Јасмина Милинковић
Универзитет у Београду, Учитељски факултет

КОМПЕТЕНЦИЈЕ УЧИТЕЉА ЗА КОРИШЋЕЊЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Увод

На који начин учитељи визуелно представљају апстрактне математичке појмове и правила? Познавање различитих репрезентација јесте елемент базичних знања наставника и ученика (Arcavi, 2003, Janvier, 1987, Sfard, 2003). Аркави објашњава функције визуелних репрезентација 1) као подршку и илустрацију симболичких репрезентација, 2) као средство за решавање конфликта између интуитивних и формалних решења и 3) као средство за продубљено разумевање појмова. Визуелне репрезентације могу бити посматране као врста „когнитивних оруђа".

Визуелне репрезентације појмова, поступака, проблема доносе нове изазове за наставнике јер подразумевају развијање способности превођења. Када наставник зна како да трансформише знање у форму разумљиву за ученике, то знање постаје елемент методичког знања (Livingston & Borko, 1990). Због тога је разумевање и коришћење репрезентације једна од кључних тема у методици наставе математике. Голдин и Штеинголд (Goldin & Shteingold, 2001: 9) објашњавају да:

„Ефикасно математичко мишљење укључује разумевање односа међу различитим репрезентацијама истог појма, као и структурних сличности и разлика између репрезентационих система."

Разликујемо неколико нивоа методичких компетенција везаних за репрезентације: (1) познавање различитих репрезентација појмова и процедура, (2) функционално знање коришћења различитих репрезентација у решавању проблема, (3) функционално коришћење различитих репрезентација у постављању проблема, (4) разумевање репрезентација као дидактичких средстава у настави. Компетенција учитеља да трансформише знање односи се директно на питање репрезентација, јер је везано за способност наставника да садржаје представља у различитим облицима.

Репрезентације се у настави користе за: препознавање елемената процеса, разумевање релација, откривање, груписање, реорганизовање информација, решавање проблема уз трансфер и памћење. Капут примећује да разумевање апстрактних математичких идеја подразумева препознавање њихових најбитнијих особина у различитим репрезентацијама (Каput, 1991).

Један од начина да се помогне ученицима да постану сигурни у коришћењу различитих репрезентација у решавању проблема јесте да их суочимо са различитим репрезентацијама у поставци проблема. Фридлендер и Табачи (Friedlander & Tabachy, 2001) тврде да управо постављање различитих проблемских ситуација уз варирарање репрезентација подстиче флексибилност у избору репрезентација при решавању проблема. Али, у пракси, наставници ретко разматрају различите репрезентације, а још ређе питање репрезентације истичу као значајно. Иако се сматра да су репрезентације значајне за разумевање у математици, истраживања показују да наставници нису успешни у коришћењу сликовних репрезентација појмова (Ball et al, 1990). Ретко ће наставници применити репрезентацију у циљу појашњавања појма или приликом решавања проблема.

Методологија истраживања

Наше истраживање посвећено је проучавању коришћења репрезентација везаних за множење. Ранија истраживања утврдила су следеће врсте репрезентација множења: скуповна, једнаких група, вишеланчани модел, Декартов производ, бројевна права, модел правоугаоника (Skemp, 1971, Greer, 1992, Battista et al., 1986, Anghileri, 2000). Приметимо да акциона, Венов дијаграм, вишеструки ланци, бројевна права и бројевна слика визуелно указују на идеју груписања, односно да множење у млађим разредима посматрамо као поновљено сабирање. Друге 2D репрезентације, као што су вишеструки ланци, поље правоугаоних поља, правоугаона површ, област у Декартовом координатном систему визуелно указују на својства операције множења, као што је нпр. комутативност. Методичари сматрају да је вишеланчани модел посебно погодан за анализирање особина операције множења (Skemp, Anghileri, Barmby). Раније је указано да студенти препознају репрезентације засноване на груписању као визуелно прихватљивији модел за увођење појма множења као поновљеног сабирања (Barmby & Milinkovic, 2011). Утврђено је да студенти не бирају 2D репрезентације за упознавање својстава множења, а вишеланчани модел и правоугаоне површи за представљање променљивих (Barmby and Milinkovic, 2011).

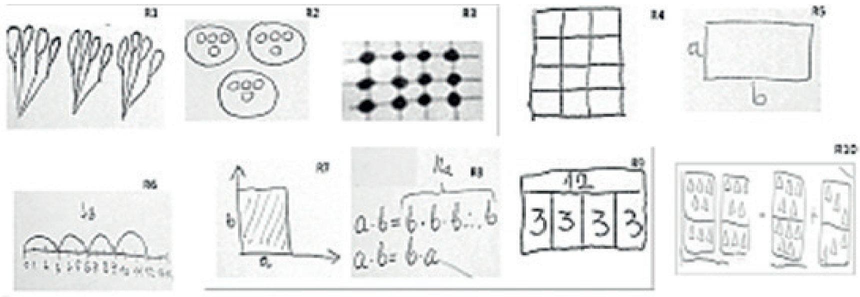
У испитивању је учествовао 81 учитељ, случајно изабрани учесник Сабора учитеља.

Техником упитника су испитиване следеће компетенције студената: 1) препознавање репрезентација множења и својства замене места чинилаца;

2) коришћење различитих репрезентација у постављању проблема. У упитнику се тражило да се (Q1) нацрта репрезентација производа “3·4”; (Q2) нацрта репрезентација производа “a·b”; (Q3) нацрта репрезентација за “3·4=4·3”; да се (Q4) нацрта репрезентација производа “a·b=b·a” и да се визуелно представи запис „(5+3)·2 = 5·2 + 3·2“.

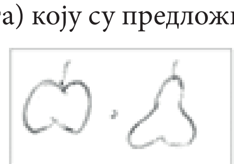
Резултати

Одговори испитаника су диференцирани у десет категорија формираних на основу прелиминарног прегледања, од R1 до R10. Егземпларни одговори који припадају овим категоријама су приказани на Слици 2.



Слика 2. Репрезентације множења R1–R10

Идентификоване су следеће категорије репрезентације множења: Р1 – акциона, Р2 – Венов дијаграм, Р3 – вишеструки ланци, Р4 – поље правоугаоних поља, Р5 – правоугаона површ, Р6 – бројевна права, Р7 – област у Декартовом систему, Р8 –симболичка репрезентација (формула), Р9 – бројевна слика, Р10 – домино репрезентација. Неке од наведених визуелних репрезентација уобичајене су у уџбеницима (акциона, Венов дијаграм, бројевна права). Неке друге, као што су правоугаона површ и бројевна слика су посебно истакнуте у оквиру методике. На пример, „правоугаона површ“ се често користи код геометријских метода решавања аритметичких задатака. На Слици 3 приказана је и неприхватљива репрезентација (са математичког становишта) коју су предложили неки учитељи.



Слика 3. Неприхватљива репрезентација за „a·b“.

Резултати испитивања су приказани табеларно (Табела 1). Уочљиво је да је код учитеља највише заступљена репрезентација Р3 – „вишеструких ланаца".

