.rs> i da na početnoj strani unesu zadani broj. Sve testove i nastavne jedinice koje učenici reše, nastavnik ima mogućnost da pregleda koristeći opciju „Urađeni testovi“. Spisak urađenih testova se prikazuje u obliku tabele, kako bi se nastavniku olakšalo pregledanje rada učenika.

Osim korišćenja gotovih materijala, nastavnici imaju mogućnost da kreiraju sopstvene testove, kako bi se u testu našli zadaci iz više nastavnih jedinica. Biranjem opcije „Kreiranje testa“ nastavnici biraju razred i oblast iz koje žele da zadaju test, a zatim biraju i zadatke. Nastavnici imaju mogućnost da dodaju i svoje zadatke koje će koristiti za testove.

Ovakav način korišćenja platforme doprinosi razvoju nastavnog procesa (Radović i sar., 2014). Neizostavno povećanje motivacije kod učenika dovodi do lakšeg rešavanja zadataka i potpomaže razumevanje problema na koje učenici nailaze. Kroz analizu napretka učenika i pažljivo rešavanje učenih problema unapređuje se planiranje nastavnog procesa.

Metodologija istraživanja

Istraživanje koje je predstavljeno u ovom radu usmereno je na ispitivanje efekata koje u nastavi matematike, a i ostalih predmeta, ima integracija IKT-a u obrazovni proces i upotreba platforme eZbirka u nastavi.

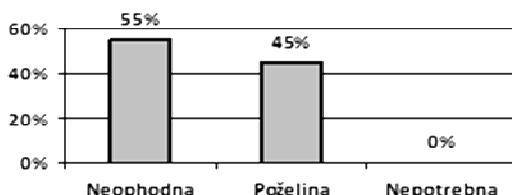
U istraživanju je učestvovalo 80 nastavnika matematike iz osnovnih i srednjih škola koji su bili upoznati sa platformom eZbirka. Podaci su prikupljeni putem on-

line ankete, papir-olovka ankete i intervjuja. Od posebnog značaja su bile posete mnogim osnovnim i srednjim školama u Srbiji jer su na taj način uočene bitne razlike u uslovima za primenu IKT-a, prepreke i potrebe sa kojima se suočavaju akteri obrazovnog procesa. Anketa se odnosi na stavove nastavnika o tehničkoj i profesionalnoj podršci za razvoj uloge IKT-a u nastavi, na dostupnost i postojanje elektronskih nastavnih materijala, razvoj kompetencija za upotrebu IKT-a i za unapređenje nastavnog procesa.

Analiza rezultata istraživanja

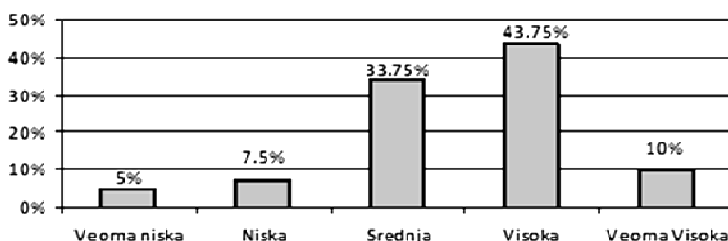
Uglavnom svi ispitanici IKT doživljavaju kao simbol socijalizacije i povezivanja koje je neophodno i poželjno uključiti u nastavu. Zanimljivo je mali broj onih koji se sa tim ne slažu i na IKT gledaju kao na simbol otuđenosti (4 nastavnika, odnosno 5% ispitanika). Nastavnici se slažu oko pitanja vezanog za upotrebu tehnologije u obrazovanju – svih 80 (100%) ispitanika smatraju da je upotreba IKT-a u nastavnom procesu neophodna ili poželjna (Grafikon 1).

Grafikon 1. Prikaz odgovora nastavnika na pitanje da li je upotreba IKT-a u savremenoj nastavi neophodna, poželjna ili nepotrebna.



Jedan od glavnih činilaca svrsishodne upotrebe računara u nastavi su kompetencije nastavnika, koje određuju nivo, obim i smer nastavnih aktivnosti. Ispitanici ovog istraživanja svoju kompetentnost za aktivnu upotrebu IKT-a uglavnom procenjuju visoko i srednje (Grafikon 2). Nastavnici su svoju kompetentnost stekli većinom samostalnim angažovanjem, njih 51,25%, tokom školovanja svega 17,5%, na seminarima stručnog usavršavanja njih 20%, a njih 11,25% od drugih ljudi koji poseduju IKT znanja i veštine.

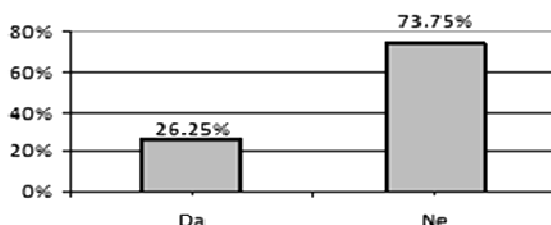
Grafikon 2. Prikaz odgovora nastavnika na pitanje da procene svoju kompetenciju za aktivnu upotrebu IKT-a.



Iako nastavnici svoje sposobnosti održavanja nastave uz pomoć računara ocenjuju visoko, potrebu za daljom obukom u korišćenju IKT-a u nastavi je istaklo 60% ispitanika. Ispitanici prepoznaju značaj posedovanja znanja i veština za adekvatno korišćenje IKT-a, ali takođe ističu da ne postoji dovoljno akreditovanih seminara za stručno usavršavanje i sticanje kompetencija za upotrebu IKT-a.

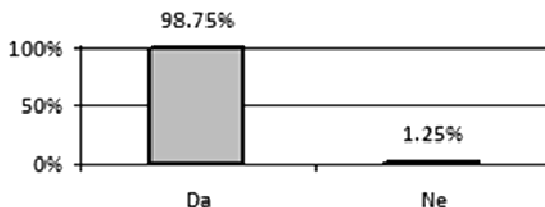
Velika je razlika u stepenu opremljenosti škola. Infrastruktura koju škole poseduju, broj računara kao i njihovo stanje se razlikuju i veoma često zavise od stepena razvoja opštine u okviru koje škola radi. Većina ispitanika (73,75%) je navela da veliku poteškoću u primeni IKT-a predstavlja nepostojanje dovoljno interaktivnih materijala (Grafikon 3). Nastavnici uglavnom sami izrađuju elektronske materijale ili oblikuju već postojeće, razmenjuju ih sa kolegama, koriste materijale koji su dostupni na Internetu, društvenim mrežama i obrazovnim portalima.

Grafikon 3. Prikaz odgovora nastavnika na pitanje da li ima dovoljno interaktivnih materijala za nastavni predmet koji predaju



Veliki broj ispitanika, čak 72,5%, bio je upoznat i dosta njih aktivno koristi mogućnosti edukativne platforme eZbirka. Ispitanici ističu da im je eZbirka od velike pomoći u otkrivanju problema na koje učenici nailaze tokom rešavanja zadataka. Sa tim se složilo 97,5% ispitanika. Ovu i mnoge druge mogućnosti platforme eZbirka, nastavnici su smatrali velikim prednostima u odnosu na ostale interaktivne materijale. Ispitanici smatraju da upotreba platforme eZbirka podstiče aktivnost učenika, saradnički odnos između učenika i nastavnika i pozitivno utiče na motivaciju učenika, njih 98,75% (Grafikon 4). Uglavnom svi, čak 96,25% ispitanika, naglašavaju da bi korišćenje eZbirke itekako pozitivno uticalo na interesovanje učenika za samostalni rad.

Grafikon 4. Prikaz odgovora nastavnika na pitanje da li smatraju da bi korišćenje platforme eZbirka u nastavnom procesu pozitivno uticalo na motivaciju učenika



Zaključak

Kao zaključak istraživanja može se istaći da nastavnici smatraju da korišćenje platforme eZbirka u nastavnim aktivnostima ima pozitivan uticaj na motivaciju učenika u procesu učenja. Nastavnici smatraju da, osim unapređenja samog procesa nastave, korišćenje interaktivnih materijala sa platforme eZbirka utiče na povećanje znanja učenika. Ovi rezultati su indikatori dobre nastavne prakse i mogu se objasniti time da je struktura upotrebe platforme eZbirka u nastavnom procesu takva da podržava i unapređuje proces učenja. Pasej (Passey, 2000) kao zaključke svog istraživanja navodi da je za prihvatanje određenog IKT sredstva, neophodno da ono bude prilagođeno potrebama učenika i uočenim problemima u nastavi.

Korišćenjem platforme eZbirka u nastavi, povećava se informisanost nastavnika o znanju učenika. Povratna informacija koju su učenici imali nakon svakog testa pružala im je mogućnost da greške i propuste u znanju otkriju u najranijoj fazi učenja. Takođe nastavnici su uspeli da povežu i učvrste proces učenja kod kuće i učenje u školi. Mnoga istraživanja ističu da IKT može da obezbedi učenje, sticanja znanja i veština van zidova učionica – omogućavajući učenje u svakom trenutku i na svakom mestu (Becta, 2001; Chan et al., 2006).

Što se tiče motiva za upotrebu IKT-a u nastavi, ispitanici su ocenili da je najbitnije podizanje kvaliteta nastave, veća angažovanost učenika i bolje dostizanje ciljeva časa. Nastavnici ističu da su učenici koristili materijale i radili zadatke sa dosta entuzijazma, i to navode kao jedan od ključnih uspeha platforme. Platforma eZbirka se ističe kao jako korisno sredstvo kada je reč o primeni IKT u obrazovnom procesu jer omogućava sticanje znanja, praćenje napretka učenika i pospešuje saradnju između učenika.

Sasvim je sigurno da svaka promena u obrazovnom procesu mora biti pažljivo izvedena i sa ciljem unapređenja nastavnog procesa kako na nivou pojedinca, tako i na globalnom nivou. Cilj primene IKT u obrazovanju ne treba da se bazira na osobinama tehnologija već na promeni koje one mogu da donesu. Nalazi ove studije pokazuju prednosti obrazovne platforme eZbirka i ističu da je njena upotreba u nastavi veoma poželjna kako bi se osigurao nastavni proces. Ovi važni zaključci traže odgovarajuću podršku kako bi se obezbedio dalji razvoj nastavnih metoda i oblika koje uključuju IKT.

Literatura

- Alvarez A., Martin M., Fernandez-Castro I., & Urretavizcaya M. (2013). Blended traditional teaching methods with learning environments: experience, cyclical evaluation process and impact with MAgAdI. *Computers & Education*, 68, 129–140.
- Becta (2001), Home-school links and ICT.

- Chan, T., Roschelle, J., Hsi, S., Kinshuk, Sharples, M., Brown, T., Patton, C., Cherniavsky, J., Pea, R., Norris, C., Soloway, E., Balacheff, N., Scardamalia, M., Dillenbourg, P., Looi, C., Millrad, M. and Hoppe, U. (2006), *One-to-one technologyenhanced learning: an opportunity for global research collaboration*, Research and Practice in Technology Enhanced Learning, 1(1), 3–29.
- Chen N. S., Kinshuk W., & Liu C. C. (2011). Effects of matching teaching strategy to thinking style on learner's quality of reflection in an online learning environment. *Computers & Education*, 56, 53–64.
- Deng L., & Tavares N. J. (2013). From Moodle to Facebook: exploring students' motivation and experiences in online communities. *Computers & Education*, 68, 167–176.
- Galbraith P., & Haines C. (1998). Disentangling the nexus: Attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics*, 36(3), 275–290.
- Islam A. (2012). The role of perceived system quality as the educators' motivation to continue E-learning system use. *AIS Transaction of Human-computer Interaction*, 4(1), 25–44.
- Larsen T. J., Sorebo A. M., & Sorebo O. (2009). The role of task-technology fit as users' motivation to continue information system use. *Computers in Human Behavior*, 25, 778–784.
- Marić M. (2014). Platforma eZbirka. *Zbornik radova Informatika 2014 - Novi trendovi u razvoju informacionih sistema*, ISBN 978–86–916853–1–7, 24–28.
- Marić M., Radojičić M., Radović S., Lipkovski A. (2014). Unapređenje nastave matematike korišćenjem platforme „eZbirka“. *XIII Srpski matematički kongres*, 22–25. maj 2014, Vrnjačka Banja.
- Middleton J. A., & Spanias P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalization, and criticism of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65–88.
- Morgan C., & O'Reilly M. (2001). Innovations in online assessment. In F. Lockwood and A. Gooley (Eds.), *Innovation in open and distance learning: Successful development of online and Web-based learning*, 179–188. London: Kogan Page Limited.
- National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.
- Passey, D. (2000) Anytime Anywhere Learning Pilot Programme: A Microsoft UK supported laptop project: Learning gains in Year 5 and Year 8 classrooms. Reading: Microsoft
- Radojičić M., Radović S., Marić M. (2014). Inovativni pristup nastavi matematike primenom elektronskih materijala za učenje. *Zbornik radova Konferencija Tehnika i Informatika u Obrazovanju, Fakultet Tehničkih Nauka*, 5, 365–371.
- Radović S., Jezdimirović J., Marić M. (2014). Interaktivna zbirka zadataka iz matematike za više razrede osnovne škole – eZbirka. *Zbornik radova Konferencija Tehnika i Informatika u Obrazovanju, Fakultet Tehničkih Nauka*, 5, 371–377.
- Roca J. C., Chiu C. M., & Martínez F. J. (2006). Understanding e-learning continuance intention: an extension of the technology acceptance model. *International Journal of Human-computer Studies*, 64(8), 683–696.
- Sumak B., Hericko M., & Pusnik M. (2011). A meta-analysis of e-learning technology acceptance: the role of user types and e-learning technology types. *Computers in Human Behavior*, 27(6), 2067–2077.

POSSIBILITIES OF USING ICT AND EZBIRKA PLATFORM IN TEACHING

Summary. Rapid advances in information and communication technologies (ICT) and the development of modern educational software raise a number of expectations related to educational process, particularly in the way of training students for the creative application of the acquired knowledge. The survey results of the teachers' attitudes about the contemporary teaching approach suggest that the teachers are ready for active involvement of ICT in the educational process. Apart from the research summary, the open access education platform *eZbirka* will be presented in the paper, as well as the way the platform affects adjusting teaching to the needs of each student.

Key words: Platform *eZbirka*, digital teaching materials, the use of ICT in teaching, enhancing the educational process.

Јелена Враговић Цветковић

ОШ „Јован Стерија Поповић“ Вршац

jelenavragovic@yahoo.com

РАЗВИЈАЊЕ ИНТЕРЕСОВАЊА ЗА МАТЕМАТИКУ КОД ДЕЦЕ ШКОЛСКОГ УЗРАСТА ПРИМЕНОМ КОМПЈУТЕРА У НАСТАВИ

Апстракт. Искуство и теорија су утврдили да је однос деце према настави математике базиран на степену њихове заинтересованости за тај предмет. У случају високе заинтересованости расте и мотивисаност ученика за рад и учење математике. Да би ученике мотивисали за учење математике можемо користити модерна наставна средства. Циљ овог рада је да утврди да ли примена компјутера у настави утиче на развијање интересовања за учење математике. Да бисмо проверили ово становиште обрађивали смо наставну јединицу, у одељењу четвртог разреда, помоћу компјутера након чега смо испитали мишљење ученика о таквом начину рада. Резултати спроведеног анкетирања показују да смо код ученика изазвали интересовање за учење математике.

Кључне речи: интересовање, математика, ученик, образовно-васпитни рад.

Увод

Искуство и теорија су утврдили да је однос деце према настави математике базиран на степену њихове заинтересованости за тај предмет (Дејић, Егерић 2003, Маслов 1982, Рот 1981. Павловић, 2013). У случају добре или високе заинтересованости расте и мотивисаност деце за рад и учење математике, а та се мотивисаност наставља током даљег школовања.

Школске активности треба да се темеље на интересовањима ученика. Начин рада може имати великог утицаја на то да ли ће интересовање бити подстакнуто. Исти садржај, у зависности од тога на који начин је примерен узрасту детета, може да буде атрактиван или одбојан, због чега је важно утврдити да ли и која средства доприносе мотивисању ученика за самосталан рад на основношколским математичким садржајима.

Квалитетно математичко мишљење, које подразумева логику, гipкост, активност, усмереност, економичност, дубину, ширину, оригиналност, итд. је мишљење које свакој појединачној особи, и касније, у одраслом добу, омогућава савладавање препрека и изазова у академској сфери, али и у свим осталим

сегментима живота. Да би испунио овако важан задатак, учитељ треба да има способност да се приближи ученицима на релативно равноправном нивоу, да програм изложи на начин који ученика активира, даје му слободу, подстиче оригиналност и креативност, подржава самопоуздање и поверење у личне способности. Свакако да модерна дидактичка средства која су у складу са дечијим искуством, способностима, знањима и манипулативним вештинама, учитељу знатно олакшавају реализацију овог задатка. „Исто тако, експерименти показују да су настава и учење уз помоћ компјутера ефикаснији од традиционалне у погледу квалитета и квантитета стечених знања, трајности и апликативности тих знања, а посебно у погледу мисаоне мобилности ученика, његове мотивисаности за учење, као и бржег, хуманијег и праведнијег вредновања и оцењивања рада ученика“ (Мандић, 2015).

Дефинисање основних појмова

Мотивација: Људско биће је «биће потребе». Основна потреба људског бића је израз физиолошке неравнотеже или недостатка и она, односно оне, веома су снажне (нпр. потреба за храном, сигурношћу итд.) (Маслов, 1983). Основне потребе морају да се задовоље у неком одређеном, углавном кратком, временском интервалу. Важно је знати да те, основне потребе постају темељ циљева људског понашања, које, ако води њиховом испуњењу, постаје мотивисано понашање.

Изузетно важна потреба је потреба за сазнањем и разумевањем, која је најизраженија у детињству. Корен јој је радозналост. Ова је потреба, највероватније, спонтани производ зрења, а не учења. Подмирење ових потреба доноси доживљај врхунског задовољства.

Да би се појаснио појам мотива, мора се нагласити да није правило да свака потреба изазива активирање организма према остварењу циља. Оне (потребе) које покрену организм, то чине преко карактеристичних унутрашњих фактора који покрену активност усмеравају и регулишу. Процес покретања активности ради остварења одређених циљева специфичним начином, називамо мотивацијом, док поменуте унутрашње чиниоце (који зависе од ситуације, начина опажања и процене ситуације и особености реаговања) називамо мотивима.

Под мотивима у најширем смислу подразумевамо сваки унутрашњи услов у појединцу који наводи на акцију и мишљење. Мотиви су органски и психолошки чиниоци који покрећу или усмеравају понашање човека, и то како његове поступке, тако и његово опажање, учење и мишљење.

Објекти и ситуације које изазивају јављање мотива, који подстичу да се мотиви актуализирају, да оживе, су подстицаји. За ученика награде и похвале су подстицаји јер оживљавају његов мотив за друштвеним признањем.

На садржај нашег опажања утичу искуство, потребе, жеље, очекивања и мотивација. Ако човеку није задовољена нека витална потреба као што је потреба за јелом, онда он опажа оне слике, предмете и речи које су у вези са задовољењем његове актуелне потребе. Он исто тако оно што не воли и што покушава да избегне теже запажа од оног што воли.

Искуство и мотивација утичу на наше опажање па је због тога могуће да различите особе исте објекте и исте ситуације опажају различито. Разлике су чешће када је реч о опажању и оцењивању особа и њихових особина и односа међу људима.

Ако нешто не волимо или избегавамо, теже и запажамо. На тај начин се бранимо од оног што нам је непријатно. Тако, уколико ученик има страх од математике, теже ће усвајати основне математичке појмове. Кад учитељ успе да код ученика изазове интересовање за математику, овоме ће бити лакше да усваја појмове и решава задатке јер ће лакше да увиђа проблеме и решења.

Интересовања: Порекло интересовања је превасходно социјалне природе, из чега следи да се на интересовања може утицати агенсима социјалног окружења. Основни агенси социјализације као што су породица, школа и институције, могу да утичу на развој, али и да блокирају и ометају испољавање одређених интересовања.

Дете при различитим активностима доживљава осећање задовољства и томе тежи. Што је старије, мењају му се интересовања и постају му занимљиве ствари са новим садржајима.

Дечија интересовања утемељена су на радозналости, потреби за сазнавањем и разумевањем, те су она израз њихових унутрашњих потреба. „Познато је да су интереси веома снажни и важни подстицаји дететове активности које омогућавају да дете свој посао обави боље, брже, са мање енергије и са задовољством“ (Жлебник, 1972: 356). То и јесте разлог да су ова интересовања трајна, различита, и да усмеравају дечију активност у одговарајућем смеру, не увек истом, јер се мењају у складу са раздобљем живота. На њихово формирање и задовољавање утиче околина. Утицаји околине нису подједнаки на сву децу, иако су истог узраста, па на неку децу одређене појаве или утицаји делују подстицајно, а на другу не. Ове разлике у реаговању настају због тога што се деца међусобно разликују у телесном и душевном склопу и развоју.

Значи, занимање за одређене ствари субјективно је повезано са задовољавањем неких унутрашњих потреба детета. Начин задовољавања примарних потреба организма мења се учењем и сазревањем. Самим тим што је активно, дете при различитим активностима доживљава осећање задовољства. Оно те-

жи ка таквим задовољствима. Тако, по принципу функционалне аутономије мотива, потреба постаје самостална и као таква утиче на усмереност дечије активности. На тај начин настају нова интересовања (Смиљанић, 1985).

Образовним и васпитним радом развијамо и усмеравамо дечија интересовања. Наш васпитни рад делује као подстицај, који треба да буде у складу са развојем способности детета, тј. треба имати у виду актуелне могућности личности детета и његове потребе. Одговарајући подстицаји омогућују развијање интересовања којима су извор постојеће потребе, али исто тако, посредно, може се утицати на појављивање нових потреба које су у међувремену, сазревањем, већ постале саставни део дечије личности.

На развијање интересовања утиче и средина у којој се дете налази, пошто оно временом своје потребе задовољава све посредније. Средина која пружа веће могућности за развој интересовања је она у којој дете има погодне материјалне услове и одговарајуће васпитање. Развој способности и стицање знања омогућују детету да боље и успешније користи подстицаје средине.

На повећавање интересовања у некој активности успех има велику улогу, а са друге стране, интересовање за одређену активност подстиче дете на успех.

Дечија интересовања се мењају са узрастом. Под утицајем разних чинилаца, развојем способности и целокупне личности дете напушта ранија интересовања, а активира нова. Интересовања у којима се оно успешно истиче и која му пружају више уживања све више преовлађују.

Са почетком школовања, поред игре, дете све више стиче интересовање за рад, сазнавање и учење. Развијају му се интересовања за заједницу, колектив и групу. Деца показују интересовања за све наставне предмете, а посебно за оне активности у којима имају успеха. Интересовање на почетку школовања везано је више за сам процес активности, док се касније све више истиче интересовање за квалитет и резултат наставне активности.

Интересовања су веома снажни и важни подстицаји дететове активности који му омогућавају да свој посао обави брже, са мање енергије и са више задовољства.

Математичко образовање почиње још са предшколским узрастом. У предшколском периоду промене у менталном животу детета су велике, дубоке и значајне за развој личности и сазнајних способности. У овом периоду, апстрактне структуре и апстрактно резонување дете може да оствари само ако се изазову снажне емоције, деловањем на њихова чула уз помоћ предмета којима се демонстрира - играчкама и дидактичким средствима, сликама и илустрацијама, које ће изазвати мисаоне активности и довести до формирања математичких појмова.

Кроз најраније године живота деца уочавају и истражују математичку димензију свог света. Она упоређују количине, налазе примере, круже у прос-

тору и суочавају се са реалним проблемима (нпр. пуњење посуде предметима). Овако, математика им помаже да постану осетљивија на сопствени свет, како онај физички, тако и друштвени.

Захваљујући овим раним искуствима с математиком лако је подстаћи код деце прихватање важности математике и истовремено развити дечије поверење у сопствену способност да разуме и користи математику. Стечена позитивна искуства у коришћењу математике помажу деци у развијању диспозиција, као што су радозналост, имагинација, флексибилност, инвентивност... При томе, важно је препознавање дечијег индивидуалног искуства и претходно стеченог знања, као и разумевање њиховог породичног, језичког културног и друштвеног миљеа, уз разумевање њиховог индивидуалног приступа учењу и неформалног знања.

Дечји социјални, емоционални и моторни развој релевантан је за математички развој и одређује који забавни и манипулативни материјал ће бити подршка за учење математике. У овим оквирима треба напоменути да и у случају сличних могућности учења нека деца ће неке математичке концепте разумети раније, друга касније, те је очекивање и планирање таквих индивидуалних разлика увек важно.

Решавање проблема и резонување основ су математике. Ова се два процеса током времена развијају, посебно ако су подржана добро дизајнираним програмима учења. Развијање ових процеса је једно од најважнијих постигнућа математичке едукације.

Ако се школске активности темеље на интересовањима ученика није потребна никаква спољна присила за њихову реализацију. Начин рада може имати великог утицаја на то да ли ће интересовање бити подстакнуто или блокирано. Исти садржај у зависности од тога на који начин је примерен узрасту детета може да буде атрактиван или одбојан.

Учење је процес изграђивања знања путем активних метода: посматрања, истраживања, експериментисања, манипулисања, играња улога, решавања проблема и сл. У свему томе изузетно велику улогу имају и средства која деца користе у формирању математичких појмова. Преко њих се постиже економичност и рационалност на часу. Правилна употреба ових средстава развија код детета интересовање за математику, убрзава изградњу математичких појмова формирањем судова и извођењем закључака.

Компјутер у настави: Велику улогу у индивидуализацији наставе има компјутер. Он омогућава брзу обраду података, чување великих количина података, управљање и комуницирање уз помоћ рачунара, визуелне и звучне ефекте. Примењује се у разним областима и постао је саставни део живота. „Ученици су отворени према новим сазнањима. Углавном нису доживели неуспех у коришћењу рачунара и њихов став је позитиван према рачунарима. Они

(нарочито 1-2. разред) све доживљавају као средство за игру. То није другачије ни код рачунара. Спретан и стручан учитељ планира и спроводи учење уз помоћ рачунара и (уводне) часове информатике да би их ученик доживљавао као једну нову и интересантну игру“ (Наместовски, 2008: 16).

У настави математике рачунари и програмски пакети имају значајну улогу. Рачунари се користе при решавању математичких задатака и за самостално учење математике. Најважнији аспект наставе математике, а то је разумевање математике, постиже се коришћењем рачунара. Током рада на компјутеру ученици су сконцентрисани на разумевање проблема и задатка. Применом компјутера у настави ученици стичу бољу слику о значају математике и њеној примени.

Основни циљеви извођења наставе помоћу компјутера је упознавање ученика са математичким појмовима и идејама уз више очигледности, мотивација ученика за самосталан рад и експериментисање. Пружа им се шанса да буду активни у учењу, да сами бирају задатке које ће решавати или да више пута понављају исте, као и да брзо добију решења задатака.

Уз помоћ рачунара ученици напредују корак по корак, бржи не морају да чекају слабије већ могу да уче темпом који им одговара. Слабији ученици не морају да воде рачуна о томе шта ће им ко рећи ако нису разумели неки део градива, већ ће се враћати и понављати док не схвате. Ученицима је учење помоћу рачунара занимљиво и самим тим расте и мотивација за учење.

Компјутер се у настави примењује у следећим облицима: вежбање, систем подучавања, симулирање, игре, решавање проблема и тражење информација.

Вежбањем се утврђују стечена знања. Ученицима се постављају питања која се не оцењују. Ако ученици не знају одговор нуди му се помоћ.

У систему подучавања помоћу компјутера ученик прво добија информације, затим питање у вези садржаја и на крају информацију о тачности датог одговора.

Симулирање се врши помоћу компјутера и има велики значај у настави. Симулирањем се могу представити разна кретања као што су: цртање правих линија, повезивање елемената два скупа итд.

Општи методолошки оквир истраживања

Предмет и циљ истраживања: Предмет овог истраживања јесте да утврди колико учење помоћу компјутера утиче на однос деце према математици и њиховој мотивисаности за учење.

Основни циљ овог истраживања је да се утврди да ли учење помоћу компјутера у настави доприноси мотивисању ученика за самосталан рад на основношколским математичким садржајима и сугерише успешан начин

унапређивања наставне праксе који ће покренути унутрашњу мотивацију ученика за рад.

Крајњи циљ је оспособљавање ученика за самосталан рад у елементарној настави математике и покретање унутрашње мотивације за учење.

Уколико ово истраживање покаже да ученици основне школе учење помоћу компјутера сматрају интересантним и да могу самостално да савладају наставну јединицу, онда се може очекивати да би овај начин рада у оквиру редовне наставе дао сличне резултате.

Задаци истраживања: Из предмета истраживања и постављеног циља произилазе следећи задаци истраживања.

1. Утврдити да ли се ученицима допада да уче уз помоћ компјутера, односно да ли су били мотивисани да уче и да самостално савладају наставну јединицу.
2. Утврдити да ли су сви ученици прешли градиво у току једног наставног часа.
3. Утврдити како ученици реагују у новој дидактичко – методичкој ситуацији, тј. у ситуацији учења помоћу компјутера.

Хипотеза истраживања: Из постављеног циља и задатака истраживања произилази да је су хипотезе коју истраживањем проверавамо:

Учење помоћу компјутера у односу на уобичајен начин рада повољно утиче на повећање мотивисаности ученика на учење математике.

Учење помоћу компјутера мотивише ученике на учење без обзира на претходни успех из математике.

Популација и узорак истраживања: Ученици четвртог разреда, сто ученика, Основне школе „Јован Стерија Поповић“ у Вршцу су учествовали у истраживању. Узорак припада категорији намерних узорака. У школи постоји информатички кабинет и сви ученици су радили под истим околностима.

Мерни инструменти: Претпоставка је да ће заинтересованост ученика за рад бити већа код ученика који су наставну јединицу обрадили на компјутеру него код оних који су радили на уобичајени начин.

За потребе овог истраживања конструисан је анкетни упитник за ученике. Анкета је ученицима подељена након завршеног часа уз присуство учитеља. Анкетирање ће се спровести анкетним упитником за ученике експерименталне групе након одржаног часа. Упитник има шест питања, у уводном делу је упутство.

Обрада података: Добијени подаци су обрађени у две фазе. У првој фази ручно су сређени подаци који су добијени анкетирањем и снимањем часова, а у другој фази добијени подаци су обрађени на рачунару.

За утврђивања статистичке значајности разлике два процента рађен је t-тест.

Нацрт експеримента: Након што је у теоријском делу утврђена важност истраживања, постављена хипотеза, циљ и задаци истраживања и осигурани мерни инструменти, приступило се темељној разради нацрта експеримента и његовој реализацији.

Основу експерименталног програма чини наставни план и програм из математике за 4. разред основне школе.

У контролној групи одговарајуће наставно градиво обрађено је на уобичајени начин, односно, без примене компјутера у настави. Након часа ученицима је подељена анкета.

Израда експерименталног програма текла је овим редом:

1. Одређивање структуре наставног часа и обраде новог садржаја
2. Утврђивање образовних задатака за ученике
3. Израда наставне јединице у PowerPoint
4. Обрада наставне јединице уз присуство учитеља

Наставна јединица: писање и читање бројева већих од милион рађена је у PowerPoint-у. Када се програм стартује отвара се први слајд са називом наставне јединице. Једним кликом левим тастером миша на зелену стрелицу ученик прелази на следећи слајд. Сваки слајд има информацију, интересантну слику, позадину у боји и звук. На крају програма налазе се задаци. Сваки задатак има три понуђена одговора од којих је један тачан. Ако је ученик одабрао решење које није тачно појављује се слајд «погрешно» на којем има смернице за тачно решавање. Ако је решење тачно појављује се слајд «браво» и ученик прелази на следећи задатак.

Овај програм омогућава ученицима да самостално уче, напредују својим темпом, решавају задатке без страха да ће погрешити, могућност да се више пута враћају на одређене делове наставне јединице.

Седамдесет осам ученика четвртог разреда ОШ „Јован Стерија Поповић“ из Вршца је ову наставну јединицу радило на компјутеру. Попунили су упитник који се односи на утврђивање ставова о школском учењу помоћу компјутера. Упитници се налазе у прилогу.

Током часа атмосфера је била пријатна. Ученици су уживали у раду. Занимљиве су им биле посебно сличице и вежбање. Десет ученика је решавало задатке и по два или три пута. Сви су желели да на овај начин опет раде.

На основу практичног рада и упитника дошла сам до закључка да примена компјутера у настави развија интересовање и помаже да ученици стекну бољу слику о значају математике и њеној примени.

Анализа и интерпретација резултата истраживања

Да би се обезбедили услови за примену експерименталне и контролне групе било је неопходно испитати уједначеност група према општем успеху из математике.

Средња оцена ученика експерименталне групе на крају првог полугодишта је 4,22, док је средња оцена контролне групе 4,27, што указује на уједначеност знања.

У контролној групи наставна јединица није обрађена уз помоћ компјутера, већ је наставна јединица обрађена на уобичајени начин. Ученицима је дат исти упитник као и експерименталној групи.

Табела 1. Одговори ученика експерименталне групе

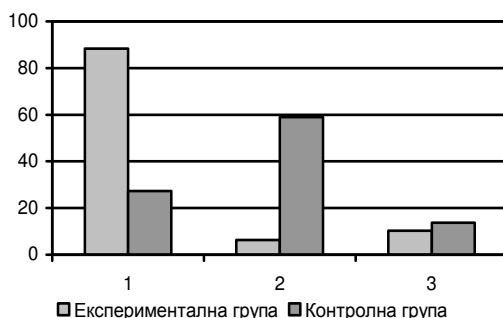
питање	1 питање			2 питање				3 питање					4 питање		
одговори	да	не	свеједно	све	већину	понеке	ниједан	веома	јако	прилично	мало	није	да	не	не знам
Бр. ученика	65	5	8	27	14	29	8	31	15	10	14	8	63	10	5
проценти	83.33	6.41	10.26	34.62	17.95	37.18	10.26	39.74	19.23	12.82	17.95	10.26	80.77	12.82	6.41

Табела 2. Одговори ученика контролне групе

питање	1 питање			2 питање				3 питање					4 питање		
одговори	да	не	свеједно	све	већину	понеке	ниједан	веома	јако	прилично	мало	није	да	не	не знам
Бр. ученика	6	13	3	5	5	5	7	6	3	2	5	6	9	12	1
проценти	27.27	59.09	13.64	22.73	22.73	22.73	31.82	27.27	13.64	9.09	22.73	27.27	40.91	54.55	4.55

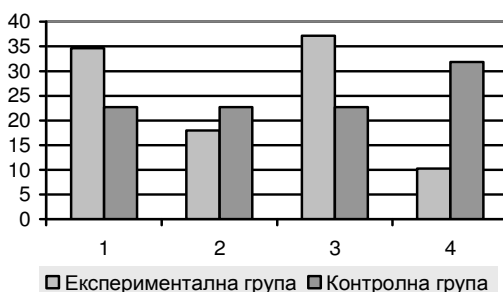
На прво питање након рада на компјутеру 83.33% ученика експерименталне групе се изјаснило да им се допада да уче уз помоћ компјутера, док је само 27.27% ученика контролне групе одговорило да им се такав начин учења допада. 59.09% ученика мисли да им се учење уз помоћ компјутера не допада, док је знатно мањи проценат ученика експерименталне групе који мисли да им се овакав вид учења не допада.

Графикон 1. Упоредни графикон одговора ученика на прво питање



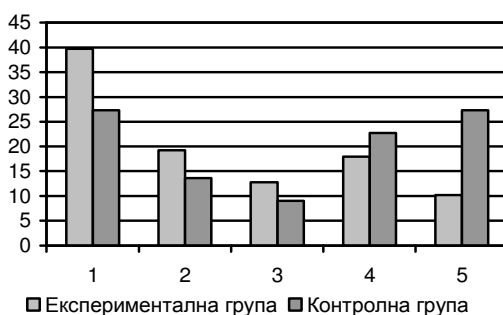
Ученици контролне групе су се у великом броју, 31.82%, изјаснили да не би волели часове математике уз помоћ компјутера, док је само 10.26% ученика експерименталне групе одговорило да не би волели овакве часове.

Графикон 2. Упоредни графикон одговора ученика на друго питање



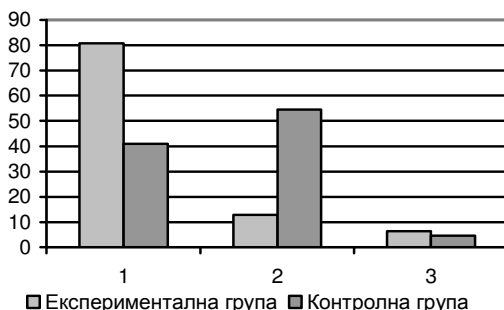
Ученика експерименталне групе који сматрају да часови математике не би били интересантни, њих 10.26%, има много мање у односу на контролну групу, њих 27.27% који сматрају исто.

Графикон 3. Упоредни графикон одговора ученика на треће питање



Ученици експерименталне групе који су наставну јединицу из математике радили уз помоћ компјутера, у знатно већем проценту, 80.7%, сматрају да би лакше савладали наставно градиво, него ученици контролне групе којих је 40.91% .

Графикон 3. Упоредни графикон одговора ученика на четврто питање



Утврђивања статистичке значајности разлике два процента t-тестом

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора експерименталне и контролне групе, односно ученици обе групе подједнако воле да уче уз помоћ компјутера.

Како је добијена вредност $t=5,40$, већа од 1,96, постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе и нулта хипотеза се одбацује.

Одговорима на друго питање требало је утврдити да ли ученици експерименталне групе желе да имају неке часове математике уз помоћ компјутера, тако да су одговори: све, већину и понеке узети као потврдни одговори. Да би утврдили статичку значајност одговора узели смо само негативне одговоре.

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора експерименталне и контролне групе, односно ученици не желе ни један час математике уз помоћ компјутера.

Како је добијена вредност $t=2,62$, већа од 1,96, постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе и нулта хипотеза се одбацује.

Трећим питањем хтели смо да утврдимо да ли је ученицима настава математике интересантнија уз помоћ компјутера. Одговоре: веома, јако, прилично и мало, узели смо као потврдне. У разматрање смо узели негативне одговоре обе групе.

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора експерименталне и контролне групе, односно ученици мисле да настава математике није интересантнија уз помоћ компјутера.

Како је добијена вредност $t=2,09$, већа од 1,96, постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе и нулта хипотеза се одбацује. Може да се закључи да је ученицима настава математике интересантнија уз помоћ компјутера.

На четвртном питању желимо да видимо да ли ученици мисле да могу лакше да савладају наставно градиво уз помоћ компјутера. У обзир смо узели потврдне одговоре обе групе.

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора експерименталне и контролне групе, односно ученици мисле им није лакше да савладају градиво уз помоћ компјутера.

Како је добијена вредност $t=3,51$, већа од 1,96, постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе и нулта хипотеза се одбацује. Може да се закључи да ученици сматрају да им компјутер помаже у раду.

Да бисмо утврдили да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима експерименталне групе у зависности од оцене које су имали на крају првог полугодишта користили смо t-тест.

Анализом одговора на прво питање узели смо у обзир само потврдне одговоре ученика. Ученици са оценама два и три налазе се у једној групи, а ученици са оценама четири и пет у другој.

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора ученика са оценама два и три и ученика са оценама четири и пет.

Како је добијена вредност $t=1,57$ мања од 1,96 не постоји статистички значајна разлика између групе и нулта хипотеза није одбачена.

На четвртном питању, да ли ученици мисле да би могли лакше да савладају градиво уз помоћ компјутера, узети су у обзир позитивни одговори.

Нулта хипотеза: Не постоји сигнификативна разлика између одговора ученика са оценама два и три и ученика са оценама четири и пет. Ученици обе групе мисле да би лакше савладали градиво уз помоћ компјутера.

Како је добијена вредност $t=1,24$ мања од 1,96 не постоји статистички значајна разлика између групе и нулта хипотеза није одбачена.

Можемо да закључимо да не постоји разлика између група.

Закључци

Организујући и спроводећи педагошки експеримент о утицају коришћења компјутера у настави математике пошли смо од теоријских и практичних саз-

нања о начинима развијања интересовања ученика за рад. Истраживање је ставило коришћење компјутера у настави, као једно од средстава за развијање интересовања и мотивисања ученика, у први план.

Дошли смо до закључка да настава математике уз помоћ компјутера може ученицима да буде интересантна и да их мотивише на рад.

Обрада наставне јединице уз помоћ компјутера, којом се ученик уводи у самосталније учовање битних веза и односа, извођење закључака и стицање нових знања, утиче на развијање интересовања за учење.

Ученици експерименталне групе су показали велику активност и самосталност на часу. Самостално су прешли кроз целу наставну јединицу и решавали задатке. Оспособљавали су се за самостално коришћење компјутера и напредовали сопственим темпом. Организација часа је утицала на интензивнији мисаони рад ученика и њихову жељу да савладају све постављене задатке.

На основу спроведеног истраживања и добијених података могу се извести следећи закључци:

1. На основу анкете утврђено је да је експериментална група показала велику заинтересованост за учење математике уз помоћ компјутера (83.33% ученика експерименталне групе се изјаснило да им се допада да уче уз помоћ компјутера док је само 27.27% ученика контролне групе одговорило исто).
2. Утврђено је да већи број ученика експерименталне групе, њих 89.74% сматра да су часови математике интересантнији уз помоћ компјутера.
3. Ученици експерименталне групе су прешли целу наставну јединицу без обзира на претходно знање из математике.

Потврђена је хипотеза да учење помоћу компјутера, у односу на уобичајени начин рада, повољно утиче на повећање мотивисаности ученика на учење математике.

Потврђена је хипотеза да учење помоћу компјутера мотивише ученике на учење без обзира на претходни успех из математике.

На основу резултата истраживања видљиво је да је основна хипотеза потврђена. Задаци истраживања су извршени и дати су потребни одговори на постављена питања.

Овај експеримент је потврдио да увођење компјутера у наставу повољно утиче на повећање интересовања за учење математике. Учење уз помоћ компјутера показало се продуктивним обликом учења у настави у односу на уобичајени облик наставе.

Спроведено истраживање је показатељ да увођење новина у наставу користи за мотивисање ученика, не само у математици, већ и у другим наставним предметима.

Литература

- Dejić, M. Egerić, M., (2003): *Metodika nastave matematike*. Jagodina: Učiteljski fakultet
- Mandić, D. (2015): *Informaciona tehnologija u savremenoj nastavi* Posećeno April 4, 2015 from the World Wide Web <http://www.edu-soft.rs/cms/mestoZaUploadFajlove/rad2.pdf>
- Maslov, A. (1982): *Motivacija i ličnost*. Beograd: Nolit
- Namestovski, Ž. (2008) *Uticaј primene savremenih nastavnih sredstava na povećanje efikasnosti nastave u osnovnoj školi*
Posećeno April 4, 2015 from the World Wide Web <http://blog.namesztovszkizsolt.com/wp-content/uploads/2009/10/Magiszteri.pdf>
- Pavlović, A. *Значај и примена рачунара у образовању ученика у основној школи*
Posećeno April 4, 2015 from the World Wide Web
<http://www.ftn.kg.ac.rs/download/SIR/SIR%20Ana%20Pavlovic.pdf>
- Rot, N. (1981): *Opšta psihologija*. Beograd: Zuns
- Smiljanić, V. (1985): *Dečja psihologija*. Beograd: Zuns
- Žlebnik, L. (1972): *Psihologija deteta i mladih*. Beograd: delta – pres.

Прилог 1.

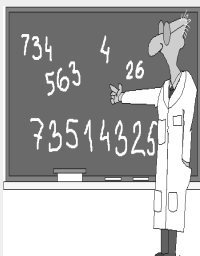
Наставна јединица: Писање и читање бројева већих од милион

Презентација у PowerPoint-у за наставну јединицу: писање и читање бројева већих од милион за 4. разред основне школе.

**ПИСАЊЕ И ЧИТАЊЕ
БРОЈЕВА ВЕЋИХ ОД
МИЛИОН**

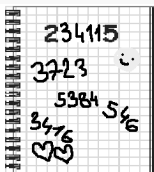


- Како речи можемо записати словима, тако и ма који природни број можемо написати одређеним бројем цифара
- 287 8456322
98246 27 6785
- Бројеве пишемо користећи следећих десет цифара:
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.



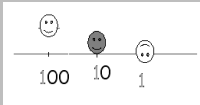
Бројевни систем у којем се бројеви пишу употребом тих десет цифара назива се

ДЕКАДНИ БРОЈЕВНИ СИСТЕМ



Вредност цифре којом се пише број зависи од места цифре у броју.

- Ако се цифра помери за једно место улево, њена вредност се повећава 10 пута.
- Ако се цифра помери за једно место удесно, њена вредност се смањује 10 пута.



Приликом писања вишецифрених бројева оставља се мали размак између суседних класа ради прегледности у писању, лакшег уочавања укупног броја класа и ради лакшег читања бројева

234 896 231 908

786 095 347 197

Код сваке класе изговарамо назив класе, осим код класе јединица где назив изостављамо

234 милијарде 896 милиона 231 хиљада 908



милијарде			милиони			хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
			4	3	8	2	9	0	6	1	5

Овај број у табели чита се:

4 милијарде 382 милиона 906 хиљада 153

милијарде			милиони			хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
	6	2	0	0	0	5	0	7	0	0	0

Овај број се чита:
62 милијарде 507 хиљада
 Називе класа, у којима су све три цифре нуле,
 не изговарамо

милијарде			милиони			хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
7	4	0	8	0	7	9	1	3	0	9	1

740 милијарди 807 милиона 913
 хиљада 91

ВЕЖБА

1. Број осам стотина хиљада четрдесет
 написан арапским цифрама је:

а) 800400

б) 8100040

в) 800040

2. Природном броју 408000 непосредно
 претходи број:

а) 407000

б) 407999



ВЕЖБА

3. У броју 97 845 040 120

а) Колико има милијарди

9 978 97

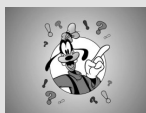
б) Колико има хиљада

84 40 5



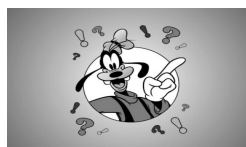
ПОГРЕШНО!!!

хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј
8	0	0	0	4	0



хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј
4	0	8	0	0	0

ПОГРЕШНО!!!



милијарде			милиони			хиљаде			јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
	9	7	8	4	5	0	4	0	1	2	0

DEVELOPING CHILDREN'S INTEREST IN MATHEMATICS BY APPLYING COMPUTERS IN TEACHING

Summary. Experience and theory have found that children's attitude toward teaching mathematics is based on their level of interest in this subject. High interest in mathematics results in motivation of students to work and learn mathematics. To motivate students to learn mathematics we can use modern teaching resources. The aim of this study was to determine whether the use of computers in the classroom affects the developing interest in learning mathematics. To verify this point of division fourth grade has cultivated a teaching unit with a computer and then we examined students' opinions about this type of work. Results of the conducted survey shows that we sparked students' interest in learning mathematics.

Key words: interest, math, students, educational work.

4

ИСТОРИЈА МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА

Сунчица Мацура Миловановић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Маријана Зељић

Учитељски факултет, Универзитет у Београду

Наташа Вујисић Живковић

Филозофски факултет, Универзитет у Београду

suncicamacura@gmail.com

КАРАКТЕР ПРОМЕНА У НАСТАВНИМ ПЛАНОВИМА И ПРОГРАМИМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНИМ ШКОЛАМА У СРБИЈИ 1804–1941. ГОДИНЕ

Апстракт. У раду смо се бавили анализом карактера промена у наставним плановима и програмима из математике у основним школама у Србији у периоду од 1804. до 1941. године. Усредсредили смо се на изналажење: 1) претпоставки које су стојале у основи избора одређеног садржаја из математике и на 2) принципе на којима се заснивало структурирање математичког садржаја. Бавили смо се релативно дугим историјским периодом, што нам је омогућило да сагледамо утицај друштвених, политичких и економских фактора, са једне, и развоја методике наставе математике са друге стране, на обликовање наставних планова и програма из математике у основним школама.

Кључан налаз до кога смо дошли везан је за промену у циљевима наставе математике у основним школама: избор и структурирање садржаја у наставним плановима и програмима у првим деценијама XIX века одражавао је идеју да као наставни предмет математика у основној школи пре свега има утилитарну функцију – да пружи знања која су употребљива у свакодневном животу, да би се временом развила идеја о тзв. формалној функцији наставе математике – као предмет она треба да утиче на развој појединих интелектуалних функција, а на крају изучаваног периода математика добија циљ да помогне свеукупан развој детета.

Кључне речи: наставни план и програм, математика као наставни предмет, основне школе у Србији 1804–1941.

Увод

Развој наставних планова и програма наставе математике у нижим разредима основне школе у Србији до сада није био предмет систематског истраживања, о чему сведочи чињеница да још увек немамо ни једну научну монографију о овој теми, док број научних чланака не прелази једну десетицу (видети

у: Вујисић, Дејић и Зељић, 2011). Сасвим другачију слику имамо у области истраживања историје наставе математике у гимназијама и на универзитету. Узроци због којих у српској педагошкој историографији није негована традиција истраживања развоја наставних планова и програма из елементарне математике су вишеструки. Најпре, истраживање овог питања захтева добро познавање математике као научне дисциплине: ово је и основни разлог да су се истраживачи углавном окретали гимназијским и универзитетским наставним програмима јер им је њихова анализа омогућавала да додатно развију уже поље своје експертизе, а то је математика као наука. Затим, треба нагласити да истраживање историје наставних планова и програма за ниже разреде основне школе захтева интердисциплинарни приступ: обликовање наставног програма из елементарне математике треба сагледати из перспективе математике, психологије, педагогије, политичке и друштвене историје, те је и сложеност самог предмета истраживања додатно обесхрабривала истраживаче да се упусте у систематско испитивање ове теме. На крају, укажимо и на то да је у нас дуги низ деценија доминирао комеморативан однос према педагошком наслеђу – научни скупови организовани су у поводу обележавања јубилеја, најчешће везаних за историју националног школства, ређе у поводу „присећања“ на педагоге који су утемељили педагогију као научну и академску дисциплину у Србији. За српску историјско-педагошку научну сцену друге половине XX века карактеристичан је изванредан отклон према педагошким идејама које су настале у XIX и првој половини XX века – развој социјалистичке педагогије пратио је, у начелу, негативан однос према педагошкој баштини или, у најблажој форми, њено игнорисање. Док се у исто време у националној историји педагогије других народа водила расправа о томе како да се помогне истраживачима да развију у што већем степену објективан однос према педагошком наслеђу, односно како да не упадну у методолошку „замку“ да претежно закључују да је „прошлост била боља“, у српској педагогији имали смо супротан тренд – педагози су „подизани“ да о националној педагошкој прошлости формирају став да је треба заборавити, етикетирана је као „застарела“, „традиционална“, „назадна“. Деценијама развијан, овај став и данас дели велики број педагога: окренути према „будућности“, научили су да о „прошлости“ мисле као о „сметњи“, као о нечему што треба променити „одмах и сада“. С тим у вези негован је и вредносни суд да не постоје национални педагошки узор, ретки којима се одавало признање (на пример др Вићентије Ракић, професор педагогије на Филозофском факултету у периоду 1912–1936. године) били су изабрани као „позитиван“ пример више у циљу етикетирања других педагога као „негативних“ примера, што је за последицу имало да сада немамо настављаче, следбенике педагошког дела утемељивача српске педагогије. Са друге стране, снажно присутна потреба савремених педагога да себе виде као истра-

живаче који су самостално формирали однос према националној педагошкој прошлости и општераспрострањен став педагога да су аутономно и према личним преференцијама „изабрали“ узор из прошлости, што су, у суштини, само јасне манифестације аисторичности, сведочи о неразвијености историјске свести у педагошкој истраживачкој заједници (видети у: Вујисић Живковић, 2012).

У овом раду дали смо резултате анализе карактера промена у наставним плановима и програмима из математике у основним школама у Србији у периоду од 1804. до 1941. године. Усредсредили смо се на изналажење претпоставки које су стојале у основи избора одређеног садржаја из математике и принципа на којима се заснивало структурирање математичког садржаја.

Промене у избору и структури садржаја елементарне математике у наставним плановима и програмима у Србији у периоду 1804–1941. године

Враћање Србије на европску историјску позорницу започело је Првим српским устанком 1804. године. У периоду турске окупације национална просвета – опстала при црквама и манастирима – била је усмерена на очување националног језика, православне вере, народне културе и обичаја. Ово су биле значајне тековине на којима је, у условима постепеног националног ослобођења, могао даље да се гради школски систем (видети у: Ћунковић, 1971).

Први акт који садржи захтеве везане за садржај који треба да се обрађује у основној школи донет је 11. септембра 1811. године: у њему се препоручује да се у основним школама уче читање, писање, часловац, катехезис, црквено појање и рачуница (Гавриловић, 1903: 41). Међутим, недовољно образовани учитељи су у наредним деценијама у основним школама предавали оно што су знали и умели, најчешће читање, писање, веронауку и црквено певање, док се рачуница учила само у варошким основним школама, у којима је развој трговине и заната диктирао потребу да се овлада вештином рачунања (Вујисић, Зељић и Радовановић, 2014).

Хатишерифом из 1830. године Србија је добила статус аутономне кнежевине под турским суверенитетом, такође, овим актом добила је право „заводити печатње књига, болнице и школе” (*Садржаније Султанској Хатишерифа*, 1834: 3). Право да самостално организује школе младој Кнежевини отворило је могућност да почне да улаже интензивније напоре у просветно поље. Први званични општешколски закон, *План за школе које имају постојајши*, донет је 22. августа 1836. године, две године касније, 11. августа 1838, усвојен је први званични наставни програм за основне школе, *Назначеније учебни предмета који се у школама нормалним за прво и друго шеченије школско предаваши имају*. За

овај програм карактеристична је доминација религијских садржаја – читање и учење молитава, часловца, псалтира, свештене историје, катихизиса, црквеног појања било је у првом плану. Али, у односу на пређашњу праксу, учитељи су овим програмом добили у задатак да предају значајно проширен садржај из српског језика, и то темама из области граматике, а као кључну новину програм је донео два нова предмета, Историју српску од почетка до деспота српски и Немачки језик. За програм из рачунице можемо рећи да су у њему јасније конкретизовани садржаји које учитељи треба да обраде: за први разред били су предвиђени најпре бројеви до 10, потом „већа числа“ и „бројање у глави“, за други разред четири рачунске операције, за трећи рачунске операције са „ненареченим“ (неименованим) и „нареченим“ (именованим) бројевима, а за четврти разред је било предвиђено обнављање садржаја из трећег разреда, коме су додати још и разломци и „просто правило тројно“ (пропорције). Нагласимо да је у 1843. години изашао први уџбеник из математике за основне школе штампан у Државној штампарији у Србији, *Рачуница за учећу се младеж у народни училишћима Књажевства Србије* Симеона Прице, који је следио садржаје програма из 1838. године.

Године 1844. (23. октобра) донет је нови општешколски закон – *Успројеније јавној училишној настави* (1844: 315–345), а потом и *Наставленије за учишће основни училишћа* (АС, МПС-п, 1844, ф. V, бр. 74, No. 1526). Ово „наставленије“ организовано је у три целине – прва, под насловом „Наставленије о смотренију учебни предмета“ садржи наставни програм. Новим програмом учење Рачунице започињало је у другом полугодишту првог разреда, за који је било предвиђено „познавање и писање числа, с лаким наизустним рачунима“, у другом разреду рачуница је обухватала усмени рачун са све четири рачунске операције и „ненаречене“ бројеве, за трећи разред, поред усменог рачуна, биле су предвиђене четири рачунске операције са „ненареченим“ и „нареченим“ бројевима, разломци, најпре усмено, а потом са бројевима, а за четврти разред „правило тројно“. У „Наставленију о смотренију учебни предмета“ уз програм сваког појединачног предмета дата су и методичка упутства за његову реализацију. Део упутства који се односи на наставу Рачунице релативно је кратак, непуну једну и по страну: у њему се од учитеља тражи да ученике најпре науче усмени, па писмени рачун, да након „искуственог“ рачуна пређу на рачун са цртама, а на крају са бројевима, и по потреби са мерама и новцем. Такође, учитељи се упућују да у настави Рачуна користе рачунаљку – занимљиво је да се препоручује рачунаљка са 12 шипки и 78 куглица (на првој шипки налази се једна, на другој две куглице, а на последњој 12).

Нови наставни програм за основне школе, *Расположење предмета који се у основним училишћима предају по разредима и педагогијама*, донет је 30. јула 1850. године (1850: 261-269). Њиме је учење Рачунице поново започињало

од првог полугодишта првог разреда, за који је било предвиђено „наизуствено учење бројева до десет, писање такви на табли и бројење са стварима“. За друго полугодиште првог разреда одређено је да се учи „наизуствено учење бројева до сто, писање такви на табли (заједно бројеви и предмети)“. За прво полугодиште другог разреда предвиђена су прва два „вида“ рачуна (сабирање и одузимање) са „равнореченим бројевима“ и таблица сабирања и одузимања, „наизуствено“, а за друго полугодиште друга два „вида“ рачуна и таблица множења и дељења („наизуствено“). За трећи разред у првом полугодишту била су предвиђена правила о „преобраћању разноречених бројева у равноречене“ и сабирање и одузимање са „разнореченим бројевима“, а у другом полугодишту множење и дељење са „разнореченим бројевима“. За четврти разред одређено је понављање рачунских операција са „разнореченим бројевима“ у првом полугодишту и „правило тројно“ у другом полугодишту.

Упоредна анализа наставних програма из 1838, 1844. и 1850. године, показује да су се промене и развијање програма из Рачунице кретали у правцу спецификације и диференцијације садржаја. На пример, док је у програму из 1838. године било одређено да учење рачуна започиње мањим и већим бројевима и „бројањем у глави“, програм из 1844. године је као прву тему предвиђао „познавање и писање числа, с лаким наизуственим рачунима“, док је по програму из 1850. године настава Рачунице започињала обрадом бројева прве десетице а потом бројева до 100. Издавање блокова бројева као тематских целина говори о почецима систематске разраде садржаја Рачунице, будући да блокови који су били издвојени представљају природне целине за декадни бројевни систем. Такође, програми из 1836. и 1844. године предвиђали су да се истовремено обрађују све четири аритметичке операције, док је програм из 1850. године предвиђао најпре обраду операција сабирања и одузимања, а након тога множења и дељења. Даље, из структуре програма из 1838. године не може да се изведе методичка процедура коју учитељи треба да примене у обради појединих тема, док се из структуре програма из 1844. године она назива – подразумева увођење једноставних збирова, разлика, итд, а касније, на тако створеним основама, обраду усмених, па писмених поступака рачунања. У програму је јасно истакнут захтев да се при увођењу појма броја користе дидактичка средства (рачунаљка), представљају јединице пребројавања цртањем цртица, а тек на крају пишу симболи. За програм из 1850. године можемо рећи да има још развијенију методичку процедуру: прво се уче бројеви до 10, потом бројеви до 100, методички поступак обраде бројева укључује кретање од „бројања са стварима“ (тзв. искуствени рачун), затим „рачун са цртама“, и на крају, рачун са бројевима. Обрада рачунских операција (прво сабирање и одузимање, затим множење и дељење) подразумевала је да се креће од рачуна са „равнореченим“ и потом прелази на рачун са „разнореченим бројевима“. Али, чињени-

ца да је у сва три до сада анализирана програма било предвиђено да се најпре уче бројеви, потом рачунске операције (најпре са именованим, па са неименованим бројевима), затим разломци и рачунске операције са разломцима, односно теме и вештине које су потребне сваком појединцу за сналажење у свакодневном животу, говори да су аритметички садржаји у овим програмима посматрани као „практична дисциплина“. При том, увек морамо да имамо у виду да су реализација програма и остварени напреси у настави рачунице зависили од образованости учитеља, међу којима је у Србији прве половине XIX века већина имала завршену само основну школу (видети у: Милићевић, 1868).

Убрзо након доношења наставног програма из 1850. године изашао је нови уџбеник из рачунице, *Крајња рачуница за основне Србске школе* Филипа Христића (1850), као и први приручник за учитеље из рачунице – *Практична рачуница за учитеље основне школе* др Милована Спасића (1850). Спасић је потом 1855. године, саставио *Педагогично-методично настављеније за учитеље основни школа*, са циљем да унапреди стручно образовање учитеља. У овом „настављенију“ о настави рачуна између осталог пише: „Рачун је важан, једно што га у свим нашим одношајима врло требамо; а друго што је он прекрасно средство, да се деца, која школу похађају, ум и остале душевне моћи развијају, изобразе и изоштре. Он је, дакле, предмет разума, и ако се својствено свом сходном начину не предаје, целъ је промашена“ (Спасић, 1855: 43). Тако је настава Рачунице, поред утилитарне, постепено добијала још једну важну функцију – да помогне и подржи интелектуални развој детета.

Након готово две деценије, 1871. године, донет је нови наставни програм за основне школе, *Распоред предмета за мушке и женске основне школе и уџбеник како ће се предавати*, у коме је програм Рачунице био структуриран на следећи начин: у првом разреду укључивао је све рачунске операције у првој десетици, у другом разреду рачунске операције са именованим и неименованим бројевима у првој стотини (усмено и писмено), познавање новца и решавање текстуалних задатака „из обичног живота“, у трећем разреду рачунске операције до 1000, „преобраћање бројева разноимених у равноимене“ и римске бројеве, а у четвртном разреду рачунске операције са „разноименим бројевима“, размере и сразмере, „просто правило тројно“ (пропорције), рачунање са разломцима, усмено и писмено (*Распоред предмета за мушке...*, 1871: 7–9). Наставним програмом из 1871. године направљен је значајан искорак у погледу разраде математичких садржаја – издвојени су блокови бројева од 1 до 10, од 1 до 100, од 1 до 1000, наглашено да се најпре учи усмени рачун и потом уводи поступак писменог рачуна, уведени су нови садржаји (познавање новца, мера, римских бројева, размера и сразмера), предвиђено да се у сваком блоку бројева изнова обрађују све четири рачунске операције.

Након стицања државне самосталности 1878. године Кнежевина Србија кренула је убрзаним корацима у правцу модернизације свих аспеката друштвеног живота. Уочи доношења *Закона о основним школама* 1882. године, којим је први пут уведена обавезна четвороразредна основна школа, а основна школа продужена на шест година (1882: 41-52), у српској економији и даље је доминирала пољопривредна производња и сточарство, док у градовима и варошима имамо настојања да се развију занати и индустрија. Међутим, економска снага државе није могла да издржи велика улагања у основне школе, оне су и даље доминантно биле четвороразредне (почетком осамдесетих година XIX века у Србији је радило 614 основних школа, које је похађало укупно 35.939 ученика). Виша два разреда основне школа (тзв. продужене школе) основана су тек у око 20 места (Ћунковић, 1971: 126).

Од 1880. године израда наставних програма за основне школе одвијала се под окриљем Главног просветног савета, саветодавног тела које су чинили наши најистакнутији универзитетски професори и интелектуалци. Тако је 1884. године први пут поред наставног програма донет и наставни план за основне школе (*Наставни план за нижу основну школу*, 1887: 647). До тада су учитељи сами одређивали фонд часова за поједине наставне предмете и правила недељне распореде часова, будући да није било званичног наставног плана. Наставни план из 1884. године предвиђао је да Рачун у основним школама има фонд од четири часа недељно у првом разреду, три часа недељно у другом и трећем и два часа недељно у четвртном разреду.

Значајну улогу у обликовању новог наставног плана и програма имао је Стеван Д. Поповић, професор Мушке учитељске школе у Крагујевцу/Београду, писац наших првих систематских приручника из методике елементарне математике (три свеске његових предавања из Практичног рачуна изашле су 1869. и 1870. године, потом их је прерадио и под насловом *Рачуница за основне школе у Србији* објавио 1878. и 1879. године). Које су промене унете у наставни програм из Рачунице 1884. године? Аритметички садржај разбијен је на блокове (1-10, 1-20, 1-100, 1-1 000, 1-10 000, 1-100 000), први пут је издвојен блок бројева до 20, у оквиру кога је било предвиђено да се обрађују све рачунске операције. Оваква структура садржаја омогућавала је да ученици развију разумевање поступака рачунања са малим бројевима (у оквиру блока бројева до 20) и да се при ширењу блока бројева рачунске операције уче по аналогiji са оним чиме су ученици већ овладали у оквиру мањих блокова. Поред тога, уведено је да се поступак усменог рачунања у блоку бројева од 1 до 10 000 примењује само са целим бројевима, затим тзв. комбиновани задаци, док су теме које се односе на метријске мере и новац смислено повезане са аритметичким поступцима (нпр. новчанице која има значење десетице, стотине, итд.). Такође, уведене су нове аритметичке теме, као што су дељивост бројева и ре-

шавање задатака „свођењем на јединицу“, „интересни рачун“, „сразмерна подела“, „правило смесе“, „правило одбитка“. Реч је о садржајима који су додатно допринели да знање из Рачунице стечено у основној школи ученици могу да примене у свакодневном животу. На крају, додајмо и то да су за више разреде основне школе (V и VI) први пут уведени садржаји из геометрије (*Наставни програми за нижу и вишу основну школу*, 1887: 666–673).

Нови наставни план и програм од 1. новембра 1891. године настао је као одговор на критике учитеља да је програм из 1884. године преобиман, да не одговара узрасним развојним способностима деце и да не може да се обради у четири разреда основне школе. Сада је фонд наставних часова повећан на четири часа недељно у свим разредима (*Наставни план за четвороразредну основну школу*, 1895: 875). Поред тога што је у наставном програму из 1891. године извршена редукција садржаја из Рачунице, примећујемо да су они разрађенији у погледу методичких поступака који се могу реконструисати из начина на који је садржај структуриран. Тако је, на пример, у новом програму назначено да се у првом разреду најпре ради са рачунаљком и другим училима, затим све четири рачунске операције и то са именованим и неименованим бројевима од 1 до 20, након усменог рачуна (који треба да преовладава) следи писмено рачунање (изузев дељења) и на крају познавање половина, трећина, четвртина и петина „од једног целог и од осталих бројева до 20“. За други разред био је предвиђен следећи садржај: усмено и писмено рачунање у блоку бројева до 100 са „једноименованим“ и „неименованим“ бројевима, познавање шестина, седмина, осмина, деветина и десетина (при чему делитељи могу да буду једноцифрени бројеви до 10, а од 10 „двоцифрени округли бројеви“). У трећем разреду учио се усмени рачун у блоку бројева од 1 до 1000 („с бројевима лакшим за памћење“), рачунање са „разноименованим“ бројевима, дељење двоцифреним бројевима до 100, мерне јединице, док је за четврти разред било предвиђено усмено и писмено рачунање са свим бројевима, разломци, „просто правило тројно“, „разрешавање задатака поглавито свођењем на јединицу“, а из тзв. интересног рачуна „изналажење интереса“. Посебно се наглашава да у трећем и четвртном разреду треба да преовладава писмени рачун (*Наставни програми за нижу основну школу*, 1895: 806–807). Када је реч о програму за више разреде основне школе (V и VI), у њему нису учињене значајне измене у односу на програм из 1884. године – поред понављања аритметичких садржаја предвиђених за ниже разреде основне школе укључени су још и елементарни садржаји из геометрије (*Наставни програми за вишу основну школу*, 1895: 825–827).

Након што је 1898. године донет нови основношколски закон (*Закон о народним школама*) којим је трајање основне школе враћено на четири године, 20. септембра 1899. године усвојен је нови наставни план и програм. Кључна новина овог програма била је преименовање предмета Рачуница у Рачуница са

геометријским облицима, што је у суштини значило и да се први пут у четворогодишњу основну школу уводе садржаји из геометрије (до тада је геометрија била предвиђена за тзв. вишу основну школу). У наставном програму из 1899. године аритметички материјал је разбијен на блокове (1-10, 1-20, 1- 100, итд.), предвиђено је да се бројеви из почетних блокова обрађују појединачно, а да се у оквиру сваког блока обрађују све рачунске операције. Посебно је истакнут принцип очигледности – тражи се да ученици раде са структурисаним дидактичким материјалом, тј. да дидактички материјал подупире декадну основну бројевног система, на пример, „прављење десетица на хартији“, „рачунање најпре са стварима, затим са именованим бројевима без ствари и на послетку с чистим бројевима“. Овај програм је у односу на претходне био знатно развијенији: садржај је био структурисан у шире тематске целине у којима су уже тематске јединице биле рационално организоване на принципима поступности и систематичности. За први разред предвиђено је: 1) „показивање бројева на стварима“ (употреба рачунаљке, дрваца), „очигледно“ упознавање са новцем, метром, километром, литром, до броја 10; сабирање и одузимање најпре са предметима, па са бројевима; множење и дељење са предметима па са бројевима; све четири рачунске операције усмено; 2) рад са дрвцима и на рачунаљци до 20, четири рачунске операције „најпре са стварима а затим са именованим бројевима без ствари и на послетку с чистим бројевима“; израчунавање лакших задатака „из живота“; упознавање са разломцима (само „на стварима“ и цртежима); за други разред предвиђено је: 1) упознавање бројева од 20 до 100 на рачунаљци и са дрвцима (као и у првом разреду); прављење десетица на хартији и све четири рачунске операције са њима; 2) усмени па писани рачун до 100; познавање новца, нових мера и њихових делова до 100; „израчунавање задатака из живота“; 3) четири рачунске операције са неименованим бројевима, усмено и таблица множења; 4) писани рачун („у сва четири вида“), са извођењем правила из примера; за трећи разред предвиђено је: 1) упознавање са стотинама до 1000, очигледно (на хартији и дрвеним плочама), „рад са њима у сва четири рачунска вида, додајући постепено по једну стотину“; 2) мере и рачун са њима; 3) усмени рачун са целим бројевима до 200, потом до 300, итд., а са деловима само до 10; 4) писмени рачун са целим бројевима „у сва четири вида“ и са извођењем правила; 5) писмено рачунање „разноврсних примера из живота“; 6) рачунање са „разноименим бројевима“; за четврти разред предвиђено је: 1) очигледно представљање бројева преко 1000, 2) четири рачунске операције са целим бројевима преко хиљаде, нове мере, рачунање са „разноименим бројевима“; 3) десетни разломци и рачун са њима; 4) „израчунавање примера из живота са округлим бројевима“ преко хиљаду, усмено и писмено; 5) решавање задатака из „простог правила тројног свођењем на једницу“, усмено

и писмено (*Наставни план и програм за основне школе у Краљевини Србији*, 1899: 613–624.)

Из геометрије је био предвиђен следећи садржај: у прва два разреда основни појмови о линији, угловима, троугловима итд., цртање, резање и прављење различитих облика, у трећем разреду проширивање знања о геометријским облицима – уводе се ромб, ромбоид, трапез, многоугао, од геометријских тела коцка, а у четвртном разреду прављење геометријских облика, мерење и израчунавање површине и запремине геометријских тела. Садржај из геометрије је у односу на садржај из аритметике био боље структурисан, што се може објаснити чињеницом да се, због недостатка аксиоматског заснивања, аритметика у XIX веку значајно разликовала од Еуклидове геометрије.

У наредном периоду није било значајнијих промена у структури и садржају програма елементарне математике. Због тога ћемо, на крају, представити кључне карактеристике програма предмета *Рачун са основама геометрије* који је био прописан *Привременим наставним планом и програмом за основне школе* из 1933. године. Иако је донет као привремен, био је на снази до 1941. године. Нагласимо да је Србија из Првог светског рата изашла као победник, али да је изгубила преко милион становника, међу којима велики број учитеља. У међуратном периоду, у Краљевини Срба, Хрвата и Словенаца, потоњој Краљевини Југославији, обнова земље била је национални приоритет. Двадесетих година XX века Србија се опоравља од последица рата, обнавља уништену економију, инфраструктуру, школске зграде које су биле порушене и девастиране, да би општа економска криза у тридесетим годинама, као и сложени односи унутар вишенационалне државе, успорили напредовање друштва, а тиме и просвете. Уочи Другог светског рата, укупан број деце који је похађао основну школу у Србији није прелазио 25% (видети у: Димић, 2004; Исић, 2005).

Наставним планом из 1933. године повећан је фонд наставних часова из елементарне математике: у прва два разреда предвиђено је пет наставних часова, у следећа два разреда по четири наставна часа недељно. Из структуре програма јасно се уочава методичка процедура за обраду садржаја. Пре свега, акценатовани су принципи очигледности и активности ученика, као и захтев за обнављањем градива из претходних разреда. Циљ наставе Рачуна с основима геометрије дефинисан је на следећи начин: „... да оспособи ученике за поуздано и лако решавање практичних рачунских задатака ... развија логичко мишљење, осећање тачности и правилности“ (*Наставни план и програм за основне школе у Краљевини Југославији*, 1933: 710). Аритметички садржај је разбијен на блокове бројева, а њихов распоред по разредима био је веома сличан данашњем: у првом разреду се обрађује блок бројева до 20, у другом до 100, у трећем до 1000, а у четвртном преко 1000. У првом разреду се инсистира искључиво на усменом рачунању и на „очигледном упознавању и рачунању са мерама

и новцем“, у другом разреду на писменом записивању онога што је усмено израчунато, у трећем разреду на усменом и писменом рачунању „разноврсних практичних задатака“, а у четвртом разреду доминира писмено рачунање. У односу на програм из 1899. године, изузев другачије структурираног садржаја који се односи на рачунске операције, програм из 1933. године није био проширен новим аритметичким темама, док су садржаји из геометрије били предвиђени за трећи и четврти разред и редуковани на елементарна знања – упознавање са геометријским облицима, телима и поступцима израчунавања површине и запремине.

Закључак

Уобличавање програма једног наставног предмета увек је резултат деловања различитих фактора – потреба друштва, степена развијености научне области која је у основи наставног предмета, педагошких идеја и концепција које доминирају у одређеном историјском периоду, оспособљености учитеља да реализују програм. Наша анализа је показала да су се програми из елементарне математике током XIX и почетком XX века мењали у правцу све већег степена логичког организовања и структурисања садржаја и уобличавања методичког поступка који произилази како из структуре програма, тако и циљева наставе математике у основној школи.

У начелу, можемо да издвојимо три периода у развоју програма елементарне математике у периоду који смо пратили. У првој фази, која обухвата прву половину XIX века, настава Рачунице имала је за циљ да оспособи за сналажење у свакодневном животу. Садржаји првих програма још увек нису били довољно издиференцирани: наставни програм из 1838. године садржи само један захтев везан за структурирање садржаја – да се прво уче бројеви, а затим рачунске операције; једини помак, у смислу веће разложености садржаја, имамо у програму из 1850. године – реч је о захтеву да ученици најпре треба да овладају сабирањем и одузимањем, а након тога множењем и дељењем. Када је реч о методичкој процедури развија се концепт тзв. очигледне наставе и „искуственог рачуна“, али у овом периоду још увек не можемо да говоримо о постојању систематски осмишљених методичких поступака.

Почетке следеће фазе развоја наставних програма елементарне математике, која обухвата другу половину XIX века, везујемо за методички концепт др. Милована Спасића. Спасићево схватање да настава Рачунице треба да помогне интелектуални развој детета доминантно је обележило даљи развој програма елементарне математике. Већа разрађеност садржаја омогућавала је развијање методичких поступака усмерених на разумевање рачунских поступака, за разлику од предходног периода у коме је у првом плану било овладавање рачуном

у циљу сналажења у свакодневним животним ситуацијама. Разрађеност програма из 1871, 1884, 1891. и 1899. године огледа се у чињеници да су у њима садржаји разложени на мање, ситематски организоване целине које јасно упућују на методичку процедуру коју треба применити. Тако, на пример, програм из 1891. године садржи захтев да се у почетним блоковима (до 20) сваки број појединачно обрађује. Поред тога, уочена је потреба за посебном методичком процедуром за увођење дељења – сугерише се да се у првом разреду не ради поступак писменог дељења, а да се касније прво уводе случајеви када су делиоци једноцифрени бројеви, затим „округли“ двоцифрени, а потом двоцифрени бројеви до 100, итд.

У међуратном периоду донет је само један наставни програм, 1933. године. У њему се експлицитно захтева да настава елементарне математике треба да буде заснована на очигледности и активности ученика, док начин разлагања садржаја подржава идеју о улози математике у укупном развоју детета.

Извори и литература

Необјављени извори

Архив Србије – Просветно одељење, Фонд министарства просвете и црквених дела.

Објављени извори

- „Наставни план за нижу основну школу“. У: Ј. Пецић (прир.), *Просвејћени зборник закона и наредаба* (стр. 647). Београд: Државна штампарија, 1887.
- „Наставни план за четвороразредну основну школу“. У: М. Марковић и З. Поповић (прир.), *Просвејћени зборник закона и наредаба* (стр. 875). Београд: Државна штампарија, 1895.
- „Наставни план и програм за основне школе у Краљевини Југославији“. *Просвејћени гласник* (Београд), 1933, год. XLIX, бр. 8, стр. 703–719.
- „Наставни план и програм за основне школе у Краљевини Србији“. *Просвејћени гласник* (Београд), 1899, год. XIX, бр. 11, стр. 613–624.
- „Наставни програм за нижу основну школу“. У: М. Марковић и З. Поповић (прир.), *Просвејћени зборник закона и наредаба* (стр. 803–820). Београд: Државна штампарија, 1895.
- „Наставни програм за нижу и вишу основну школу“. У: Ј. Пецић (прир.), *Просвејћени зборник закона и наредаба* (стр. 666–673). Београд: Државна штампарија, 1887.
- „Наставни програм за вишу основну школу“. У: М. Марковић и З. Поповић (прир.), *Просвејћени зборник закона и наредаба* (стр. 821–848). Београд: Државна штампарија, 1895.
- Распоред предмета за мушке и женске основне школе и упутство како ће се предавати. Београд: Државна штампарија, 1871.
- „Расположење предмета који се у основним училиштима предају по разредима и пологодјама“. У: *Сборник закона, уредаба и уредбени указа издани у Књажевсџиву Србији од почетка 1849. год. до конца 1850. године*, Београд, 1850, стр. 261–269.

- Содржаније Султанског Хатишерифа (август 1830). *Новине Србске*, 1834, год. I, стр. 3–4. (20. јануар 1834)
- Спасић, М. (1855). Педагогично-методично наставленије за учитеље основни школа. Београд: Државна штампарија.
- „Устроеније јавног училишног наставленија“. У: *Сборник закона, уредаба и уредбени указа издани у Књажевсџу Србији од априла 1840. год. до конца децембра 1844. год.* Београд, 1844, стр. 315–345.

Литература

- Вујисић Живковић, Н., Дејић, М. и Зељић, М. (2011). Развој методике основношколске наставе рачунице у Кнежевини (Краљевини) Србији у XIX веку. У: *Из историје наставе математике у основним и средњим школама у Србији: од часћи као израженије у математичком мишљењу, од часћи као хуманитарног за практичан живот* (стр. 41–96). Београд: Педагошки музеј.
- Вујисић Живковић, Н. (2012). Допринос педагошке историографије научном утемељењу актуелних реформи образовања. *Педагогика* (Београд), Vol. 67, бр. 1, стр. 140–149.
- Вујисић Живковић, Н., Зељић, М. и Антонијевић, Р. (2014). Почети методичке концептуализације и практичне реализације наставе рачунице у основним школама у Кнежевини Србији. *Настава и васпитање*, Vol. 63, бр. 1, стр. 45–57.
- Гавриловић, А. (1903). Народне школе у Србији 1803–1815. – Скице за историју ослобођене Србије. Београд: Издање Учитељског удружења.
- Димић, Љ. (2004). „Просвета у Краљевини Југославији“. У: *Образовање у Срба кроз векове* (стр. 211–232). Београд: САНУ.
- Исић, М. (2005). *Основно школство у Србији 1918–1941*, Књига I. Београд: Институт за новију историју Србије.
- Милићевић, Ђ. М. (1868). Школе у Србији од почетка овога века до краја школске 1867. године. Београд: Државна штампарија.
- Ћунковић, С. (1971). *Школство и просвета у Србији у XIX веку*. Београд: Педагошки музеј.

CHARACTER OF CHANGES IN MATHEMATICS CURRICULA IN SERBIAN PRIMARY SCHOOLS IN THE PERIOD 1804–1941

Summary. In this paper we have analyzed the character of changes in teaching plans and programs for subject mathematics in elementary schools in Serbia, in period from 1804 year to 1941 year. We focused on finding out 1) assumptions beneath the choice of particular content for subject mathematics and 2) principles that served as bases for structuring of mathematical contents. We dealt with rather long historical period, which allowed us to examine an influence of social, political and economic factors on one side, and the development of methodology of teaching of mathematics on the other side, on forming of teaching plans and programs for subject mathematics in elementary schools.

Our key finding is related to the change in aims of teaching of mathematic in elementary schools: choice and structuring the contents in teaching plans and programs in the first decades of 19th century reflected an idea that, as the teaching subject, mathematics in elementary school has primarily utility functions - to provide knowledge that is useful in pupils' everyday life; later on an

idea about so called formal function of teaching mathematics was developed – as the subject it should influence the development of pupils' intellectual functions; and at the end of the researched period mathematics has got an aim to support the whole development of child.

Key words: teaching plan and program, mathematics as teaching subject, elementary schools in Serbia 1804–1941.

Александра Михајловић

Владимир Ристић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

aleksandra.mihajlovic@gmail.com

ПОЈАМ БЕСКОНАЧНОСТИ – ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ И СХВАТАЊА УЧЕНИКА МЛАЂЕГ ШКОЛСКОГ УЗРАСТА

Апстракт. Концепт бесконачности несумњиво заузима једно од централних места у математици. За разлику од филозофије, теологије и других наука, могло би се рећи да је бесконачност у математици добила своје јасније оквире. Ипак, због саме природе, појам бесконачности представља једно од најосетљивијих места када је у питању методички приступ у настави математике. Деца већ на предшколском и млађем школском узрасту показују интересовање и имају интуитивну представу о појму бесконачности која се углавном формирала на основу њиховог претходног животног искуства. Наставни програми математике не баве се појмом бесконачности у довољној мери. Наиме, озбиљнијем изучавању овог појма приступа се тек у старијим разредима средње школе. Један од првих примера у почетној настави математике и први корак ка стицању представе о појму бесконачности јесте када се ученици у оквиру геометријских садржаја сусрећу са појмом праве (други разред), а касније и равни, и у оквиру садржаја о бројевима, када се срећу са појмом скупа природних бројева (четврти разред). Циљ нашег рада је давање кратког историјског осврта о развоју појма бесконачности и указивање на неке тешкоће са којима се сусрећу ученици приликом схватања и разумевања појма бесконачности.

Кључне речи: актуелна и потенцијална бесконачност, разумевање појма бесконачности, почетна настава математике

Историјски осврт

Појам бесконачности је кроз историју па до данашњих дана представљао велики изазов за многе научнике, који је неретко довођен у везу са многим парадоксима (М. Рашковић, Н. Икодиновић, 2010, С. Вујошевић, 1996). Није познато од када датирају прва размишљања везана за бесконачност, али је познато да су још Стари Индијци, почетком првог миленијума пре нове ере, разматрали бесконачност у математици (Д. Стројк, 1991).

Код Старих Грка, касније, већ имамо значајне резултате везане за бесконачност у математичким оквирима (В. Мрочек, Ф. Филиповић, 1981). Поред

бесконачности у смислу „неограничено великог“, Грци су наслућивали и бесконачност у смислу „бесконачно малог“. Због тога се први рачун са инфинитезималама, тј. са бесконачно малим величинама, приписује Грцима, иако је он био далеко од оног који су у 17. веку створили Лајбниц, Њутн и други (Ж. Мијајловић и др., 2014). Грчка реч за бесконачност била је „апејрон“ што би у буквалном преводу значило *неограничено, неодређено, недефинисано*. У основи је ова реч имала негативно, па чак и пезоративно значење; у математичким доказима метод свођења на противуречност најчешће је значио свођење на бесконачност. Овакав став лежи у одређеним филозофским ставовима тог доба, с обзиром да је филозофија имала највећи утицај на развој математике, али и у довођењу бесконачности у везу са неким парадоксима, пре свега са Зеноновим парадоксима. Најпопуларнији Зенонов парадокс је о Ахилу и корњачи, који ћемо укратко овде представити (М. Рашковић, Н. Икодиновић, 2010). Ахил се трка са корњачом која је на одстојању s_1 испред њега. Када Ахил стигне до места на коме се налазила корњача, она се помери за s_2 , када он опет стигне до тог новог места, она се помери за s_3 и тако даље. Иако је интуитивно јасно да ће бржи Ахил стићи корњачу, са којом се креће у истом смеру, он је и неће стићи јер се наведени бесконачан процес приближавања неће никад завршити. Овај и остали Зенонови парадокси оставили су велики утицај у грчкој математици.

Разлози одбацивања појма бесконачности могу се потражити у грчком схватању појма броја и мере које води порекло из Питагорине школе. Питагора (6. век пре нове ере) је сматрао да је бесконачност својствена хаосу, злу. Основа свега код Питагорејаца су природни бројеви, а то су и једини бројеви за њих. Сваке две величине, на пример дужи, могу се измерити неком трећом, а све скупа једном јединичном која је притом најмања могућа величина. Свакој дужи одговара један природан број, а слично се односи и на површине и запремине. Аристотел се оштро противио бесконачности, тврдио је да бесконачност математици није потребна. Међутим, његови радови, међу којима је и решење поменутог Зеноновог парадокса, подразумевају потенцијалну бесконачност, тј. посредну, скривену бесконачност. Анаксагора је у 5. веку пре нове ере тврдио да „ништа није довољно мало да не би постојало још мање“. Еуклид такође није веровао у бесконачност, али је прихватио концепт потенцијалне бесконачности. За њега је права била математички објекат који се може продужити онолико колико нам је неопходно.

Учење о „недељивим инфинитезималама“ налазимо у радовима Хенократеса, Платоновог ученика. Он је сматрао да се помоћу недељивих инфинитезимала могу објаснити Зенонови парадокси. Велики допринос математици тог времена дао је Демокрит из Абдере (5. и 4. век пре нове ере) који је оснивач атонизма и његов најистакнутији представник. Он је помоћу инфинитезимала

дошао до важног резултата: запремина призме и пирамиде једнаких основа и висина односе се као $3 : 1$. Такође је доказао да се обими кругова односе као њихови полупречници. Идентификовао је круг са полигоном са „великим“ бројем страна које су све по дужини „мале“. За разлику од атомиста који су дуж, кружну линију и слично, замишљали као дискретан низ атома, који су поређани као природни бројеви до одређеног природног броја, Аристотел је дуж замишљао другачије. За њега је свака дуж била дељива, другим речима, између сваке две тачке на дужи могла се убацити трећа тачка која је различита од те две тачке. То дељење дужи је потенцијално бесконачно, тј. иза сваке деобе може се направити следећа.

Демокритов ученик и следбеник Антифон, поред осталих грчких математичара тог доба, покушавао је да реши проблем квадратуре круга, тј. да за дати круг конструише, помоћу лењира и шестара, квадрат исте површине. Тврдио је да ако је у круг уписан многоугао, за њега, као и за сваку праволинијску фигуру, може да се конструише помоћу лењира и шестара квадрат исте површине и да то остаје тачно и за полигон са „великим“ бројем страна, па тиме и за круг. Иако оспорен, Антифон је био претеча „методе исцрпљивања“, као једне врсте инфинитезималне методе, коју је касније увео Еудокс из Книдоса (408–355. година пре нове ере), а користио и велики Архимед постављајући коначно многе проблеме тог времена на потпуно научне основе. Зато Архимеда можемо сматрати претечом диференцијалног и интегралног рачуна.

Средњовековни мислиоци су у великој мери прихватили темеље филозофије и науке Аристотела, а тиме наследили и страх од (актуелне) бесконачности. Развој математике је морао да чека ново време.

Као творац диференцијалног и интегралног рачуна Лајбниц је вратио инфинитезимале у математику. Лајбницовим путем кренули су многи математичари, најпре браћа Бернули и Де Лопитал. У својим радовима инфинитезимале је користио и генијални Ојлер. Међутим, упоредо са развојем анализе јављају се и контроверзе са природом Лајбницевог бесконачности, тј. инфинитезимала. Француски математичар Огист Коши је појам инфинитезимале елиминисао уводећи појам граничне вредности, иако, суштински, бесконачно мале величине имају велику улогу у његовом учењу. Посао који је започео Еудокс својом методом исцрпљивања, а нарочито развили Коши и Болцано, завршио је у потпуности у другој половини 19. века немачки математичар Вајерштрас. Он је развио данас познати ϵ - δ метод у коме нема више бесконачно малих величина. Избацивању инфинитезимала допринело је и заснивање реалних бројева од стране немачког математичара Ричарда Дедекинда.

Коначно, са Георгом Кантором (1845–1918) долази до праве револуције у поимању математичке бесконачности. Много векова након кабалистичког учења о више врста бесконачности, Кантор својом дијагоналном методом по-

казује да постоје различите бесконачности (С. Вујошевић, 1996). Основна карактеристика Канторове теорије је рад са бесконачностима, тј. рад са бесконачном хијерархијом бесконачних скупова. Дефинисао је две врсте бројева, ординале и кардинале. Ординали се могу посматрати као извесно уопштење природних бројева у бесконачности, док кардинали представљају ординале којима се мери „моћ“, у смислу броја елемената, неког скупа. Упркос проблемима који су се појавили у виду парадокса, захваљујући Канторовој теорији скупова настале су нове области математике као што су топологија, теорија мере и тако даље.

Проблем инфинитезимала у потпуности је решен шездесетих година прошлог века увођењем нестандартне анализе (Ж. Мијајловић и др., 2014) у којој овакве величине постоје као актуелне бесконачности.

Без обзира на развој науке у целини и велика математичка открића, бесконачност ће остати једна од највећих инспирација како математичара, тако и других научника. Бесконачност има богато значење чак и изван оквира математике, то је део наше културе, наших веровања о времену и универзуму.

Појам актуелне и потенцијалне бесконачности

Посматрајмо низ природних бројева $1, 2, 3, \dots$ и замислимо да се он наставља даље и даље. Не постоји граница у процесу бројања, односно нема крајње тачке. Такав процес који нема свој крај обично представља прве примере са којима се деца сусрећу када је у питању бесконачност. При томе, можемо замислити процедуру којом бисмо добили сваки нови број, али ово не можемо у потпуности реализовати у пракси. Овакви бескрајни, неограничени процеси обично се називају потенцијална бесконачност (Pehkonen et al., 2006, Pehkonen, Hannula, 2006). У математици су неограничени процеси веома чести (нпр., правилан многоугао коме се број страница повећава све више и више унутар неког круга, процес пребројавања децимала броја π , итд.). С друге стране, имамо случај када је бесконачност концептуализована као реализован, завршен процес, односно целина, објекат, и тада говоримо о тзв. актуелној бесконачности. Скуп природних бројева је пример актуелне бесконачности, зато што захтева од нас да концептуализујемо процес потенцијалне бесконачности, односно да посматрамо бескрајни процес пребројавања природних бројева као да је завршен.

Актуелна бесконачност се описује и као бесконачност која је статична и коначна (Gole, 2013, стр. 10), тако да се може замислити као математички објекат. Код потенцијалне бесконачности лако можемо да у било којој фази учинимо наредни корак, без обзира на дужину самог процеса. Актуелна бесконачност нема основу у реалном животу – на интуитивном нивоу не може се зами-

слити нешто што би одговарало појму актуелне бесконачности. Појам актуелне бесконачности приписује коначни ентитет, целину бесконачном процесу. Можемо рећи да актуелна бесконачност дефинише стање у бесконачности, док потенцијална бесконачност дефинише процес креирања бесконачних скупова. По Фишбајну (Fischbeinu, 2001) потенцијална бесконачност није постојећа, дата бесконачност. Не можемо замислити целокупан скуп природних бројева, али можемо замислити идеју да се после сваког природног броја, без обзира колико велики он био, налази други природан број.

Интересантно је да је Аристотел у своју дефиницију бесконачности укључио временску димензију. Он је дефинисао актуелну бесконачност као ону чија бесконачност постоји у неком одређеном временском тренутку, док је потенцијална бесконачност она чија се бесконачност простире кроз време (Moore, 1995 према Kolar, Čadež, 2012). Аристотел је сматрао да све примедбе које се дају бесконачности представљају заправо примедбе актуелној бесконачности. Актуелну бесконачност је сматрао несхватљивом, јер је немогуће замислити је као комплетну, завршену целину, као укупност, пошто нико не може да размишља о колекцији, о скупу као комплетном без осврта на сваки његов елемент, физички или ментално. Болцано (1781–1848) је сматрао да се појам скупа може формирати и на друге начине, описивањем његових елемената, без креирања представе о сваком елементу, па је бесконачност прихватио као тоталитарност.

Своје основе актуелна бесконачност је почела да добија и у геометрији. Геометријски корени актуелне бесконачности потичу из петнаестог века и повезани су са развојем нових форми у уметности, нарочито са перспективом у цртању. Ипак, Кантор је био тај који је поставио темеље прихватању актуелне бесконачности и дао је њену математичку дефиницију. Кантор је „везао“ концепт бесконачности за процес „1-1“ кореспонденције (а не за процес пребројавања). Доказао је, такође, да постоји више него једна врста бесконачности.

Канторова теорија је увела формалистички приступ разумевању појама скупа и бесконачности, који је за лаика потпуно несхватљив, обзиром да је противуречан природној логици: Кантор замењује пребројавање, које је најприроднији метод за упоређивање скупова по бројности још код деце, са формалним процесом „1-1“ кореспонденције (Kolar, Čadež, 2012). Чак и међу савременим истраживачима потенцијалне и актуелне бесконачности, постоји тенденција да се актуелна бесконачност интерпретира кроз процесе који су ближи нашој интуицији од „1-1“ кореспонденције. Потенцијална бесконачност се, стога, концептуализује као итеративни процес који се може понављати без престанка, и завршетак овог процеса је одвојен од самог чина. Природне бројеве можемо ређати, и знамо да не постоји граница за овај процес бројања. Замислимо сада да овај процес такође садржи свој крај, односно финално ста-

ње, „објекат“ који је већи од свих осталих чланова низа и представља се у математици симболом ∞ . На овај начин долазимо до актуелне бесконачности. Актуелна бесконачност се не може концептуализовати кроз потенцијалну бесконачност сама по себи, али захтева концептуализацију завршног стадијума процеса (Hannula et al., 2006).

Тешкоће у схватању појма бесконачности

Ученици се не упознају формално са појмом бесконачности све до средње школе. Први пут се срећу са бесконачношћу када уче скуп природних бројева (четврти разред), као скуп који није ограничен, у коме не постоји највећи природан број, и који има бесконачно много бројева. Када су у питању геометријски садржаји ученици први пут имају додир са бесконачношћу када се упознају са правом у другом разреду (права линије без почетка и краја, која се може бесконачно мисаоно продужити преко оба краја), а затим и са појмом равни (као равне површи која се мисаоно проширује у неограничену површ).

Једна од главних потешкоћа за децу када је у питању разумевање бесконачности је заправо њена апстрактна природа, односно појам бесконачности је тешко довести у везу са искуством из свакодневног живота и стога зависи од наше способности да извршимо менталну визуелизацију. Према Фишбајну и другима (Fischbein et al., 1979 према Kolar, Čadež, 2012), главни извор тешкоћа који прати појам бесконачности јесте фундаментална контрадикција између овог концепта и наших интелектуалних схема, које су природно прилагођене коначним реалностима. Монаган (Monaghan, 2001) истиче чињеницу да је реални свет очигледно коначан и тамо стога нема реалних референци за дискусију о бесконачном. Проблем у разумевању појма бесконачности долази такође из чињенице да је математички свет безвремени свет у коме се бесконачне калкулације могу извршавати независно од времена. Изван света чисте математике, по Монагану, израз као „тежи бесконачном“ био би бесмислен за дете јер не постоји процес који може бесконачно да траје.

Једну од првих студија која се бавила дечијим разумевањем спровели су Пијаже и Инхелдер 1956. године (Kolar, Čadež, 2012). Њихова студија укључивала је геометријске проблеме као нпр. како нацртати најмањи и највећи могући квадрат на листу папира, или шта би се десило када би се процес дељења датих фигура (нпр. на два дела) наставио мисаоно, какав би био облик последњег елемента добијеног оваквом деобом. Пијаже и Инхелдер су закључили да на нивоу конкретних операција, дететова способност да визуелизује дељење геометријске фигуре на мање делове је ограничена коначним бројем итерација. Само у етапи формалног логичког мишљења, на узрасту око 11–12 година, дете је способно да схвати поделу као бесконачан процес. Касније је Табак

(1975, исто) дошао до резултата да деца узраста 10–12 година још увек не разумеју концепт бесконачности. Фишбајн и други (1979, исто) истраживали су развој интуиције о бесконачности. Утврдили су да је интуитивно схватање о бесконачности релативно стабилно од 12. године па надаље, али да је проценат ученика са коначним интерпретацијама бесконачности већи од оних са бесконачним интерпретацијама. Ханула и други (Hannula et al., 2006) показали су да већина ученика петог разреда (11–12 година) немају развијен концепт о бесконачности, а слична је ситуација и када су у питању ученици седмог разреда (13–14 година). Већина ученика се фокусира на бесконачност као процес. Виђење бесконачности као „објекта“ било је присутно само код мањег броја ученика. До сличних резултата дошао је и Монаган (Monaghan, 2001). Монаган је спровео истраживање са 190 ученика старости од 16 до 18 година. Утврдио је да већина ученика бесконачност види као нешто што се не завршава, односно као „процес“. Други поглед на бесконачност – као „објекта“ (виђење бесконачности као веома великог броја или схватање као колекције која садржи више од било ког коначног броја елемената) приметио је код малог броја ученика. Романо (2011) је извео истраживање са студентима педагошког факултета и утврдио је да студенти немају истинску представу о разлици између актуелне и потенцијалне бесконачности. Наиме, Романо сматра да студенти користе термине бесконачно и бескрајно без прављења стварне разлике између та два појма.

Колар и Чадеж (2012) наводе да се као још једна тешкоћа намеће чињеница да ученици након што бесконачност схвате као нешто што се не завршава, нпр. процес бројања који се не завршава, нема краја, нису способни да је сагледају као целину, тј. да скуп природних бројева разумеју као скуп свих бројева које добијемо када примењујемо исти процес бесконачно. Аутори указују како се у многим студијама наглашава да тенденција интерпретирања проблема потенцијалном, а не актуелном бесконачношћу остаје присутна и код одраслих, па чак и код самих наставника (Kolar, Čadež, 2012, Kattou et al., 2009).

По Роману (2011) ученичко разумевање појма бесконачности одређено је њиховим животним искуствима, на основу којих се затим развијају интуитивни модели бесконачности у њиховим умовима. Актуелна бесконачност на изванредан начин противречи интуитивним схватањима ученика. Наставни садржаји који захтевају разумевање актуелне бесконачности почињу да се обрађују у старијим разредима средње школе. Већина ученика, с обзиром да у основној школи и у млађим разредима средње школе није имала прилику да се упозна са појмом бесконачности и припреми за изучавање ових садржаја, креће од својих интуитивних идеја и представа о бесконачности, и отуда има потешкоћа да дубље разуме ове појмове. Историјски развој схватања појма бесконачности нам заправо указује на проблеме са којима се суочавају и ученици

приликом развоја сопственог разумевања овог појма. Проблеми са којима су се суочавали мислиоци и математичари представљају основу на којој се може изградити методички пут формирања појма бесконачности. Све ово указује да би требало већу пажњу посветити схватању и развијању појма бесконачности у млађем узрасту. Наравно, приступ мора бити прилагођен, а сам садржај методички обликован и представљен на начин приступачан ученицима. Ипак, без обзира на то, учитељи и наставници морају бити оспособљени да саопштавају садржаје који су базирани на научном тумачењу.

Будући да је већина студија, које су се бавиле испитивањем схватања и разумевања о бесконачности, као субјекте имала ученике старијих разреда основне школе, средње школе и студенте (Monaghan, 2001, Hannula et al., 2006, Kattou et al., 2009, Romano, 2011), сматрамо да би требало више пажње посветити истраживањима на узрасту млађих разреда основне школе. Стварање добре, солидне основе основни је предуслов за касније дубље разумевање појмова везаних за бесконачност.

Закључак

Бесконачност има богато значење чак и изван оквира математике. То је део наше културе, наших веровања о времену и универзуму. Појам бесконачности несумњиво заузима једно од централних места у математици. За разлику од филозофије, теологије и других наука, бесконачност је у математици добила своје јасније оквире. Ипак, без обзира на развој науке у целини, упркос великим математичким открићима, бесконачност ће и даље остати једна од највећих инспирација математичара и других научника. Појам бесконачности представља једно од најосетљивијих места методичког приступа у настави математике. Први примери у почетној настави математике и први корак ка стицању представе о појму бесконачности јесте када се ученици у оквиру геометријских садржаја сусрећу са појмом праве (други разред), а касније и равни, и у оквиру садржаја о бројевима, када се срећу са појмом скупа природних бројева (четврти разред). Озбиљнијем изучавању овог појма приступа се тек у старијим разредима средње школе што доприноси само формалном разумевању концепта. Историјски развој схватања појма бесконачности нам указује на проблеме са којима се суочавају и ученици приликом развоја сопственог разумевања овог појма. Проблеми са којима су се суочавали мислиоци и математичари представљају основу на којој се може изградити методички пут формирања појма бесконачности. Сматрамо да би, с обзиром да је већина студија, које су се бавиле испитивањем схватања и разумевања о бесконачности, као субјекте имала ученике старијих разреда основне школе, средње школе и студенте, требало више пажње посветити истраживањима на узрасту млађих раз-

реда основне школе. Само стварање једне добре, солидне основе представља основни предуслов каснијег дубљег разумевања појмова везаних за бесконачност.

Литература

- Вујошевић, С. (1996). Математичка логика, ЦИД, Подгорица.
- Gole I. (2013). Razumevanje neskončnosti v osnovni šoli (magistrsko delo). Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, http://pefprints.pef.unilj.si/1963/1/Irena_Gole_Razumevanje_neskončnosti_v_OS_magistrsko_delo_2013.pdf
- Kattou, M., Thanasia, M., Kontoyianni, K., Christou, C., Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object? Proceedings of CERME 6, 1771–1780. Lyon, France.
- Kolar, V. M., Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concepts of infinity. Educational studies in Mathematics, Vol. 80, 389–412.
- Ђеђић, Ђ., Ђеђић, Ђ., Ђеђић, Ђ., Ђеђић, Ђ., Ђеђић, Ђ. (2014). Нестандардна анализа, Математички факултет Универзитета у Београду, Београд.
- Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. Educational Studies in Mathematics, Vol. 48, No. 2–3, 239–257.
- Мрочек, В., Филиповић, Ф. (1981). Педагогија математике, Чачански глас, Чачак.
- Pehkonen, E., Hannula, M. S., Maijala, H., Soro, R (2006). Infinity of numbers: how students understand it. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 345–352. Prague: PME.
- Рашковић, М., Икодиновић, Н. (2010). Приче о великим и малим бројевима, Завод за уџбенике, Београд.
- Романо, Д. А. (2011). Потешкоће које будући учитељи имају при увођењу појму дужи. Retrieved from http://www.academia.edu/1509582/D.A._Romano._Pote%C5%A1ko%C4%87e_koje_budu%C4%87i_u%C4%8Ditelji_imaju_pri_uvo%C4%91enju_pojmu_du%C5%BEi
- Стројк, Д. (1991). *Крајак ирејед историје математике*, Завод за уџбеникеби наставна средства, Београд.
- Fischbein, E. (2001). Tacit models of infinity. Educational Studies in Mathematics, Vol. 48, No. 2–3, 309–329.
- Hannula, S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. Teaching Mathematics and Computer Science, Vol. 4, No. 2, 317–337.
- Pehkonen, E., Hannula, M. S. (2006). Infinity of numbers: a complex concept to be learnt? In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.), Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, 152–154. Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

CONCEPT OF INFINITY – HISTORICAL VIEW AND YOUNG LEARNERS' UNDERSTANDING OF THE CONCEPT

Summary. The concept of infinity inevitably occupies one of the central roles in the field of mathematics. Unlike its understanding in philosophy, theology and other sciences, it could be said that in mathematics the concept of infinity has a much clearer framework. However, because of its nature, the concept of infinity is one of the most sensitive places when it comes to a methodical approach to teaching mathematics. Children already in pre-school and primary school show some interest and have an intuitive idea of the concept of infinity, which is mainly formed on the basis of their prior life experience. Unfortunately, the mathematics curriculum does not deal with the concept of infinity sufficiently. The serious study of the concept is performed as late as in senior secondary school. One of the first examples in initial teaching of mathematics and also the first step in getting sense of the concept of infinity is when the students encounter the concept of the line (second grade), then later the concept of the plane, and when they learn about the set of natural numbers (fourth grade). The aim of this study was to give brief historical overview of the development of the concept of infinity. Furthermore, we wanted to investigate and point out some difficulties that children encounter in their development of understanding of infinity.

Key words: actual and potential infinity, understanding of concept of infinity, primary mathematics teaching

5

ПЕДАГОШКО–ПСИХОЛОШКИ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА

Емина Копас-Вукашиновић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу, Јагодина

emina.kopas@pefja.kg.ac.rs

ЗНАЧАЈ ИГРЕ ЗА РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКИХ ПОЈМОВА КОД ДЕЦЕ У ПРЕДШКОЛСКОЈ УСТАНОВИ И ШКОЛИ¹

Апстракт. Развој дечјих способности је одређен квалитетом игре. У игри оно слободно делује, истражује, повезује, комбинује и учи. Оваквом „експлозијом активности“ (Wallon: према Каменов, 1989) дете проверава и унапређује своје функције које му помажу у сазревању. Поменуто теоријско одређење дечје игре значајно је за планирање и организацију образовних активности у предшколској установи, а касније и у школи. Циљ истраживања је био да се анализом програмских садржаја у предшколској установи и школи утврди да ли и на који начин васпитачи и учитељи кроз игру могу да подстичу усвајање математичких појмова код деце предшколског и школског узраста. Примењена је дескриптивна метода и поступак анализе садржаја *Припремној предшколској програми* и Наставног програма за Математику за први разред основне школе. Резултати истраживања упућују на потребу даљег развоја и методичког повезивања ових програма. То подразумева јасно одређивање дечје игре као: а) потребе деце у млађим разредима основне школе; б) активности која доприноси сазревању мисаоних функција; в) активности значајне за развој математичких појмова код деце (ученика).

Кључне речи: организација образовних активности, садржај и структура програма, експлорација у игри, континуитет у систему предшколског и школског васпитања и образовања.

Увод

Игра јесте основна активност деце предшколског узраста, али је неопходно сагледати је и као потребу ученика у млађим разредима основне школе, односно као могућност за реализацију наставних садржаја. Када је реч о усвајању математичких појмова и почетном математичком образовању деце најстаријег предшколског узраста, актуелним предшколским програмом су кон-

¹ Чланак представља резултат рада на пројектима *Од постојећег иницијативе, сарадње, стваралаштва у образовању до нових улога и идентитета у друштву* (бр. 179034) и *Унапређивање квалитета и доскопљивости образовања у процесима модернизације Србије* (бр. 47008), које финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2011–2014).

кретизовани задаци васпитача, применом различитих врста и варијанти дечјих игара. Међутим, имајући у виду значај јединственог деловања предшколске установе и школе, намеће се потреба да се испитају могућности примене дечјих игара у настави математике, пре свега у првом разреду основне школе, који представља прелаз детета из предшколске установе у свет школских задатака и обавеза. Овим проблемом ћемо се бавити у контексту циљева, задатака, садржаја и активности, утврђених *Припремним предшколским програмом и Наставним програмом образовања и васпитања за први и други разред основне школе*. Покушаћемо да утврдимо колико су ови елементи структуре програма комплементарни, полазећи од чињенице да управо та комплементарност ствара услове у којима је садржаје наставе математике могуће једним делом реализовати кроз игру ученика првог разреда основне школе.

Теоријске основе истраживања

Чињеница је да је игра потреба деце предшколског узраста и њихова основна активност у предшколској установи. Кроз игру деца уче, развијају своје способности и навике, припремају се за обавезе које их очекују у основној школи. Игра подстиче дечји развој у свим аспектима и представља значајан услов за њихов прелазак са стадијума представног на стадијум појмовног мишљења. Никако се не може занемарити чињеница коју је утврдио Ж. Пијаже (Piaget) – да је сваки стадијум дечјег развоја истовремено резултат његових постигнућа у претходном стадијуму и претпоставка за припрему наредног стадијума. Редослед ових стадијума је увек исти, али је брзина којом дете улази у њих различита код сваког појединца, у односу на његове потенцијале, могућности и интересовања (Piaget, према: Хорват, 1986).

Когнитивне теорије дечје игре тумаче игру у функцији развоја когнитивних способности и као процес у којем се код деце развија систем симбола, којима представљамо стварност (Millar, 1972). Данас се у савременој теорији игра тумачи као когнитивни процес који подразумева способност организације активности, дивергентног мишљења, симболизације и фантазије (Russ, 2004). Дечја игра представља сазнајну активност и она има емпиријски, експлоративни карактер, који подразумева истраживање, проналажење, измишљање и повезивање сопствених активности и могућности. Ово су само неки разлози који потврђују констатацију да игра има едукативан карактер и да представља основу дечјег развоја на предшколском узрасту, али она такође остаје и потреба деце у периоду када прелази из предшколске установе у основну школу (Eirop, 2003; Каменов, 1999; Копас-Вукашиновић, 2007).

Да би дете разумело своју околину (природну и друштвену), оно има потребу да буде у интеракцији са њом, при чему истражује, трага за новим сазна-

њима и проверава их (Hofmann & Weikart, 1995; Шефер, 2012). У таквим ситуацијама дете не размишља о циљу активности него о сопственим искуствима и сазнањима, која су резултат његовог учења. Стечена нова сазнања и искуства дете постепено повезује са оним која већ поседује и тако ствара систем сазнања и искустава, која касније користи у новим ситуацијама, односно активностима (Medouz i Kešdan, 2000).

Стога се не сме занемарити чињеница да преласком деце у основну школу игра представља могућност за реализацију једног дела наставних садржаја. У овој констатацији препознајемо и услов за остваривања континуитета у систему предшколског и школског васпитања и образовања (Копас-Вукашиновић, 2006; Станисављевић-Петровић, 2011).

Међутим, намеће се питање да ли је овај континуитет формалног или реалног карактера, што ћемо покушати да испитамо и представимо на основу циљева, задатака, садржаја и активности кроз које деца најстаријег предшколског и најмлађег школског узраста усвајају основне математичке појмове и стичу математичко образовање.

Значај овог теоријског истраживања сагледавамо у могућностима да се конкретизује улога игре у образовним активностима деце предшколског и најранијег школског узраста и да се васпитачима и учитељима укаже на основне елементе методичког приступа у реализацији образовних активности кроз игру.

Метод

Циљ истраживања је био да се анализом програмских садржаја у предшколској установи и школи утврди да ли и на који начин васпитачи и учитељи кроз игру подстичу усвајање математичких појмова код деце предшколског и школског узраста.

Из овако постављеног циља су произашли следећи задаци истраживања.

- Утврдити *програмска полазишња* за реализацију образовних садржаја којима деца најстаријег предшколског узраста и ученици првог разреда основне школе стичу почетно математичко образовање.
- Представити *програмске садржаје* који се препоручују васпитачима и налажу учитељима за рад са децом која треба да усвоје почетне математичке појмове.
- Утврдити на који начин се у *Припремном предшколском програму* и *Наставном програму за први разред основне школе* конкретизују *методичка упућивања* за рад са децом која треба да усвоје основне математичке појмове и колико се у тим упутствима препознају могућности организације образовних активности кроз игру.

Резултати истраживања и дискусија

Програмска полазишта, садржаји и методичка упутства на основу којих деца најстаријег предшколског узраста стичу почетно математичко образовање

У *Пријремном предшколском програму*, који представља део *Општих основа предшколског програма* (2006), у оба програмска модела се наглашава значај игре за учење и развој предшколског детета. Моделом А се прецизирају схватања о игри и учењу. Издавајмо нека од њих: а) да је игра водећа активност детета у предшколској установи и да она представља посебан облик учења; б) дете у игри на спонтан и себи својствен начин стиче знања и прерађује искуства; в) дете је у игри активно и самоиницијативно; г) дете у игри развија своје креативне способности (*Правилник*, 2006). У оквиру дела о сазнајном развоју детета почетно математичко образовање представља посебан сегмент. Јасно је истакнуто да ово образовање има за циљ подстицање развоја логичко-математичког мишљења, које детету пружа могућност да спозна своје окружење, развија различите начине сопственог деловања у том окружењу, да открива сопствене потенцијале и потребе, да развија своју самосталност и комуникационе способности у групи. Посебан значај почетног математичког образовања у предшколској установи придаје се оспособљавању деце да у свакодневним ситуацијама буду спремна за решавање проблема на које наилазе. *Погледање деце на интелектуалну активност, развој и унапређивање сазнајних способности* примарни су исходи у процесу почетног математичког образовања у предшколској установи, а стечена знања представљају исходе секундарног карактера.

Према МОДЕЛУ А *Пријремног предшколског програма*, у сегменту сазнајног развоја, а у оквиру циљева, задатака, садржаја и активности који се односе на *почетно математичко образовање*, ово образовање има за циљ подстицање развоја логичко-математичког мишљења. Истовремено, кроз почетно математичко образовање се код деце развијају когнитивне способности, васпитач им помаже да лакше спознају свет који их окружује и да постану спремни да на различите начине делују у свом окружењу. Дакле, првенствено кроз игру деца усвајају разноврсна искуства и сређују их у кохерентан систем. Осим што имају могућност да упознају и разумеју своје окружење, ово образовање деци предшколског узраста помаже да откривају и упознају своје потенцијале, мисли и потребе, да развијају интелектуалну самосталност, а истовремено да остварују добру комуникацију са осталим члановима групе (заједнице) (*Правилник*, 2006).

Табела 1. Области, садржаји и активности у подручју почетног математичког образовања према Моделу А Припремног предшколског програма

Ред. број	Почетно математичко образовање	
	Области	Садржаји и активности
1.	Опажање и схватање простора и просторних односа	Просторне релације, практична просторна оријентација, уочавање распореда предмета у простору и др.
2.	Логичке операције на конкретним предметима и појавама	Формирање појма скупа нпр. груписање предмета, утврђивање сличности и разлика међу њима; изграђивање појма броја, нпр. бројање предмета, формирање појма бројног низа, придруживање и др.
3.	Развијање појмова геометријских облика у равни и простору	Геометријске фигуре у равни, њихово предметно и сликовно представљање, описивање изгледа појединих облика, проналажење предмета у околини који су слични геометријским облицима, увиђање узрочности и др.
4.	Мере и мерење	Опажање и практично мерење дужине, запремине, тежине, висине, процењивање величина у односу на различите неструктуриране материјале и др.
5.	Временски односи	Доба дана, дани у недељи, годишња доба, праћење времена и природних појава у току дана и годишњих доба и др.

(Правилник, 2006)

Јасно је да су математичка сазнања интегрисана са осталим областима дечијег сазнавања и да обухватају различите утицаје, поступке, акције и интеракције деце и одраслих, који доприносе развоју логичко-математичких знања и умења, изграђивању логике и развоју способности за решавање практичних проблема у различитим животним ситуацијама. У таквим ситуацијама дечија интелектуална активност и њихове способности одређују процес сазнавања, а стечена математичка знања подразумевају исходе поменутог процеса. У различитим истраживачко-сазнајним, стваралачко-изражајним, друштвеним и другим активностима, деца предшколског узраста: а) посматрају, испробавају, експериментишу, манипулишу и уче откривањем; б) опажају, препознају, разликују својства предмета; в) прикупљају информације и закључују; г) стечена логичко-математичка сазнања уређују и постављају у различите односе; д) у активностима комбинују и мењају редослед елемената, повезују симболе и значења, стварају нове моделе и шеме; ђ) уочавају сличности и разлике међу елементима и предметима, издвајају битно од небитног, уочавају односе и последице тих односа, уопштавају, симболизују, придружују и класификују (Правилник, 2006). Поменуте активности деце могуће је сагледати и као задатке поменутог Модела А Припремног предшколског програма, у подручју почетног математичког образовања.

Из овако одређених задатака аутори овог модела препоручују образовне садржаје кроз које деца најстаријег предшколског узраста стичу и изграђују почетне математичке појмове. Ови садржаји су распоређени по областима (Табела 1).

Према МОДЕЛУ Б *Пријремної йредшколскої йроїрама* наглашено је да је неопходно да сва деца учествују у планираним активностима, да кроз игру прикупљају искуства и развијају своје способности према индивидуалним потенцијалима. У оквиру конкретизације садржаја и активности којима се деца припремају за школу, утврђено је неколико области. Једна од њих је *развој математичких појмова*, која подразумева следеће садржаје: положаји у простору, кретање кроз простор, поређење и процењивање, области, линије и тачке, облици, образовање скупова, бројност скупова и временско сазнање.

За сваки од наведених појмова у овом програму конкретизовани су циљеви, затим представљени садржаји и активности. У Табели 2 представљамо примере ових циљева, садржаја и активности.

Табела 2. Циљеви, садржаји и активности у области развоја математичких појмова према МОДЕЛУ Б Припремног предшколског програма

Ред. број	Развој математичких појмова		
	Појмови	Циљеви	Садржаји и активности
1.	Положаји	Развијање способности сагледавања простора у односу на сопствено тело, положаји делова тела једних у односу на друге, уочавање разних положаја (лево, десно, горе, доле, испод, изнад), односи предмета у простору, уочавање релација, уочавање целине и делова и др.	Истраживачке активности у којима деца спознају различите облике кретања и промене положаја предмета при кретању, уочавање положаја тела и др.
2.	Кретање кроз простор	Развијање способности уочавања праваца кретања кроз простор, предвиђања куда ће пасти бачени предмет, кретање предмета или модела у замишљеним ситуацијама и др.	Кретање: ка, иза, преко, кроз, око, поред, испод, изнад, између, упоредо, укрстити се.
3.	Поређење и процењивање	Развијање способности именовања појединих величина поређењем два предмета (већи, мањи, једнаки), упоређивање величина и њихова серијација, усвајање основних појмова о мерењу вредности и др.	Поређење по димензијама (велико, мало, веће, мање, више, ниже, дебље, тање, шире, уже, дуже, краће, најдуже и најкраће), мерење условним мерама (корак, педаљ) и др.
4.	Области, линије и тачке	Развијање способности обележавања простора линијама, дељење и трансформисање простора, еле-	Дељење простора линијама, отворени и затворени простори, праве и криве линије,

		ментарна оријентација у простору и др.	пресек линија.
5.	Облици	Способност уочавања одређених предмета у околини (различитих геометријских облика), разликовање геометријских облика, уочавање геометријских фигура.	Уочавање облика (фигура) на стварима, цртање и моделовање геометријских облика, дводимензионалних и тродимензионалних и др.
6.	Образовање скупова	Развијање способности уочавања скупова, њиховог формирања и утврђивања припадности појединих елемената у скупу, елементарни појмови о пресеку скупова, унији скупова, подскуповима и др.	Уопштавање и класификовање према одређеним критеријумима, проверавање једнакобројности скупова придруживањем и др.
7.	Бројање и скупови	Развијање способности бројања, познавање неконвенционалних и конвенционалних ознака за једноцифрене бројеве, успостављања кореспонденције „један према један“, проверавања једнаке бројности скупова, поређења бројности и др.	Бројање унапред и уназад, пребројавање, додавање елемената, коришћење симбола за једнако и неједнако, сабирање и одузимање у оквиру прве десетице и др.
8.	Временско сазнање	Развијање способности да се уочи брзина протицања времена, сналажења у времену, уочавања и реконструисања временског следа догађаја и др.	Запажање трајања времена и формирање појмова „више времена од...“, „мање времена од...“, „исто толико времена“, „истовремено“, указивање на временски след догађаја, праћење временских збивања, оријентација у времену и др.

(Правилник, 2006).

На основу приказаних области, појмова, циљева, садржаја и активности, које се односе на почетно математичко образовање деце најстаријег предшколског узраста (према Моделу А) и на развој математичких појмова те деце (према Моделу Б), можемо констатовати да су у *Припремном предшколском програму* јасно одређени задаци васпитача. Они треба да у подстицајној средини, кроз игру, помогну деци да се добро припреме за обавезе које их очекују у настави математике у првом разреду основне школе. Када је реч о подршци *сазнајном развоју деце*, за оба модела су јасно одређени задаци васпитача да подстиче развој интелектуалних функција и операција, да створи услове у којима ће дете да истражује, уочава, анализира и проналази начине решавања проблема. Програмска полазишта упућују васпитача на могуће правце деловања на дете (од утврђених општих циљева, понуђених садржаја, активности и очекиваних исхода). Ова полазишта и програмски садржаји су јасно представ-

љени у *Пријемном предшколском програму* и добро систематизовани. Када знамо да је игра основна активност предшколског детета јасно је да почетно математичко образовање и развој математичких појмова код деце најстаријег предшколског узраста тече кроз различите врсте и варијанте игара. Методичка упутства за реализацију Модела Б *Опшћих основа предшколског програма* указују на васпитно-образовне вредности дечје игре, захтеве у односу на организацију игара, могућности њеног култивисања, као и њен значај за дечји развој у свим аспектима. Када је реч о припреми деце за наставу математике у основној школи, за нас је посебно значајна игра у контексту развоја интелектуалних процеса. Истакнут је значај дечјег сазнавања кроз игру, које на предшколском узрасту има своје специфичности. Пре свега, на овом узрасту деца усвајају знања спонтано, узгредно. Њихова сазнајна активност је условљена практичним мотивима, увек има емпиријски карактер и подразумева постепени прелазак са практичног на појмовно мишљење (Каменов, 1997).

У овом тренутку се намеће питање колико оваква програмска полазишта одговарају захтевима програма којима се ученици првог разреда основне школе припремају за овладавање наставним садржајима математике. У исто време је значајно размотрити могућности које школски програм нуди у реализацији наставних садржаја, посебно у односу на организацију образовних активности кроз игру.

Програмска полазишта, садржаји и методичка упутства на основу којих ученици првог разреда основне школе стичу почетно математичко образовање

Да бисмо одговорили на постављене задатке истраживања, у односу на програмска полазишта за реализацију образовних садржаја у настави математике у првом разреду основне школе, програмске садржаје који се реализују са ученицима, као и у односу на методичка упутства за реализацију ове наставе, урадили смо анализу садржаја Наставног програма образовања и васпитања за први разред основног образовања и васпитања².

Као и у представљеном предшколском програму, у овом наставном програму су јасно одређени општи циљеви и задаци наставе математике. Они су утврђени јединствено за ученике првог и другог разреда основне школе, док су оперативни задаци разрађени посебно за ученике првог, а затим другог разреда.

Циљ наставе математике за ученике првог и другог разреда основне школе је конкретизован кроз следеће захтеве:

² (http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html)

- да ученици усвоје *елементарна математичка знања* која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву;
- да се ученици оспособе за примену усвојених математичких знања;
- да стекну знања и способности за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање;
- да се код ученика подстакне развој менталних способности и формирање научног погледа на свет;
- да се кроз наставу математике помогне *свесћрани развој укупних пошеницијала* ученика.

Из овако конкретизованог циља произлазе многобројни општи *задачи наставе математике* за ученике првог и другог разреда основне школе. Издајемо неколико задатака садржајно надовезаних на задатке који се реализују са децом најстаријег предшколског узраста:

- стицање *знања* неопходних за разумевање односа и законитости у појавама у природи, друштву и свакодневном животу;
- стицање основне *математичке културе* потребне за откривање значаја математике у човековој делатности;
- развијање ученикове *способости посмирања, ојажања*, логичког, критичког, стваралачког и апстрактног *мишљења*;
- развијање способности јасног и прецизног изражавања математичким језиком;
- *усвајање основних чињеница* о скуповима, релацијама и пресликавањима;
- *овладавање основним операцијама* са природним, целим, рационалним и реалним бројевима, као и разумевање основних закона тих операција;
- спознаја најважнијих геометријских фигура и њихових узајамних односа;
- развијање *способости прецизно мерења, цртања* и геометријског конструисања.³

Оперативни задачи у настави математике за ученике првог разреда основне школе подразумевају да ученици треба да:

- препознају, разликују и исправно именују облике предмета, површи и линија;
- посматрањем и цртањем упознају тачку и дуж и стекну умешност у руковању лењиром;
- уочавају односе између предмета по облику, боји и величини;

³ (http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html)

- одређују положај предмета према себи и предмета према предмету;
- уочавају разне примере скупова, припадање елемената скупу и користе речи: „скуп“ и „елемент“, усвајајући значење везивањем за примере из природног окружења детета;
- науче да броје, читају, записују и упоређују бројеве до 100, као и да исправно употребљавају знаке једнакости и неједнакости;
- савладају сабирање и одузимање до 100 (схвате појам нуле и уочавају њено својство у сабирању и одузимању), упознају термине и знаке сабирања и одузимања; науче да правилно користе изразе „за толико већи“ и „за толико мањи“;
- усвоје технику усменог сабирања једноцифрених бројева и одговарајуће случајеве одузимања;
- успешно решавају текстуалне задатке (с једном и две операције) у оквиру сабирања и одузимања до 100;
- спознају метар, динар и пару.

Табела 3. Комплементаран однос циљева и задатака у области почетног математичког образовања и развијања математичких појмова у предшколској установи са задацима у настави математике у првом разреду основне школе

Почетно математичко образовање, развијање математичких појмова и настава математике	
Циљеви и задаци који се остварују у раду са децом најстаријег предшколског узраста	Задаци који се остварују са ученицима првог разреда основне школе
<i>Развијање дечијих способности:</i>	<i>Развијање ученикове способности:</i>
посматрања	посматрања
опажања	опажања
експериментисања учења откривањем	логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења
класификовања препознавања	спознаја најважнијих геометријских фигура и њихових узајамних односа
разликовања повезивања	препознавања, разликовања и именовања облика предмета, површи и линија
уочавања сличности и разлика, издвајања, уопштавања, придруживања	уочавања односа између предмета по облику, боји и величини
испробавања комбиновања	одређивања положаја предмета према себи и предмета према предмету

Издвојили смо оперативне задатке чије се основе препознају и у *Припремном предшколском програму*. То потврђује могућност остваривања континуитета у систему предшколског и основношколског образовања и васпитања, када је реч о почетном математичком образовању и усвајању математичких

појмова, стицању знања и развијању способности за примену стечених знања и даљег математичког образовања на старијим узрастима. Табеларним приказом смо паралелно представили задатке које васпитачи реализују са децом најстаријег предшколског узраста и задатке које учитељи реализују са ученицима првог разреда основне школе, за које је значајно да буду у комплементарном односу (Табела 3). Такав однос указује и на могућност реализације једног дела наставних садржаја кроз игру, с обзиром да деца у настави математике уче да посматрају, уочавају, препознају, разликују, именују, што јесу основне ситуације у организованим дидактичким играма (игре предметима, игре стоним штампаним материјалима, игре речима).

Следи представљање наставних садржаја математике за ученике првог разреда основне школе, како бисмо покушали да утврдимо да ли се и на који начин они надовезују на садржаје који се у предшколској установи нуде деци најстаријег предшколског узраста. Из *Наставној програма образовања и васпитања за први разред основног образовања и васпитања* издвајамо следеће наставне садржаје за математику, који се обрађују и у предшколској установи:

- предмети у простору и односи међу њима;
- посматрање предмета: положај и величина предмета;
- релације међу предметима: већи, мањи; лево, десно; испред, иза; испод, изнад; горе, доле;
- предмети различитих геометријских облика;
- линија и област, крива и права линија, затворена и отворена линија, унутрашњост и спољашњост, речи *у*, *на* и *ван*, спајање тачака правим и кривим линијама;
- класификација предмета према својствима;
- упоређивање предмета по дужини и боји;
- опис скупа навођењем чланова или својства, члан скупа, приказивање скупова, скупови са различитим и скупови са истим бројем елемената;
- сабирање и одузимање природних бројева;
- мерење и мере и др.⁴

Јасно је да се са децом најстаријег предшколског узраста и са ученицима првог разреда основне школе реализују истоветни садржаји, али се они на старијем узрасту постепено проширују и усложњавају, а затим допуњују новим садржајима. Стога можемо претпоставити да је у првом разреду основне школе представљене наставне садржаје у настави математике могуће реализовати кроз поменуте дидактичке игре, али је потребно и у њих уводити постепена отежања, која су претпоставка примерености деце игре узрасту, могућностима

⁴ (http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html)

и интересовањима деце. Такође, било би значајно да се у садржаје наставног програма за математику, за ученике првог разреда основне школе, конкретизују бар основа методичка упутства која указују учитељу на могућност организације појединих образовних активности кроз игру.

Закључак

Када је реч о усвајању основних математичких појмова и почетном математичком образовању, анализом и поређењем циљева, задатака, садржаја и активности у актуелном предшколском програму за најстарији предшколски узраст и наставном програму за ученике првог разреда основне школе, потврђено је да су они комплементарни, те да се на школском узрасту усложњавају и допуњују. У оваквој ситуацији намеће се констатација да је учење кроз игру могуће организовати и у раду са децом млађег школског узраста, у једном делу наставних активности. Чињеница је да у оваквим ситуацијама игра не може бити основна активност детета, али верујемо да се увођењем постепених отежања могу створити услови у којима ће деца на њима својствен начин усвајати и повезивати наставне садржаје.

Стога закључне констатације износимо у виду основних елемената могућег методичког приступа у реализацији наставних садржаја математике у раду учитеља са ученицима првог разреда основне школе: 1) представљање и идентификација проблема (задатка) за ученике; 2) избор дидактичке игре у којој деца посматрају, опажају, уочавају, истражују, испробавају, процењују, повезују или групишу; 3) увођење ученика у правила игре – пружити деци неопходна знања и искуства или освежити већ стечена и повезати их са садржајима и правилима игре; 4) објашњавање правила игре ученицима, очигледним показивањем, илустровањем или практично изведеним примерима; 5) праћење тока и резултата игре, потврда и образлагање могућих решења задатка; 6) сумирање резултата и провера исхода учења кроз игру (квалитет усвојених знања, ниво развоја когнитивних способности, квалитет развоја осталих дечјих потенцијала у аспекту социоемоционалног и креативног развоја). Различите врсте и варијанте дидактичких игара учитељима у основној школи дају могућност да у систем наставних активности постепено уводе отежања за децу. Ученици ће имати могућност да на забаван и њима својствен начин деловања усвоје математичке појмове, стекну математичка знања и развију способности неопходне за даље математичко образовање на старијим узрастима.

Литература

- Einon, D. (2003). *Rano učenje*. Novi Sad: Zmaj.
- Hofmann, M. & Weikart, D. P. (1995). Educating Young Children: Active Learning Practices for Preschool and Child Care Programs, *Early Childhood Counts: Programming Resources for Early Childhood Care and Development* (13–41). Ypsilanti, MI: High/Scope Press.
- Horvat, L. (1986). *Predškolsko vaspitanje i intelektualni razvoj*, Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Kamenov, E. (1989). *Intelektualno vaspitanje kroz igru*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo: „Svjetlost“.
- Kamenov, E. (1997). *Metodika – Metodika uputstva za Model B Osnova programa predškolskog vaspitanja i obrazovanja dece od tri do sedam godina, II deo*. Novi Sad: Odsek za pedagogiju Filozofskog fakulteta; Beograd: Zajednica viših škola za obrazovanje vaspitača Republike Srbije.
- Kamenov, E. (1999). *Predškolska pedagogija, Knjiga prva*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Kopas-Vukašinić, E. (2006). Uloga igre u razvoju dece predškolskog i mlađeg školskog uzrasta, *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, vol. 38, br.1, 174–189.
- Kopas-Vukašinić, E. (2007). Igrom do znanja predškolskog deteta. *Nastava i vaspitanje*, vol. 56, br. 4, 455–469.
- Medouz, S. i A. Kešdan (2000). *Kako pomoći deci da uče*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
- Millar, S. (1971). *The Psychology of play*, Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books Ltd.
- Nastavni program obrazovanja i vaspitanja za prvi i drugi razred osnovnog obrazovanja i vaspitanja*.
Sajt posećen 23. 09. 2014.
http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/naslovna_nastavni_planovi_programi.html
- Pravilnik* (2006). *Pravilnik o Opštim osnovama predškolskog programa*. Beograd: Ministarstvo prosvete i sporta Republike Srbije.
- Russ, W.S. (2004). *Play in Child development and Psychotherapy (Toward Empirically Supported Practice)*, Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Stanisavljević-Petrović, Z. (2011). *Diskontinuitet u vaspitanju između vrtića i škole*. Niš: Filozofski fakultet.
- Šefer, J. (2012). Igra i mašta u nastavi: eksponent divergentnog mišljenja i podsticaj stvaralačkog procesa, inicijative i saradnje, u: Jasmina Šefer i Jelena Radišić (ur.), *Stvaralaštvo, inicijativa i saradnja, Deo 2, Implikacije za obrazovnu praksu* (213–242). Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.

THE IMPORTANCE OF PLAY FOR THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL CONCEPTS IN PRE-SCHOOL AND SCHOOL CHILDREN

Summary. The development of children's abilities is determined by the quality of play. While playing, children act freely, they explore, connect, combine and learn. Through this “exploration of activities” (Wallon) children test and improve their functions that assist them in their maturation. The aforementioned theoretical determination of child's play is important for planning and organization of educational activities in pre-school institutions and schools. The aim of this study was to determine how educators and teachers can encourage the development of mathematical concepts in children (students) through play. The descriptive method and the method of content analysis of *Preparatory pre-school program* and curriculum for mathematics for the first and second grade of primary school was used. The study results indicate the need for further development and connecting of the content of these programs. This involves clear definition of play as: a) the need of children in lower primary school grades; b) activity that contributes to the maturation of thought functions; c) activity relevant for the development of mathematical concepts in children (students).

Key words: organization of educational activities, content and structure of the program, exploration of play, continuity in the system of pre-school and school education

Наташа Вукићевић

Ирена Голубовић-Илић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу,

Јагодина

golubovic.ilic@gmail.com

УЛОГА КОМПАРАТИВНЕ МЕТОДЕ У ПРОЦЕСУ УСВАЈАЊА ЗНАЊА У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

Апстракт. Савремена схватања корелативног приступа реализацији програмских садржаја у млађим разредима основне школе, осим примарног тематског и структуралног повезивања сродних садржаја из различитих области подразумевају и могућност примене истих метода и поступака у процесу усвајања знања. Иако свака научна дисциплина или наставни предмет настоји да развије своју методологију и методе усклади са специфичностима програмских захтева, постоји низ општих претпоставки сазнајног процеса из којих произлазе заједнички поступци у свим етапама, од чулног опажања објективне стварности до логичког закључивања и формирања појмова. У раду смо указали на значај и улогу компаративне методе у процесу усвајања знања у млађим разредима основне школе у настави Музичке културе, Природе и друштва и Математике. Упоредивање, односно компарација као мисаони процес захтева од ученика већи степен активирања когнитивних способности, али су знања усвојена на тај начин квалитетнија, трајнија и функционалнија.

Кључне речи: компаративна метода, усвајање знања, настава, Музичка култура, Природа и друштво, Математика.

Уводна разматрања

Основна замисао овог рада је указивање на заједничке карактеристике наставних предмета у млађим разредима основне школе, са посебним освртом на одлике процеса усвајања знања и могућности примене компаративне методе на том узрасту.

Заједничка својства васпитно-образовног рада са ученицима од првог до четвртог разреда, осим широког спектра могућности повезивања садржаја различитих области/предмета, имплицирају и примену истих метода у процесу усвајања знања. Иако свака научна дисциплина или наставни предмет настоји да развије своју методологију и методе усклади са специфичностима програм-

ских захтева, постоји низ општих својстава сазнајног процеса из којих произлазе заједнички поступци у свим етапама, од чулног опажања објективне стварности до логичког закључивања и формирања појмова. У том контексту, окосницу рада представља примена *компаративне методе* у настави Математике, Природе и друштва и Музичке културе.

Осим заједничких приступа и метода, међу наведеним предметима постоје и знатне разлике, па се из тог разлога структура и ток наставног процеса истовремено прилагођавају одређеним карактеристикама и специфичностима сваког предмета понаособ. Имајући у виду поменуте специфичности, односно постојање међупредметних сличности и разлика, потребно је истаћи могућности примене корелације у млађим разредима основне школе, са аспекта њеног значаја за процес усвајања знања. Разредна настава је посебно погодна за примену корелације и интегративног приступа с обзиром на околност да једна особа – *учишћел* реализује наставни процес и има целовит увид у предзнања, могућности и постигнућа ученика из свих области. Тиме су омогућени јасно сагледавање, конципирање и успешна реализација програмских садржаја.

Појмовно одређење и основу *корелације* представља повезаност и узајамна зависност две појаве, при чему свака промена у једној иницира одговарајуће промене у другој области. У дидактичко-методичкој литератури наилазимо на различита схватања корелације, али је свим становиштима заједничко управо дефинисање њеног циља и препознавање њених преимућстава. Главни циљ примене корелације јесте олакшавање процеса стицања знања, као основне компоненте наставе на основу које се изграђују остали процеси, од формирање навика и развијања способности до утврђивања и практичне примене знања.

Корелација се у разредној настави најчешће остварује *тематским* повезивањем које две појаве сједињује у једну хармоничну целину и *структуралним* повезивањем, при чему спону два предмета представља унутрашња особина једне појаве која се пропорционално налази у другој. Структуралним повезивањем, као вишим нивоом корелативног односа који се остварује преко унутрашњег садржаја, омогућена је примена корелације између предмета који немају много сличности, као што су Музичка култура, Математика и Природа и друштво (Милић, Вукићевић, 2012).

Компаративна метода једна је од општенаучних метода (пored хипотетичко-дедуктивне, аксиоматске, методе моделовања и других) које се „могу користити за стицање научног сазнања у свим наукама и свим научним дисциплинама“ (Миљевић, 2007: 159), али и метода сазнавања, јер је компарација саставни део сваког мишљења. Без компарације није могуће оформити појам, став, суд, нити је могуће закључивати, доказивати или оповргавати. Суштина ове методе је у утврђивању идентичности, сличности и разлика између два примера исте појаве, две истородне или разнородне појаве, два процеса у про-

шлости, садашњости или будућности, на једном или више дефинисаних простора. Компарација се може вршити на основу различитих критеријума, али и према утврђеним стандардима, а обично се тиче квалитета, садржине, облика и квантитета онога што се пореди. У школским условима и на узрасту од 7 до 11 година обично се врши поређење према спољашњим обележјима и уочљивим карактеристикама, јер су ученици, када је у питању когнитивни развој, у фази конкретних операција.

Опште карактеристике процеса усвајања знања у млађим разредима основне школе

Ослањајући се на релевантна теоријска достигнућа у подручју васпитно-образовног рада у млађим разредима основне школе, приказали смо једно од могућих методичких решења који би ученицима олакшао процес стицања знања, а наставу учинио ефикаснијом. Практични примери, којима смо предложено концепцију илустровали, представљају систематизацију искустава стечених у школама вежбаоницама.¹

С обзиром на то да је главно тежиште рада методички приступ који се темељи на остваривању што бољих образовних постигнућа, док се васпитни аспекти подразумевају и латентно остварују у току образовног процеса, истакнута је образовна функција наставног процеса. Два комплексна феномена, васпитање и образовање, иако имају јасне одреднице и властите специфичности, непрекидно се прожимају и тешко се могу посматрати одвојено у наставном процесу (Богнар, Матијевић, 2005).

Сазнајна активност у настави односи се на процес „стицања само оних знања која се тичу суштине стварности, знања до којих се долази сложеним умним операцијама“ (Баковљев, 1990:10). Ученици суштину објективне стварности схватају на основу свог чулног искуства и самосталним мисаоним активностима долазе до закључака које могу да примене и провере у пракси. Активно учење је сигуран пут који води ка функционалности знања и развоју креативног мишљења ученика и главни је циљ савремене наставе, али активности ученика и даље прати и усмерава учитељ. Улога учитеља у наставном сазнајном процесу испољава се првенствено у поједностављивању ученичке сазнајне активности и читавог процеса усвајања знања у свим његовим етапама. Од њега се очекује „да помогне ученику да нова знања повеже са животним, ван-

¹ Природа искустава одређена је педагошким окружењем и плод су заједничких залагања свих актера наставног процеса: *наставника* Факултета педагошких наука и *учитеља-ментора*, под чијим надзором и инструкцијама студенти реализују часове, и подједнако значајних активности *студената* и *ученика* млађих разреда.

школским искуствима и сазнањима (...), али да та знања повезује и са знањима из других наставних предмета“ (Цвјетићанин, 2009а: 15).

Успешна реализација наставе и повољни исходи сазнајног процеса зависиће од инвентивности и компетенција учитеља да оствари равнотежу између пружања потребних, „готових“ информација и мотивисања ученика за самостално учење и сазнање путем откривања. Осамостаљивање ученика у процесу усвајања знања не искључује руководећу улогу и педагошку интервенцију учитеља, али се његова улога мења; он планира активности и садржаје, организује рад ученика, стимулише активно учење, обезбеђује повратну информацију о постигнућима и напретку ученика, прилагођава брзину, избор метода и облика рада могућностима и способностима ученика. Одлика савременог руковођења наставом јесте „иницирање, подстицање, каналисање и контролисање ученичког самосталног умног рада“ (Баковљев, 1990: 53). Актуелна питања у вези са активним учењем, самосталним радом и мисаоним активностима ученика заправо се односе на могућности и облике њихове имплементације у наставну праксу. Теоријска полазишта поменуте проблематике могу се препознати још у расправама значајних филозофа, педагога и теоретичара попут Платона, Квинтилијана, Коменског и других. Платон наглашава да стицање знања подразумева активно учешће ученика у процесу учења, Квинтилијан подвлачи улогу вежбања, рада и сопственог размишљања о материји која се учи, док је Монтењево дело *Опелеги о васпитању* наговестило модерна становишта о значају развоја критичког мишљења. По Коменском, треба учити из природе, на основу чулног сазнања, али уз самостално тумачење путем размишљања; да би разумели објективну стварност, ученици морају бити мисаоно ангажовани. Учење разумевањем уместо механичког репродуковања готових знања заснива се на мисаоним операцијама и интелектуалној активности ученика који самостално анализирају, компарирају, закључују или уочавају односе међу појавама и чињеницама (Јукић, 2005: 81).

Процес стицања знања у савременој настави садржи неколико етапа међу којима нема оштрих граница, аналогно етапама наставног часа које се разликују по својој примарној функцији, али су међусобно повезане и условљене. Повлачењем јасних граница између наведених етапа не би се могле остварити јединственост и логична целовитост часа.

Специфичности сазнајног процеса у настави у настави Музичке културе, Природе и друштва и Математике

У настави Музичке културе процес усвајања знања се одвија паралелно са формирањем вештина, навика и развијањем музичких способности ученика. Специфичност усвајања музичких знања односи се и на континуирану повеза-

ност свих предметних подручја, могућност да се знања стечена у једној области примењују у другим областима рада, као и на својство да се све мисаоне активности темеље на претходном доживљајном искуству.

У млађим разредима основне школе, ученици усвајају елементарне музичке појмове чије је познавање неопходно за практично музицирање – извођење музике певањем и свирањем из нотног текста. Од квалитета стечених знања из основа музичке писмености и методског поступка који се примењује у постављању тонских висина, зависи трајност знања и могућност њихове примене приликом обраде нове наставне јединице – обраде песме из нотног текста. Уколико изостане само једна етапа у методском поступку учења песме-модела преко које се уводи нова тонска висина, или се нови тон уведе теоријским путем, ученици неће бити оспособљени да самостално интонирају тонове солмизацијом из нотног текста.

Усвајање знања је само један сегмент континуираног процеса музичког васпитања и образовања ученика, при чему су општа знања средство за упознавање нових појединачних знања (Цветковић, 1995: 171). Ученици песму из нотног текста, као нови задатак, усвајају на основу општих знања о тонским висинама, трајању нота, ознакама за динамику и темпо, али ће на основу тих општих знања уочити посебна својства која сваки од елемената има у датој композицији. У области слушања музике, на основу општих знања о инструментима, ученици препознају инструменте појединачно у новој композицији у којој одређени инструмент може имати другачију улогу.

По мишљењу наших истакнутих дидактичара, Крнете, Продановића, Ничковића, Данилова и других, процес стицања знања састоји се од следећих етапа:

- непосредног посматрања предмета и појава,
- формирања представа и мисаоног обрађивања перцепираних представа,
- формирања појмова,
- рада на утврђивању знања,
- проверавања и практичног примењивања знања.

Појмови се и у настави Музичке културе стичу на основу чулног сазнања, односно звучних представа непосредно перцепираних на часу обраде новог градива, али много чешће на основу претходно стечених звучних представа и музичког искуства (Вукићевић, Станојевић, 2014). Међутим, представе и опажаји формиран на овај начин спољашња су својства појава и процеса, док се унутрашња својства могу открити само мисаоном активношћу ученика и прерадом чулних искустава, њиховим упоређивањем и уопштавањем. Такав методички приступ је једини исправан пут који од усвајања појмова води ка трајности и ефикасности примене њиховог знања, подстицању мотивације за даљи

рад и развијању музичких способности ученика (Вукићевић, Станојевић, 2014).

Занемаривање значаја идентификације музичких способности ученика, па и једнострано схватање њихових узрасних могућности, доводи до поједностављивања садржаја у наставној пракси, пренаглашене употребе свакодневног животног искуства ученика за формирање појмова и избегавања употребе стручних термина у млађим разредима основне школе (нпр. италијанске ознаке за темпо и динамику, појам лествице иако ученици интонирају све тонове основне *C-dur* лествице). Наведене одлике традиционалне наставе и редослед усвајања знања од појединачних (спољашњих) својстава ка општим знањима, неповољно утичу на развој теоријског и стваралачког мишљења ученика. Уколико се знања усвајају на овај начин, ученици неће бити оспособљени за препознавање суштинских особина и специфичности појединачних елемената у непознатим композицијама, као ни за примену теоријских знања у свом стваралачком раду.

Сазнајни процес у настави Природе и друштва такође се интензивира очигледним средствима, применом огледа и самосталним мисаоним ангажовањем ученика. За разлику од традиционалне наставе у којој од ученика очекивало да испуне одређене критеријуме, усвоје предвиђено градиво и успешно га репродукују (при чему су знања вреднована на основу тачности репродукције), савремена настава Природе и друштва требало би „да буде активирајућа, да се ослања на претходна ученичка знања и искуства о природи, да их проблемски организује, да се састоји од мноштва питања и ученичких одговора, дилема, ваншколских знања и искустава, помоћу којих ће се код ученика развијати различити облици мишљења, будити радозналост и мотивисаност за проучавање природе“ (Цвјетићанин, 2009а: 9). Њен циљ је да ученик у наставном процесу буде активан, да развија менталне способности и активности као што су способност дијалога, добро презентовање сопствене идеје или решења, способност аргументовања властитог става, дискутовања, постављања питања, доношења одлука, преузимање иницијативе, бољег самоспознавања и ефикаснијег коришћења сопствених интереса и способности (Ивић, 2001). Другим речима, комплексни, динамични и интердисциплинарни садржаји предмета Свет око нас (у I и II разреду) и Природа и друштво (у III и IV разреду) имају за циљ „да омогуће ученицима да схвате условљеност и повезаност појава, односа и процеса у природи и друштву, вредност и улогу људског рада у мењању природе и друштвених односа“ (Лазаревић, Банђур 2001: 39). Усвајање предвиђених садржаја ученицима омогућава да „упознају себе, своје природно и друштвено окружење и развију способности за одговоран живот у њему“ (Службени гласник, 2005: 41).

Да би се формирале јасне представе о објектима, појавама, процесима или усвојили одређени појмови, успоставиле везе међу појавама и схватили природни закони потребно је да ученици знања усвајају свесно и активно. Основни облик сазнавања у настави Природе и друштва, поред вербалних метода, јесте *йосмайтрање*, при чему је јако важно да ученици не буду пасивни посматрачи. „Посматрање је плански, организовано и руковођено перципирање“ (Цвјетићанин, 2009: 69). Активан процес сазнавања у коме се ученици подстичу да посматрањем објеката или појава (најпре у целини, па у појединостима) рашчлањују, упоређују, описују и објашњавају је тзв. *йосмайтрање йоређењем*, а најпоузданији облик сазнања у настави је извођење огледа (Грдинић, Бранковић, 2005).

Посматрањем се предмети и појаве у природи и друштву сагледавају у склопу објективне стварности, а стечени чулни доживљаји спречавају да настава постане сувише формална и вербалистичка и представљају основу за развијање појмова. Да би се посматрање што успешније реализовало, ученицима би требало објаснити *ишџа* посматрају, *како*, *йге*, *када*, *чиме* и *заишџо* посматрају. На тај начин посматрање постаје активна психичка активност, јер се стечена чулна искуства мисаоним процесима прерађују, доводе у везу са претходним сазнањима и искуствима и повезују у логичку целину. Поред описивања и експерименталног посматрања, један од начина посматрања је и *йоређење*, које може бити „квантитативно (процењивање, мерење) и квалитативно (груписање, класификовање)“ (Цвјетићанин, 2009: 73).

У процесу усвајања знања у настави математике првенствено су наглашени когнитивни задаци и развој логичког мишљења. У почетној настави математике велики значај у усвајању математичких појмова, при решавању задатака или доказивању имају мисаоне операције: анализа, синтеза, апстракција, генерализација, конкретизација и упоређивање које „лежи у основи свих других мисаоних операција“ (Дејић, Егерић, 2006:41). У том смислу, за успешну реализацију наставе математике у млађим разредима основне школе, важе исте законитости које смо изложили са аспекта наставе музичке културе и природе и друштва.

Као што на основу претходних примера можемо закључити, процес стицања знања и формирања појмова представља сложен психолошко-педагошки феномен, али је „у настави пут од опажања ка мишљењу и од мишљења ка пракси, захваљујући руководећој улози наставника, веома поједностављен и скраћен“ (Баковљев, 1990: 13).

Примена компаративне методе у настави Музичке културе, Природе и друштва и Математике

Полазећи од теоријских претпоставки и емпиријских показатеља да упоређивање, односно компарација као мисаони процес захтева од ученика већи степен активирања когнитивних способности и да су знања усвојена на тај начин квалитетнија, трајнија и функционалнија, практичним примерима у настави Музичке културе, Природе и друштва и Математике навешћемо могућности примене компаративне методе у процесу усвајања знања. Компаративна метода своје место може пронаћи у настави свих наставних предмета почев од првог разреда, преко предметне наставе у основној школи, до осталих ступњева образовања. „У њеној суштини је *разумевање веза и односа међу стварима, појавама и бићима*“ (Јукић, 2005: 61), а ученике треба подстицати на трагање за њиховим сличностима и разликама и проналажење система односа по различитим категоријама (сличност, једнакост, истовременост и њихове супротности/антиподи). Самостално уочавање сличности и разлика и упоређивање појава или процеса ученицима олакшава стицање знања, омогућава боље разумевање садржаја и њихово повезивање у јединствен систем.

Битне карактеристике процеса усвајања знања у настави Музичке културе, а посебно општих својстава и одлика, представљају самостално упоређивање звучних представа и појава и самостално откривање њихових сличности, разлика, веза и односа. У почетној фази музичког описмењавања, појмове *динамика* и *темпо* ученици препознају упоређивањем контрастних композиција, а због скромног музичког искуства ученика овог узраста, нарочито је важно да те разлике буду уочљиве и веће у почетном раду. У каснијим етапама разлике би требало постепено смањивати.

Слична ситуација је и у настави Природе и друштва. У првом разреду најпре се упоређују предмети, појаве и односи међу којима су разлике врло уочљиве (особине материјала: тврдо–меко, храпаво–глатко, провидно–непровидно; просторне одреднице: горе–доле, испод–изнад, лево–десно; понашање тела у води: плива–тоне...) и акценат је на спољашњим својствима и изгледу бића, предмета и појава. У другом, трећем и четвртном разреду према спирално-узлазном моделу распоређивања садржаја суштина је у откривању и проналажењу разлика које се на први поглед не могу уочити (нпр. биљни и животињски свет различитих животних заједница, промене материјала под механичким и топлотним утицајима, разлике и сличности воде и других течности...).

У контексту уочавања разлика у музичкој настави, потребно је нагласити да претходно наведени елементи музичког израза, темпо и динамика, имају релативно значење, јер зависе од карактера, врсте и стилске припадности ком-

позиције. Динамичке ознаке које ученици треба да науче зависе и од структуре композиције, садржаја и извођачких средстава. Када се знак *f (forte)* односи на свирање на децјем музичком инструменту продорног звука попут чинела, не може се очекивати исти динамички ефекат као код гласног *forte* певања ученика у разреду (Вукићевић, 2010).

Наведени критеријум би требало поштовати и у опажању тонских висина, њиховом утврђивању и упоређивању. Ученици ће лакше разликовати тонове који чине веће мелодијске интервале, нпр. *до* и *сол*, од суседних тонова: *ми-фа*, *фа-сол*, *до-ре*. Због специфичности уметничких садржаја и методског поступка који се примењује у реализацији одређених наставних јединица, у настави музичке културе у млађим разредима основне школе предвиђено је усвајање елементарних музичких појмова, и то у оној мери колико је потребно за реализацију осталих области рада: извођење музике певањем и свирањем из нотног текста, обраду музичких игара, реализацију неких облика децјег музичког стваралаштва – одређивање ритма или мелодије на задати текст, ритмичке и мелодијске допуњалке, музичка питања и одговори. Међутим, иако смо већ истакли да се у III и IV разреду усвајају само тонови основне лествице², ученици наилазе на тешкоће у самосталној интерпретацији нотног текста: споро читају ноте, брзо заборављају места тонова у линијском систему, нетачно их интонирају и нису оспособљени за самосталну анализу и певање из нотног текста.

Примена методе компарације у области музичке писмености и слушања музике је полазна основа за оспособљавање ученика за самосталну вокалну и инструменталну интерпретацију, развијање способности повезивања различитих садржаја и елемената и уочавања постојећих веза и односа (између појединачних елемената музичког израза, између литерарних и музичких елемената песме, између музичких и ликовних елемената у области децјег стваралаштва и сл.). Ученици III и IV разреда основне школе сва теоријска знања и музичке појмове усвајају на основу претходног музичког искуства које може бити веома различито, зависно од музичких способности, интересовања, утицаја породице и средине и различитих фактора личности ученика, што представља додатни мотив за примену компарације у сазнајном процесу.

Интердисциплинарни садржаји предмета Природа и друштво применом компаративне методе омогућавају откривање веза, сличности и разлика између биљног и животињског света, човека и животиња, одређених физичких величина, временских прилика, делова неживе природе. У основи компаративног приступа је процес уочавања, идентификовања и издвајања сличности и разлика међу појединим бићима, појавама, процесима и односима у природи и друштву – просторних и временских одредница, изгледа, кретања и начина

² И то представља наизглед једноставне захтеве – напомена аутора.

оглашавања животиња, начина и брзине кретања тела, величине и основних карактеристика насеља и др. С обзиром на природу и карактер овог предмета ученици велики број наставних садржаја могу усвојити и разумети применом компаративне методе. Полазећи од чулних искустава стечених активним посматрањем, нпр. биљака, наставник врши анализу и, истичући њихова битна спољашња обележја, врши уопштавање заједничких карактеристика. Ученик, вођен наставниковим инструкцијама, упоређује и уочава поједине карактеристике целине које су заједничке за све појединачне анализиране случајеве. На пример, на свакој биљци уочавамо одређене делове – корен, стабло, лист, цвет, плод и семе; свакој биљци потребни су одређени услови за раст и развој. Када је формирао појам *биљке* ученик, разликовањем и упоређивањем појединачних примера, закључује да међу биљкама постоје и одређене разлике (врсте корења, облик листова, боја цветова, зељасте и дрвенасте биљке и др.) Применом компарације у настави природе и друштва омогућава се развој нових појмова (подређених и надређених), усваја мрежа појмова и подстиче мисаони развој ученика. С друге стране, ниво схватања и разумевања одређених садржаја компарацијом се може и проверити, јер уколико ученик тачно одговори и наведе карактеристике које разграничавају два појма, „онда је појмове ученик усвојио. (...) Садржај неког појма може се тачно схватити само онда ако се тај појам супротстави сродним или суседним појмовима“ (Грдинић, Бранковић, 2005: 54). Такође, компарација се у настави Природе и друштва може употребити и у функцији повратне информације³ на нетачан одговор, јер ће се на тај начин ученик сам исправити и уочити у чему је погрешно.

Формирање појединих математичких појмова у млађим разредима условљено је идентичним законитостима који важе у настави Музичке културе и Природе и друштва. Помоћу упоређивања, као основног логичког поступка, „мисаоно се успостављају сличности и разлике међу посматраним појавама“ које припадају истом домену. Са аспекта наставе Математике то значи да „можемо упоређивати квадрат и правоугаоник, али нема смисла упоређивати, на пример, троугао и новчану јединицу“ (Дејић, Егерић, 2006 :41). Самостално откривање сличности и разлика између понуђених математичких израза подстиче активност ученика и развој математичког мишљења. Једноставни задаци могу се презентовати ученицима још у првом разреду. На пример⁴:

Упореди збирове следећих израза $4 + 2$ и $4 + 1$.

³ На питање наставника „Како се назива место где се једна текућа вода улива у другу већу текућу или стајаћу воду?“ ученик (погрешно) одговара: „Извор.“ Следи питање које у себи садржи компарацију како би се ученик исправио „Како онда називамо место где једна текућа вода – поток или река извире?“

⁴ По моделу из уџбеника поменутих аутора.

Након извршене рачунске операције $4 + 2 = 6$ и $4 + 1 = 5$, ученици уочавају да је збир првог израза већи од другог, односно да је $6 > 5$.

Следећи ниво сложености односи се на захтев да ученици уоче сличност и разлику у истим примерима, где се опет на почетку сазнајног процеса јавља посматрање. Сличност представља примена исте операције – сабирања у оба израза и једнаки први сабирци (4). Разлика је у другом сабирку који је у првом изразу већи, па је и збир тог израза већи.

У складу са претходним знањима ученика и њиховим постигнућима, захтеви се могу усложњавати. Ученицима се могу поставити следећи задаци:

- већи број израза које упоређују ($5 + 2$, $6 + 2$, $3 - 2$, $7 - 2$, $1 + 2$, $8 - 2$),
- груписањем израза у одговарајуће парове $\begin{matrix} (5 + 2 & 6 + 2 & 1 + 2 \\ 7 - 2 & 8 - 2 & 3 - 2), \end{matrix}$

тражити да уоче постојеће аналогije да се у сваком пару врши одузимање од броја који је збир првог израза и „постепено их водити ка откривању описаног својства“ (Дејић, Егерић, 2006: 42).

Осим предуслова да одређени појам припада истој математичкој области, упоређивање математичких појмова врши се и према степену апстракције. „На најнижем степену апстракције налазе се математички појмови чијој изградњи претходи чулно-искуствени ступањ сазнања“, док се за формирање појмова вишег степена апстракције као полазна основа узима скуп математичких појмова (Дејић, Егерић 2006: 49).

Изучавање садржаја о разломцима у почетној настави математике подразумева упознавање разломака као дела целине, њихово правилно записивање и читање, одређивање дела целине изражене разломком ако је целина позната и обратно, проналажење целине (броја) преко његових познатих делова. Сазнајни процес у овој области завршава се упоређивањем разломака са истим именицом или са истим бројицом помоћу модела. „Упоредивање разломака засновано је на коришћењу модела“, јер им визуелно приказани делови бројева омогућавају да без рачунања одреде релативну величину разломка и утврде који је разломак већи и у случају кад су и бројилац и именилац различити. (Дејић и сар. 2006: 28). Значај решавања задатака који се односе на уочавање целине и њених делова/разломака у различитим контекстуалним представама, пре свега се огледа у повезивању апстрактног математичког појма са примером из реалног окружења, као што примена стеченог знања при трансформацији једне мерне јединице у другу представља значајан сегмент континуираног рада на развоју функционалног мишљења ученика (Дејић и сар. 2006: 27). Сложеније математичке операције са разломцима у млађим разредима нису предвиђене програмским садржајима.

Просторне релације, као почетне математичке, али и садржаје Света око нас у првом разреду, ученици такође упознају на основу разликовања и упоре-

ђивања предмета по њиховим суштинским одликама – по облику, величини и положају. Подгрупа просторних релација, *релације положаја*, изграђују се посматрањем положаја предмета у простору, вербалним изражавањем и мисаоним издвајањем уочених односа. „Упоредивањем предмета према неким квантитативним особинама, као што су величина, висина, дужина, ширина, дебљина настају *релације величина*. Одговарајуће релације деца уочавају упоређујући предмете истог облика“ (Дејић, Егерић, 2006: 195).

Наведени примери представљају само део широког спектра могућности примене компаративне методе у настави математике, не нарушавајући при том основни методички принцип према којем процес усвајања знања у математици започиње конкретним примерима, утврђивањем познатих појмова на основу којих се формирају нови, а завршава извођењем и учењем дефиниција.

Уместо закључка

Полазне претпоставке концепције рада представљају одлике савременог наставног процеса са аспекта наставе Математике, Музичке културе и Природе и друштва. Имајући у виду да су основна одређења савремене наставе померање тежишта са наставних садржаја на исходе учења и редефинисање улога свих субјеката у наставном процесу, наглашен је значај познавања и уважавања карактеристика сазнајног процеса ученика одређеног узраста. Поред тога, могућности и заједничке аспекте примене компаративне методе у настави сва три поменута предмета одредили смо као један од неопходних и незаобилазних начина подстицања мисаоног ангажовања и активности ученика у млађим разредима основне школе. Компарација у оквиру једног предмета омогућава ученицима упоређивање појава и појмова у другим областима и проналажење међупредметних сличности и разлика, али на другој страни, у глобалу, позитивно утиче на развој логике, критичког мишљења, интелигенције и когнитивних способности ученика уопште.

Литература

- Баковљев, М. (1990). *Дидактика*, Београд: Научна књига.
- Богнар, Л., Матијевић, М. (2005). *Дидактика*, Загреб: Школска књига.
- Будић, С. (2006). Распоред садржаја у наставном програму: услов оспособљавања ученика за успешну примену усвојених знања, у: *Европске димензије промена образовног система у Србији*, Зборник радова, Нови Сад: Филозофски факултет, Одсек за педагогију, 73–87.
- Будић, С. (2004). Карактеристике знања ученика у наставном процесу. *Педагошка стварност*, Нови Сад, 180–185.
- Вукићевић, Н. (2010). Значај примене логичких метода у настави музичке културе у млађим разредима основне школе. Зборник радова са Међународне научне конференције

- Савремени методички изазови*, Суботица: Универзитет у Новом Саду, Учитељски факултет на мађарском наставном језику (електронски зборник, редни број рада 36).
- Вукићевић, Н., Станојевић, К. (2014). Ликовна уметност у функцији тумачења музичких феномена у настави музичке културе. Зборник радова са VIII међународног научног скупа *Српски језик, књижевност, уметност*, књига 3, Крагујевац: ФИЛУМ, 189–196.
- Грдинић, Б., Бранковић, Н. (2005). *Методика познавања природе и Свећа око нас у наставној пракси*. Бачки Петровац: Култура.
- Дејић, М., Егерић, М. (2006). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини.
- Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2006). *Приручник за учитеље за наставу математике у четвртој разреду основне школе*, Београд: Креативни центар.
- Ивић, И., Пешикан, А., Антић, С. (2001): *Активно учење*, Београд: Институт за психологију.
- Јовановић, Б. (2004). *Школа и васпитање*, Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини
- Јукић, С. (2005). *Дидактичко-методички фраментии*. (прир. Оливера Гајић). Вршац: Виша школа за образовање васпитача.
- Лазаревић, Ж., Банђур, В. (2001). *Методика наставе природе и груписања*, Јагодина–Београд: Учитељски факултет у Јагодини и Учитељски факултет у Београду.
- Милић, И., Вукићевић Н. (2012). Математички појмови у функцији упознавања ритмичких трајања у раду са децом предшколског узраста. Зборник радова II међународне конференције *MATM2011 – Methodological Aspects of Teaching Mathematics*, Јагодина: Педагошки факултет у Јагодини.
- Миљевић, М. (2007). *Методологија научног рада*, скрипта, Пале: Филозофски факултет, Универзитет у Источном Сарајеву.
- Педагошки лексикон* (1996). Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Хузјак, М. (2001). Корелација у настави: структурални превод, Загреб: *Методика*, бр. 2 и 3, вол. 2, 39–43.
- Службени гласник РС – *Просветни гласник*, бр. 1/ 2005, 41–44.
- Цветковић, Ж. (1995). Улога општих знања у сазнавању посебног и појединачног, у: *Сазнавање и настава*, Београд: Институт за педагошка истраживања, 171–193.
- Цвјетићанин, С. (2009). *Методика наставе познавања природе 1*, Универзитет у Новом Саду: Педагошки факултет у Сомбору.
- Цвјетићанин, С. (2009а): *Методика наставе познавања природе 2*, Универзитет у Новом Саду: Педагошки факултет у Сомбору.

THE ROLE OF THE COMPARATIVE METHOD IN THE PROCESS OF LEARNING IN THE ELEMENTARY GRADES

Summary. Contemporary concepts of the correlation approach to the implementation of programs in the elementary grades, in addition to the primary thematic and structural connectivity related content from different fields, include the possibility of using the same methods and procedures in the process of acquiring knowledge. Although each discipline or the subject is trying to develop its own methodology and methods comply with the specific program requirements, there are general assumptions of cognitive processes which produce common procedures at all stages, of the sensory perception of objective reality to logical reasoning and concept formation. This paper

discusses the importance and role of the comparative method in the process of learning in the elementary grades in teaching music, nature and society, and mathematics. Comparison of such thought process requires students a greater degree of activation of cognitive ability, but the knowledge acquired in this way is more quality, permanent and functional.

Key words: comparative method, knowledge acquisition, learning, music, nature and society, mathematics.

Милош Ђорђевић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Јагодина

djordjevicmilos@yahoo.com

КОМПЛЕМЕНТАРНОСТ ЕСТЕТИКЕ И НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Айсџиракџи. Свеprisутна визуелна култура данас, хиперпродукција и опција мулти-медијалног садржаја (анимација, графика, слика и сл.) и њиме условљени јавни и приватни (радни и животни) амбијенти, подразумевају извесно естетско искуство перцепирања „реалности“. Презасићеност сликом захтева и одређени критички однос према њеном естетском својству. У том смислу, циљ овог текста јесте да предочи посебан значај естетских вредности визуелних наставних средстава у математици у доба свеprisутне мултимедијалне слике. Примена естетских норми у настави математике свакако има значајну улогу за остваривање циљева у настави математике. Апстрактно мишљење манифестује се кроз конкретне визуелне појаве које неупитно носе одређена естетска својства и вредности. Поменуто упућује и на етичку природу одабира и употребе визуелног наставног материјала. Гледани као естетски предмети они свакако имају естетски ефекат, те је упутно да искуства личних и интуитивних осећаја вредности и афинитете ученика прати примена пажљиво одабраних естетских норми.

Кључне речи: математика, естетика, мотивација, настава и образовање.

Размотримо на почетку значење/а појма естетика, а потом и осветлити савремена струјања у естетици. Од њеног утемељења као дисциплине, естетика се сматра филозофским размишљањем о лепом и уметности као продуховљеном изразу људске креативности, тј. као креативно размишљање усмерено на одређено уметничко дело. Средишње питање естетике свакако је питање мерила која омогућавају да се утврди да ли је нека ствар лепа или није, односно како утемељити објективност о нечему смешеном у најинтимнију субјективност (Feri, 1994: 24). Стога се и данас протеже извесна полемика између ставова објективне и субјективне естетике. Према првој претпоставци, својственој учењу Платона и његових следбеника, лепота проистиче из особина које постоје без нас и пре нас, док субјективна естетика, актуелна посебно након Канта, тврди да једина лепота постоји у нама, кроз нас и за нас. Насуп-

рот овој искључивости стоји синтетичка естетичка концепција француског филозофа Шарла Лала, који супротстављање субјекта и објекта гледа као псеудопроблем и уместо њиховог подвајања предлаже њихову сарадњу: „Лепота неке консонанце и ружноћа неке дисонанце зависи делимично од мене, од мог личног треперења. Али ја зависим од њих зато што оне изазивају моје треперење, како морално тако и физичко“ (Lalo, 1974: 4–5). Дакле, естетика је у исти мах и субјективна и објективна, и огледа се у међусобним односима објекта и субјекта.

Међутим, током XX века појављује се други проблем онтолошке природе. Естетичка теорија постепено губи један од својих традиционалних предмета каква је заправо сама уметност. Губећи своју метафизичку димензију, естетика у великој мери бива асимиллована светом материјалне културе, вулгарних тржишних односа и њихове акутне и свеопште симболизације, посредством примене масмедијских комуникационих технологија и нових вештина, попут нпр. менаџерских. Унутар индивидуалистичке културе савременог друштва мерило лепог крије се у системима комуникације, тачније у посредовању међу људима.

Промена у традиционалној естетици, која уметност типолошки одређује медијумом стваралаштва, делећи је притом на тзв. временске (музика, плес) и просторне (сликарство, скулптура, архитектура) уметничке дисциплине, по схватању Лева Мановича догодила се када су прво медији масовних комуникација коришћени у функцији уметничког изражавања, најпре фотографија и филм, затим телевизија као мас-медиј и видео као уметнички медиј, а потом и експанзија дигиталних медија који битно мењају начине производње, складиштења и дистрибуције информација и артефаката, практично нивелисали ову традиционалну дистинкцију и типологију, превodeћи је на план техничког дистрибуирања уметничких дела, што је постало више економско, односно социолошко него естетичко питање (Manović, 2001). То фактички значи да за савремено естетичко гледиште уметност више није повлашћени предмет изучавања, већ само једно од многобројних подручја истраживања (Vuksanović, 2010: 299). Отргнута од естетике уметност се стратешки укључује у системе забаве и рекреације диктираних првенствено економским императивом и вођених искључиво похлепом за профитом. Интензивни раст индустрије културе и забаве (најпре у САД, а потом и другим земљама развијеног света) потпомогнут технолошким иновацијама, може се пратити још од 1929. године (Grej, Hejlburn, 2001: 11). Са социолошког становишта посматрано, према речима Ортеге и Гасета, задобијање нове публике/конзумента за овакав вид мешања уметности и културе са забавним садржајима, заправо је исход преображаја јавне рецепције модерне уметности и друштвеног реструктурирања публике почетком XX века (Ortega i Gaset, 1968: 5–7). Јаз између оних који модерну

уметности разумеју и оних који је не разумеју, па самим тим и не прихватају постао је толико упадљив да је условио расцеп на повлашћену мањину, с једне, и инфериорну масу, с друге стране. Популарисање форми и садржаја високе културе и елитистичких (авангардних) уметничких дела тржишним и масмедиајским механизмима посредовања доводи до нивелације ових разлика, чиме се шири јавност привидно укључује у актуелни свет културе и друштва. Међутим, даљом комерцијализацијом ове сфере, у сврху њене демократизације (тј. њене потенцијалне доступности широј публици/конзументима), али и пораста профитабилности, руши се баријера између високе и популарне уметности као нижег облика културног изражавања, што је у директној вези с питањем смисла, како уметности, тако и њених естетичких рефлексја. Техничка демократизација и појефтинјење културних добара стандардизовали су културне творевине, приближивши их укусу шире публике (Radojković, 2006: 20). Преовлађујући масовни укус инклинира паду и неизбежно шири функционалну неписменост као ефекат медијске производње разноликих естетских форми и садржаја. Овим тржиште задобија апсолутну моћ стандардизације уметничких и културних производа, постављајући притом и нормативне вредности естетике. Тржишна стратегија је тиме неизоставно дала печат култури означивши је као популарну и масовну, што је уздрмало и традиционалну естетичку валоризацију уметности у односу на кич и шунд. Упорно инсистирање на демократизацији културе уз које упоредо иде пораст полувредности и кича, заправо је омогућило естетски популизам као нову етапу у њеном развоју (Stevanović, 2007: 238). Уједно и сам појам уметности, као и његова свеукупна пракса, трпе извесне промене. Уметност тако више није израз духа, већ постаје пуки украс епохе (Mišo, 2004: 159).

Ово раздвајање уметности и естетике имало је погубне последице за обе области. Ворхоллов рад „Brillo Box“ из 1964. године адекватно илуструје губитак ових граница у перцепцији уметности и самој стваралачкој пракси: оно што је уметност може представљати и културни артефакт и високо комерцијализовани производ света популарне културе. Губитак ексклузивности естетског дејства за уметничко дело практично значи губитак разлога постојања, док естетско искуство опстаје у својој најчистијој апстракцији – ономе што остаје од уметности. Одвојено од уметничког, естетско се предочава као ефекат производње и потрошње. Више није битно као својство уметничког дела, већ као уживање у свеопште естетизованој свакодневници. Дизајн свакодневних предмета, индустрија забаве, индустрија хигијене и козметике, хирургија, туризам или мода постају подручја производње, дистрибуције и потрошње естетског. Овај тријумф естетике обележен је преображајем културе од релативно аутономног подручја надградње живота у базичну индустрију производње савремености и самог живота или живљења. Естетизовање је постављено

у саме темеље савременог друштва – по мери укидања „лепог по себи“ и његовог имплементирања у робне предмете намењене продаји на тржишту. Естетско (лепо) постаје функција продаје, инструмент у сврху реализације апстрактне вредности неког предмета на тржишту. Садржаји културних традиција бестидно се експлоатишу у виду визуелних алузија, реплика или цитата без ближег одређења њиховог идентитета, у јединој служби пласмана и продаје робних предмета.

У једном таквом друштвено-економском окружењу, естетском експериментисању додељена је нарочито битна улога. Естетизовање неестетског врши се у циљу искоришћавања ефекта естетског, уживања које није само идеалитет естетског уживања. Поменућемо пример декорације и аранжмане продајних простора осмишљених да произведу тренутну растројеност и резултирају „импулсивном куповином“. Естетизована свакодневица повлађује начелу задовољства насупротив начелу реалности. Савремени човек је постао реципијент константних естетских импулса који се појављују у готово свим свакодневним активностима током радног и слободног времена. Сходно томе, увођење естетике у свакодневно указује на дубоке промене структуре јавне сфере. Друштвене илузије, политичке манипулације, креирање потрошачких навика, узурпација и организација слободног времена, или било који други вид манипулације људима, сада се обављају на много рафиниранији, суптилнији, „естетскији“ начин у равни појавних слика. Аранжиране слике, динамичне слике, дигиталне слике које се појављују свуда и ниоткуда, њихова хипермултипликација, симулакрум као масмедијска стратегија, интернет као депонија свега и свачега – набројано има основну функцију успостављања конформног понашања и потискивања могућности преиспитивања. За савремено друштво, које се одређује различитим терминима (постиндустријско, постпостмодерно, информацијско) својствена је криза духовне ситуације. Култура је постала тотализујућа реалност која се репродукује производњом естетског (Šuvaković, 2010: 479).

Млађи нараштаји стасавају у овако контаминираном перцептивном окружењу и тешко одолевају естетским импулсима којима су изложени. Од своје најраније доби, дете осећа и доживљава естетске вредности. Ова ситуација није нимало безазлена и захтева одлучну реакцију. Изражајна карактеристика естетског искуства је емоционални ефекат као подстицај на мисао и акцију, који се, као што смо видели, могу злоупотребити. Рационалност оваквог стимулуса је у контексту окружења у којем настаје, према томе неопходно је интегрисати га у образовање на свим стадијумима развоја индивидуе. Образовање као друштвена инстанца која треба да уздиже, васпитава и просвећује појединца у правцу свесног и одговорног одношења према себи и другима, мора да премости овај јаз збуњујуће сложености непосредног (естетског) опажања света. Потребни су одговарајући услови у школама и другим васпитним уста-

новама за васпитно-образовно деловање на формирање естетског интегритета. Пажљив и стратешки одабир наставних средстава свакако у овоме има значајан удео.

Наставна средства заузимају посебно место у остваривању плана и садржаја предметних активности и неопходна су за успешно постизање њихових функционалних и оперативних циљева. Свакако, нема универзалног наставног средства чијом би се применом могла успешно заменити остала наставна средства, међутим моћна свеprisутна слика и доминантна визуелна култура захтевају пандан у образовању. Сходно томе, визуелна наставна средства имају нарочиту дидактичку вредност, посебно функционално сједињена у садејству са осталим наставним средствима. Осим што првенствено морају да задовоље основне критеријуме – очигледност, егземпларност, одмереност и усмереност, прилагођеност узрасту и др. – визуелна наставна средства не смеју бити занемарена као естетски садржаји и естетски предмети. То значи да осим употребе уметничких дела савремене и уметности протеклих епоха, по естетским стандардима треба конципирати и наставна средства и материјале (уџбеници, радне свеске, модели) и помоћна техничка наставна средства, што се односи и на организацију табле.

Употреба визуелних наставних средстава темељи се на чињеници да су она мање апстрактна од речи. Ово има вишеструки значај када је реч о наставном предмету Математика, посебно у млађим разредима основне школе, у фазама формирања појмова. Апстрактни појмови у математици, вербализовани или одвојени од појавности предмета или ситуација, могу изазвати низ неприлика у савладавању градива. Пуко излагање сирових чињеница, стереотипних појмова и статистичких података не обезбеђује ученику разумевање. Празно усвајање речи и голи вербализам симулирају постојање одговарајућих појмова код детета, а у ствари прикривају празнину. Погодност коју пружа употреба уметничких дела јесте лакше усвајање и формирање појмова визуелним путем што има важну улогу у економичности наставе.

Низ истраживања је потврдило статистички податак да се 70 до 90% информација усваја визуелном перцепцијом (Hajrl 2008: 28–29). У складу са својим визуелним карактером човек је користио и све више користи визуелна средства у настави и васпитању (Panić, 1997: 243). Пионир визуелног метода у учењу, Амос Коменијус, својим познатим делом *Orbis pictus*¹ из 1657. године истакао је да сваку ствар и мисао треба представити у очигледном облику, јер вербални метод није довољан. Настава је од тада еволуирала у правцу препоруке да предавач своје вербално излагање учини очигледним и да га допуни

¹ Свет у сликама, приказивање предмета из природе и уметности у сликама. Позната књига за децу, коју је 1657. године издао чешки педагог Амос Коменијус (John Amos Comenius, 1592-1670).

показивањем, демонстрирањем, илустровањем, па отуда називи предавачко-приказивачка, демонстративна или илустративна настава. Очигледност подразумева комплекс рецептивних ефеката уско повезаних са емоционално-вољним, имагинативно-мисаоним активностима ученика у процесу стицања чулних сазнања и искустава. Наравно, разумљива је и није спорна потреба очигледности у настави али свакако не би требало ни отићи у крајност, тзв. пиктореализам и преценити визуелни метод а потценити речи и вербални метод. Свако визуелно средство није само по себи добро са аспекта суштине ствари коју илуструје. Ако слика не успева да прикаже суштинске одлике на уочљив и схватљив начин, она је неразумљива и штетна. Не треба превидети ни опасност од илустративне очигледности. Визуелни подаци добро конкретизују форму, али без вербалних симбола не би било потребног менталног напора који произлази из говорног саопштења и напора да се оно схвати.

У том смислу свако уметничко дело или његови елементи који се употребљавају у настави Математике не смеју да представљају дистракцију или дигресију, већ морају да задовољавају захтеве једноставног опажања и поимања. Одговарајућа уметничка дела као дидактичка средства треба да претходе или да се укључују упоредо са саопштеним чињеницама. Подразумева се да тачно решење неког математичког задатка не зависи од естетског гледишта – у том смислу неупитан је исказ $2 + 2 = 4$. Међутим, када је у питању пут долажења до решења, естетско искуство свакако има удео у процесу, његов циљ није гледање, већ омогућавање активног учења. Управо оно што дете ради на часу (како учи), узидано је у резултат учења. Сходно томе, трансмисији вербално посредованог знања треба придодати активне материјале који спонтано и афективно подстичу интересовање деце. Адекватном и методски исправном употребом уметничких дела, у зависности од природе градива у настави Математике, ученик је потпуно ангажован како емотивно, тако и интелектуално. На тај начин лакше схвата садржаје, емоционално је више мотивисан и концентрисан, а тако стечена знања су трајнија и дубља. Правилна употреба уметничких дела као визуелних средстава позитивно утиче на квантитет, квалитет, трајност знања и развој способности ученика.

Зато је неопходно да се у раном узрасту омогући што непосреднији контакт са уметничким делима. Оригинали и репродукције сликарских, графичких, вајарских и архитектонских дела, позориште и филм, графички дизајн, ликовно обликовани предмети, ликовне појаве у природи, култура становања и одевања – све то треба већ у предшколском добу поставити као подлогу будућим ликовно-естетским доживљајима (Grgurić, Jakubin, 1996: 1108). Када се касније у настави Математике примењују уметничка дела проверених (или утврђених) естетских вредности, а која парирају прозаичним и баналним естетским/естетизованим садржајима и артефактима у јавном простору, она постају вид драгоценог лич-

ног животног искуства. Овај јединствени потенцијал уметности упућује на неопходну интеграцију уметности и њених елемената у оквиру наставе предмета Математика (као и осталих образовних предмета). С друге стране, естетско искуство у математици може бити пут ка отклањању популарних ставова о овој науци као одбојној и сувопарној области, тј. допринети демистификацији математике чинећи је тиме доступнијом. Позитиван ефекат естетског искуства јесте развијање самопоуздања и поверења у властите математичке способности и уважавања позитивног односа према математици. Откривање или препознавање математике и математичких принципа у уметности и природи упућује да оне могу бити математички исказане. Свако дете треба да искуси радост бављења математиком и открије лепоту математике у смислу ширег значења естетског – као што је драг тренутка открића, елегантна једноставност доказа или теорије, педантност и ефикасност поступка и сл.

Закључак

Можемо закључити да је тежња за успостављањем јасни(ји)х естетских оријентира путем наставе математике уједно и етичко питање – у смислу формирања индивидуе. Кроз процес учења, ученик ступа у интеракцију са културним творевинама, а легитимитет контекста у којем се појављују утврђује код ученика систем (естетских) вредности и стандарда. Пажљиво одабрани садржаји из сфере уметности могу одражавати широк опсег културних образаца као и међуљудских односа. На тај начин стиче се потпунији утисак о комплексној друштвеној структури или моралним и културним вредностима, руше се стереотипи, подиже свест о критичности, речју – постиже се еманципаторски ефекат. Тако се увиђа комплетнији смисао света и нас у свету; особа је способна да се одупре утицајима и тиме постиже праву слободу и интегритет личности. Знање на тај начин укључује свесност о себи и свету, и себи у свету, и доводи до пуноће функционисања личности. Другим речима, освешћена особа присуствује властитом стварању опаженог света.

Литература:

- Feri (1994). Фери Л. *Homo Aestheticus. Ошкриће укуса у демократском друштву*, Нови Сад: Издавачка књижница Зорана Стојановића.
- Lalo (1974). Лало Ш. *Основи естетике*, Београд: Београдски издавачко-графички завод.
- Manović (2001). Manovich L. *Post-media Aesthetics*. приступљено 07.06.2014.
http://www.manovich.net/TEXTS_07.HTM
- Vuksanović (2010). Вуксановић Д. „Естетика, култура и савремена уметничка пракса“, *Зборник радова Факултета драмских уметности*, бр. 17, (297–309). Београд: Факултет драмских уметности – Институт за позориште, филм, радио и телевизију ФДУ, Београд.

- Grej, Hejlburn (2001). Gray C., Heilbrun J. „Growth of the Art Sector“, *The Economics of Art and Culture*, (13–39). Cambridge: Cambridge University Press.
- Ortega i Gaset (1968). Ortega y Gasset J. *The dehumanization of art: and other essays on art, culture, and literature*, Princeton: Princeton University Press.
- Stevanović (2007). Стевановић Б. „Социокултурна функција уметничког стваралаштва у ери естетског популизма“, *Теорија уметничког стваралаштва: зборник радова*, Н. Грубор, С. Јакуовић (ур.), (225–242). Београд, Панчево: Мали Немо; Београд: Естетичко друштво Србије.
- Мишо (2004). Michaud Y. *Уметносћ у илустрицији – есеј о тријумфу естетике*, Загреб: Наклада Љевак.
- Šuvaković (2010). Шуваковић М. „Уметност у расплутаном стању: од односа до атмосфере у култури“, *Дискурзивна анализа: илустрицији и/или илустрицији 'дискурзивне анализе' филозофији, естетички, теорији и студијама уметносћ и културе*, (474–479). Београд: Орион Арт и Катедра за музикологију Факултета музичке уметности.
- Hejrl (2008). Hyerle D. *Visual Tools for Transforming Information Into Knowledge*, Corwin: Corwin Press.
- Ранић (1997). Ранић В. *Психологија и уметносћ*, Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- Grgurić, Jakubin (1996). Гргурић Н., Јакубин М., *Визуално-ликовни одгој и образовање*, Загреб: Educa.

COMPLEMENTARITY OF AESTHETICS AND MATHEMATICS TEACHING

Abstract. The pervasive visual culture today, hyper production and circulation of multimedia content (animation, graphics, images etc.) and thereby determined public and private (working and living) ambiances, imply a certain aesthetic experience of reality perception. High volume of surrounding images requires a certain critical attitude towards their aesthetic properties. In this sense, the goal of this paper is to present importance of aesthetic values of visual teaching aids in mathematics, in the era of omnipresent multimedia images. The application of aesthetic standards in mathematics certainly plays a significant role in achieving the objectives in teaching mathematics. Visual manifestations of abstract concepts can enable their easier understanding. Abstract thinking is manifested through concrete visual phenomena which inevitably carry a certain aesthetic properties and values. Mentioned refers to the ethical nature of the selection and use of visual teaching materials. Seen as aesthetic objects they certainly have an aesthetic effect, and such as it is highly advisable to be based upon carefully selected aesthetic norms.

Key words: Mathematics, aesthetics, motivation, teaching and education.

Андријана Јаковљевић

ОШ „Драгиша Михаиловић“

Крагујевац

Оливера Цекић-Јовановић

Факултет педагошких наука Универзитета у Крагујевцу

Јагодина

СВЕТ ОКО НАС / ПРИРОДА И ДРУШТВО И МАТЕМАТИКА У СИСТЕМУ МЕЂУПРЕДМЕТНЕ ПОВЕЗАНОСТИ – СТАВОВИ УЧИТЕЉА

Апстракт. Трагајући за новим методама и средствима у циљу унапређивања традиционалне наставе и осавремењивања наставног процеса, теоретичари и практичари посебно место дају међупредметној повезаности наставних садржаја. Сагледавање садржаја са различитих аспеката у оквиру појединог наставног предмета истраживачи истичу као поступак који доприноси стицању трајнијих и практично применљивијих знања. Специфичности предмета Свет око нас / Природа и друштво огледају се у његовој интердисциплинарности која пружа велики број могућности за иновирање наставног процеса и међупредметну повезаност. У раду ћемо размотрити неке могућности повезивања садржаја Света око нас / Природе и друштва и Математике, и приказати резултате добијене анкетањем учитеља. Циљ истраживања, којим је обухваћено 90 испитаника, био је сагледавање њихових ставова о могућностима и ефикасности међупредметне повезаности наставе Света око нас / Природе и друштва и Математике. У истраживању су коришћене дескриптивна и аналитичка метода, а прикупљени подаци обрађени су квантитативно и квалитативно.

Кључне речи: настава Света око нас / Природе и друштва, настава Математике, међупредметна повезаност, разредна настава, ставови учитеља

Увод

Резултати бројних истраживања потврђују чињеницу да су ученици основних школа временски и интелектуално оптерећени школским обавезама више него што њихове психофизичке могућности допуштају (Пешикан 1990; Милојковић 1991; Богосављевић 2001; Зуковић, Јовановић 2005). У прилог томе иде чињеница да су на основу резултата испитивања временске оптерећености (коју су вршили Биондић, Розмарић, Фурлан, Ивић, Пешикан, Лазић, Круљ,

Бркић и др.) и упоређивањем тих резултата са Лердовим нормама оптерећености ученика добијени подаци да су наши ученици више оптерећени од норми које је Лерд предвидео за наставу и домаћи рад, и то за 50–60% од тих предвиђених норми (Цекић-Јовановић, 2012). Резултати нису охрабрујући ни када је интелектуална оптерећеност у питању. Родић, Јанковић, Пешикан и др. наглашавају да су ученици оптерећени и претераним захтевима у погледу обима градива које треба усвојити у краћем периоду и у погледу сложености, тежине и квалитета градива, које не одговара психофизичком добу ученика (Богосављевић, 2001: 19).

Одговор на питање растерећења ученика могао би се наћи у разматрањима могућности међупредметног повезивања садржаја више наставних предмета. Иако је разредна настава подељена на поједине наставне предмете, она је ипак карактеристична по својој целовитости и својој суштини да наставу већине предмета реализује једна особа – учитељ. Таква организација наставе заправо олакшава и омогућава да се чешће планирају и реализују корелације међу предметима, а планирано градиво логички повеже у јединствен систем. Знања стечена на такав начин била би квалитетнија и трајнија, а у прилог овоме иде и јединствен став теоретичара и практичара који се баве наставом, а који кажу да учење треба да подстакне укупан, целовит развој ученичких способности. У Педагошком речнику реч *корелација* се одређује као „однос у коме било каква и било колика промена једне појаве има за последицу одговарајућу, паралелну промену друге појаве или променљиве“, односно као „функционално повезивање свих елемената наставног процеса у усклађену јединствену целину“ (*Педагошки речник* 1976: 476–477). Дакле, њена суштина јесте повезивање сродних наставних предмета или њихових делова „при чему сваки предмет задржава свој систем, односно као предмет не губи своју самосталност“ (Исто: 477), док се ученицима на тај начин обезбеђује смислено, квалитетно и искуствено учење, које омогућава систематизацију ученичких знања, вештина и навика. На корелацију, као могућност растерећења ученика, упућује нас и *Службени гласник* у коме је истакнуто да се приликом планирања и реализације наставе од учитеља очекује остваривање *интегрисаної шемаїтскої ірисїуїа*. То практично значи да учитељ има могућност да, самосталним избором кохерентних и компатибилних садржаја наставних тема, комбинује градиво унутар различитих предмета и да на основу тога примењује мултидисциплинарни приступ при изграђивању појмова. При томе треба поштовати одреднице принципа корелације на свим нивоима (предметном, разредном и међупредметном), уважавајући све наставне и ваннаставне облике рада и активности у школи и изван ње (*Службени гласник РС*, бр. 3/2006: 46).

Ако пођемо од тога да је шира примена математичких знања у животу и науци утицала на заузимање посебног места овог предмета у систему образо-

вања (Мићановић, 2008: 353), као и да је Математика веома комплексан предмет који богатством садржаја, ширином циљева и великом дубином апстраховања на специфичан начин развија способности ученика, требало би размотрити могућности корелације Математике са другим наставним предметима чији су садржаји за то погодни. Како је предмет нашег истраживања међупредметна повезаност наставе Математике и Света око нас / Природе и друштва, анализом садржаја ових наставних предмета долазимо до закључка да постоје бројне могућности за њихову међупредметно повезивање. Навешћемо неке примере и могућности корелације.

У првом разреду садржаје наставне јединице *Релације међу предметима*: *лево, десно; испред, иза; испод, изнад; горе, доле итд.* можемо повезати са садржајима наставне јединице *Кретање – промена положаја у простору и времену (напред, назад, горе, доле, лево, десно)*. Релације међу предметима (*лево, десно; испред, иза*) можемо обрадити, увежбати или поновити и у корелацији са наставном јединицом *Оријентација у простору у односу на карактеристичне објекте у непосредном окружењу*. Осим ових наставних јединица, садржаје Математике и Света око нас можемо повезати и у оквиру наставних јединица *Опис кућа навођењем чланова или својства и Групације људи у окружењу и моје место у њима: породица, рођаци, суседи, вршњаци, сународни* (пример – ученици из скупа вршњака могу да издвоје подскуп дечака или девојчица). Када су скупови у питању, можемо их обновити и приликом реализације следећих наставних јединица – *Разлике и сличности међу биљкама на основу спољашње изгледа; Разлике и сличности међу животињама на основу спољашње изгледа* (пример – ученици би из скупа биљака могли да издвоје оне чији корен користимо у исхрани, а када су у питању животиње, могу да издвоје оне које имају 2 или 4 ноге); *Материјали, њихова својства (тврдо – меко, провидно – непровидно, хлававо – лапко) и понашање у води (плива – тоне, растворљиво – нерастворљиво)* – ученици би из скупа предмета издвојили предмете који имају наведена својства (тврдо – меко, провидно – непровидно, хлававо – глатко).

У другом разреду можемо повезати садржаје наставне јединице *Предмети облика лопте, ваљка, квадра и коцке. Упоредивање предмета по облику, ширини, висини и дебљини и Шта све утиче на брзину кретања тела (облик и величина тела, материјал од кога је начињено, подлога, средина, јачина деловања)* (пример – уочити предмете облика лопте, ваљка, квадра и коцке и упоредити их по облику, ширини и висини, а након тога утврдити од ког су материјала и шта утиче на брзину кретања тела).

Осим наведених наставних јединица, у другом разреду на овај начин можемо реализовати и следеће наставне јединице – *Мере за време: час, минут, дан, седмица – недеља, месец* (Математика) и *Дан, одређивање доба дана према*

полагају Сунца, трајање дана (Свет око нас). У трећем разреду, наставне јединице *Писање бројева римским цифрама* и *Година и век* погодне су за корелацију са наставом Природе и друштва и наставном јединицом *Временске одреднице* (*дани, година, деценија, век – ближа и даља прошлости*). Како се у четвртном разреду на часовима Математике обрађује наставна јединица *Бројевна линија*, јавља се могућност за корелацију са наставним јединицама *На временској линији хронолошки одредити развој (континуиран и дисконтинуиран) државе Србије и упознати се са њеним владарима, почев од лозе Немањића па све до данас* (пример – ученици на основу података на бројевној полуправи треба да одреде колико година је владао Стефан Немањић).

Дакле, прилика да се организује корелација између Математике и Природе и друштва посебно се указује у млађим разредима основне школе, када је најтеже привући и одржати пажњу ученика током целог часа. Међупредметном повезаношћу ових предмета код ученика се, поред позитивног односа према Математици, на један интересантан начин развија и позитиван однос према природи. Истовремено се буди и подстиче радозналост и жеља за посматрањем појава, процеса и промена у њој, подстиче интересовање за изучавање предмета различитих карактеристика из њиховог природног окружења. Учитељ може повезати садржаје поменутих предмета на тај начин што ће бирати активности које ће заинтересовати ученике, које ће им бити занимљиве, али на основу којих ће истовремено и нешто научити или сазнати.

Методологија истраживања

Полазећи од тога да су учитељи један од основних чинилаца дидактичког четвороугла, интересовало нас је њихово мишљење о могућности и ефикасности корелације Математике и Света око нас / Природе и друштва. Дакле, циљ истраживања је био испитивање ставова учитеља који раде у основним школама о могућности корелације претходно поменутих предмета и ефикасности таквог начина рада. Из овако постављеног циља, произашли су задаци истраживања. Први задатак је био испитати ставове учитеља о могућностима корелације Света око нас / Природе и друштва са Математиком, и могућности проналажења погодних садржаја за поменути начин рада. У оквиру следећег задатка испитивали смо ставове учитеља о ефикасности наставе која се реализује у оквиру међупредметне повезаности Математике и СОН / Пид. Последњи задатак односио се на испитивање учесталости реализације часова на којима је заступљена корелација Математике и Света око нас / Природе и друштва. Овако постављени задаци условили су наше следеће претпоставке. Претпостављамо да учитељи имају позитиван став о могућностима корелације Математике и СОН / Пид, и да у оквиру садржаја поменутих предмета могу да издвоје садр-

жаје који су погодни за корелацију. Друга хипотеза односила се на то да претпостављамо да учитељи имају позитиван став о ефикасности корелације наставних предмета. Наша последња претпоставка била је да учитељи, иако имају довољно предзнања и искуства, ипак недовољно примењују корелацију садржаја Математике и Света око нас /Природе и друштва на часовима. Узорак истраживања чинили су учитељи основних школа у Параћину и Јагодини. Приликом реализације циља и задатака истраживања коришћена је дескриптивна научно-истраживачка метода, која је примењена приликом тумачења и анализирања стручне литературе, прикупљања, обраде и интерпретације добијених резултата истраживања. Од научно-истраживачких техника током истраживања применили смо анкетирање. Поменуто истраживачку технику применили смо коришћењем инструмента који смо сачинили за потребе истраживања. Упитник за учитељ садржао је 12 питања – 4 питања општег карактера о завршеној школи, годинама радног стажа, полу, месту у коме су запослени, и 8 питања којима смо настојали да утврдимо ставове, мишљења и искуства учитеља о могућностима и ефикасности примене корелације садржаја Математике и Света око нас / Природе и друштва.

Подаци прикупљени током истраживања обрађени су коришћењем софтверског пакета за статистичку обраду података SPSS Statistic, верзија 17.00. Приликом обраде података прикупљених анкетирањем учитеља користили смо проценте и дистрибуције фреквенција. Ради лакшег тумачења и интерпретације добијених резултата, податке смо приказали графички и табеларно.

Истраживањем је обухваћено 90 учитеља основних школа. Детаљнија структура узорка приказана је у Табели 1:

Табела 1. Структура испитаника са аспекта пола, завршене школе и средине у којој су учитељи запослени

Пол				Радни стаж				Стручна спрема					
женски		мушки		0-20		20>		виша		висока		магистратура	
f	%	f	%	f	%	F	%	f	%	f	%	f	%
64	71	26	29	17	18,9	73	81,9	20	22,22	68	75,5	2	2,3

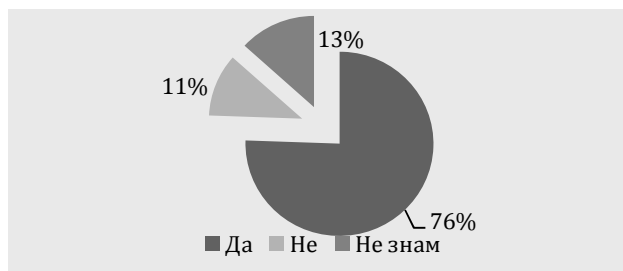
Као што табела илуструје, од укупно 90 учитеља 64 (71,11%) чиниле су учитељице, а 26 (28,9%) учитељи. Што се радног стажа тиче 18,9% или 17 учитеља, у основној школи раде мање од 20 година, док 81,9% или њих 73 ради овај посао више од 20 година. Податак о стручној спреми показао нам је да је највећи број учитеља који су завршили факултет (68 испитаника), нешто мањи број остао је са завршеном вишом школом (22,22% тј. њих 20), и то су учитељи који имају радни стаж преко 30 година, док само два учитеља имају завршене магистарске студије.

Ставовe и мишљења учитеља испитали смо и утврдили коришћењем анонимног анкетног упитника чији се први део односио на сагледавање искустава учитеља у вези са међупредметном повезаношћу наставних садржаја. Наиме, корелација у настави јесте један од императива савремене школе, али је основни предуслов за њену реализацију адекватна стручна оспособљеност предавача. С тим у вези, најпре смо испитали има ли, у основним школама учитеља који поседују довољно искуства и знања за реализацију часова корелације Математике и Света око нас / Природе и друштва. У складу са тим на питање *Шта, по вашем мишљењу, представља корелација наставних предмета?* сви испитаници (90, 100%) одговорили су да је то истовремена обрада садржаја више наставних предмета током једног часа. Овим је показано да учитељи имају одређена теоријска предзнања о појму корелације, што представља основни предуслов да би се поменути начин рада интегрисао у наставну праксу. На ово се надовезују и одговори на питање *Да ли у свом раду примењујете корелацију наставних садржаја?* где је 84,4% испитаника (76 учитеља) одговорило да реализује часове корелације. Ово иде у прилог чињеници да учитељи осим потребних теоријских знања имају и практична искуства у вези са корелацијом наставних предмета уопште.

На наше питање да ли је корелација економична у погледу утрошеног времена за обраду сличних садржаја у оквиру више наставних предмета, сви испитаници, њих 90 (100%), одговорили су позитивно, тј. слажу се са тим да на часовима корелације могу брже и ефикасније обрадити садржаје више предмета и тиме уштедети време за неке сложеније и захтевније наставне јединице. Ови и претходно анализирани подаци говоре у прилог чињеници да су учитељи свесни предности које пружа корелација наставних садржаја, те самим тим ни њену ефикасност не доводе у питање.

График 1 илуструје одговоре учитеља на питање да ли се корелацијом наставних предмета постиже шире сагледавање наставних садржаја и развијање целовите ученикове личности.

График 1. Дистрибуција одговора на питање: Да ли корелацијом наставних предмета постижемо шире сагледавање наставних садржаја и развијамо целовиту личност ученика



Да корелацијом може да се утиче на развој целовите ученикове личности, и да се постиже вишестрано сагледавање проблема који се проучава сматра 68 учитеља, 10 испитаника је одговорило да се не слаже са тим, док је без одговора било 12 испитаника. Оволики број позитивних одговора може се објаснити тиме да корелација наставних садржаја доприноси бољем разумевању појмова, појава и процеса који се изучавају и доприносе развоју свих аспеката ученикове личности (Шефер, 2002).

Податак да учитељи имају довољно методичких предзнања да препознају садржаје који могу да се реализују корелацијом више наставних предмета потврђују одговори на питање којим смо тражили да од понуђених наставних јединица одаберу оне које могу да се реализују корелацијом Математике и Света око нас / Природе и друштва. 94,4% учитеља одабрало је одговарајуће садржаје, док је њих 5 било без одговора, а погрешних избора није било. Дакле, учитељи су стручно оспособљени, тј. имају методичких знања и искустава да одаберу одговарајуће садржаје који на поменути начин могу да се реализују.

Интересантне одговоре добили смо на питање – Да ли сте реализовали наставу Математике у корелацији са наставом Света око нас / Природе и друштва? (Табела 2).

График 2. Дистрибуција одговора на питање: Да ли сте реализовали наставу Математике у корелацији са наставом Света око нас/Природе и друштва

Јесте	Није	Не знам
83	3	4
92,2%	3,3%	4,5%
Укупно:		90

Од укупног броја анкетираних 92,2% испитаника, њих 83, одговорило је да јесте, док је 3,3%, њих 3, одговорило да није, а без одговора је било 4 испитаника. Том приликом испитани учитељи навели су као пример велики број наставних јединица који у пракси могу да се реализују корелацијом Математике и СОН / Пид.

Учитеље који припадају групи која је на претходно питање одговорила негативно замолили смо да на основу Наставног програма, који се налазио у прилогу Упитника, наведу називе наставних јединица које би, по њиховом мишљењу, могле да се реализују у корелацији Математике и Света око нас. Одговори су били: *Крећање – промена положаја у простору и времену; Утицај облика предмета на његово крећање: клизање и коцкање; Трајим, мерим и бележим време и трајање; Мерење времена (појам сата и коришћење часовника); Временске одреднице: дан, година, деценија, век, чиме је показано да и без довољно практичног искуства, постоји потребно теоријско предзнање за реализацију часова корелације.*

Последња два питања у упитнику односила су се на то да испитаници, на основу свог искуства у школама, наведу предности и недостатке корелације. Добијене одговоре груписали смо у 5 категорија. Највећи број учитеља као предност корелације истиче уштеду у времену приликом обраде садржаја различитих предмета. Нешто мањи број испитаника предност корелације види у могућности сагледавања изучаваног проблема са више аспеката, тј. у схватању да се на тај начин један проблем разматра из неколико углова, са више страна и на тај начин постиже боље разумевање онога што се учи. Предност поменутог начина рада 71 испитаник види у томе што се тако ученицима пружа могућност да развију своју целовиту личност, да интересантније, брже и успешније науче предвиђене садржаје; 56 учитеља сматра да часовима корелације може да се утиче на повећање мотивације ученика за рад и учење; 69 испитаника мишљења је да на часовима на којима се истовремено реализују садржаји различитих предмета ученици који мање воле поједине предмете имају прилику да кроз другачији начин учења неосетно обрађују и садржаје предмета за које немају афинитета.

Што се недостатака тиче, највећи број учитеља сматра да је припремање часова које ће реализовати корелацијом наставних садржаја два предмета много захтевније у односу на припремање осталих часова. Наглашен је недостатак квалитетних примера из праксе (припрема, приручника, семинара, сајтова итд.) који би им били узор – модел приликом писања сценарија за часове (4,5%), док 10% учитеља као недостатак часова корелације истиче време и напор за писање припреме и набављање неопходног материјала, наставних и помоћних средстава за рад. Један број учитеља (6,6%) мишљења је да на тај начин ученици могу да се збуне и да се постигне контраефекат уколико корелација није адекватно реализована.

На основу анализе добијених одговора можемо закључити да учитељи имају позитиван став о корелацији наставних предмета. Свесни су бројних могућности за реализацију поменутог начина рада, као и ефикасности такве наставе у погледу растерећења ученика, мотивисања ученика за рад и развоја њихове целовите личности. Учитељи имају довољно предзнања и искуства да би могли да осмисле и реализују часове корелације, а додатни стручни семинари у вези са тим могли би само да допринесу учесталијој примени поменутог начина рада у наставној пракси. Питање које се односи на мотивисаност учитеља за експериментисање и примену нових и другачијих начина рада на часовима, међу којима је и корелација наставних предмета, свакако је важна карика у осавремењавању школства и подизању његове ефикасности. Корелација наставних предмета јесте један од начина да се изађе из монотоније и шаблонизма, али није универзални наставни поступак којим се могу решити сви бројни проблеми савремене наставе. Корелација наставних предмета своје

предности и ефикасност може достићи једино у правовременој, стручној и креативној комбинацији са осталим наставним поступцима рада.

Закључак

На основу квантитативне и квалитативне анализе добијених резултата анкетирањем наставника разредне наставе може се доћи до закључка да учитељи имају позитиван став о међупредметној повезаности Математике и Света око нас / Природе и друштва и да је примењују у раду. Императив савременог учитеља јесте да на креативан начин презентује садржаје, омогући ученицима различите приступе теми и подстиче њихов целовит развој. Резултати до којих смо дошли су охрабрујући, јер ће кроз корелацију наставних предмета ученици на интересантан начин доћи до нових сазнања, а постојећа проширити и продубити. Наредна истраживања треба усмерити ка утврђивању међупредметне повезаности ових садржаја са осталим садржајима који се изучавају у млађим разредима основне школе.

Литература

- Богосављевић, Р. (2001): Ставови наставника, родитеља и ученика о оптерећености младих школским обавезама, *Норма*, бр. 1–2, Сомбор, 13–31.
- Ђорђевић, М. (1995): *Корелација наставних садржаја у настави*, Београд: Учитељски факултет.
- Егерић, М. (2007): Подстицање интересовања за математику, *Зборник радова*, бр. 9, Педагошки факултет у Јагодини, 145–155.
- Зуковић, С., Јовановић С. (2005): (Пре)оптерећеност ученика школским обавезама као значајно питање реформе система васпитања и образовања, *Педагошка стварност*, бр. 3–4, Нови Сад, 305–315.
- Липовац, В. (2003): Дидактички аспекти мултимедијалне наставе, *Норма*, бр. 2–3, Сомбор, 211–222.
- Майер, Е. Р. (2001): *Multimedia Learning*, University of California, Santa Barbara, Cambridge University Press.
- Мићановић, В. (2007): Модели примене рачунара у почетној настави математике, *Педагошка стварност*, бр. 9–10, Нови Сад, 930–938.
- Мићановић, В. (2007): Осавремењивање почетне наставе математике применом рачунара, *Педагошка стварност*, бр. 7–8, Нови Сад, 733–748.
- Мићановић, В. (2008): Организационо-технички услови примене рачунара у почетној настави математике, *Педагошка стварност*, бр. 3–4, Нови Сад, 350–363.
- Педагошки речник, Радован, Теодосић (ур.) 1976. Београд: Завод за издавање уџбеника СР Србија.
- Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања*, Службени гласник РС, Просветни гласник, бр. 3/2006.
- Тот, С. (2008): Мотивационе игре у почетној фази наставе математике, *Педагошка стварност*, бр. 5–6, Нови Сад, 488–497.

- Ћетковић, А., Пинтер, Ј. (1998): Занимљиви задаци у функцији остварења васпитних задатака наставе математике, *Учиоци*, Часопис Савеза учитеља Републике Србије, бр. 59, Београд, 43–57.
- Цекић-Јовановић, О. (2012): Могућности корелације наставе Природе и друштва и Математике у оквиру образовно-рачунарског софтвера, Зборник радова *Методички аспекти наставе математике II*, Факултет педагошких наука, Јагодина, 435–447.

SCIENCES AND MATHEMATICS TEACHING IN THE SYSTEM OF CROSS-CURRICULAR CONNECTION – TEACHERS' ATTITUDES

Summary: When searching for new methods and tools for improving traditional teaching and modernization of teaching process, theorists and practitioners devote special place to the cross-curricular connections between teaching contents. Considering the content from different aspects within a single subject, researchers point out as the process which contributes to the acquisition of more permanent and practically applicable knowledge. The particularity of the subject World around us / Nature and society is reflected in its interdisciplinary approach that provides a great number of opportunities for innovating teaching process and for cross-curricular connections.

In this paper we will consider some possibilities of linking the contents of the World around us/Nature and society and Mathematics, and display the results obtained by polling teachers. The aim of the study, which involved 90 pollees, was to consider their attitudes on possibilities and efficiency of cross-curricular connection between teaching World around us / Nature and society and Mathematics. Descriptive and analytical methods were used in the study, and the obtained data was processed quantitatively and qualitatively.

Key words: Teaching the World around us / Nature and society, teaching Mathematics, cross-curricular connection, classroom teaching, teacher attitudes.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

371.3::51(082)

МЕЂУНАРОДНИ научни скуп Методички аспекти наставе математике (3 ; 2014 ;
Јагодина)

Методички аспекти наставе математике 3 : [зборник радова са трећег
међународног научног скупа одржаног 14-15. јуна 2014. године на Факултету
педагошких наука Универзитета у Крагујевцу] / [главни уредник Александра
Михајловић]. - Јагодина : Факултет педагошких наука, 2015 (Ниш :
NAIS-Print). - 351 стр. : илустр. ; 24 cm. - (Посебна издања. Научни
скупови / [Педагошки факултет, Јагодина] ; књ. 19)

Радови на срп. и енгл. језику. - Текст ћир. и лат. - Тираж 300. - Стр. 7-8:
Уводна реч / Александра Михајловић. - Библиографија уз сваки рад. -
Напомене и библиографске референце уз текст. - Summaries.

ISBN 978-86-7604-141-1

а) Математика - Настава - Методика - Зборници
COBISS.SR-ID 219965708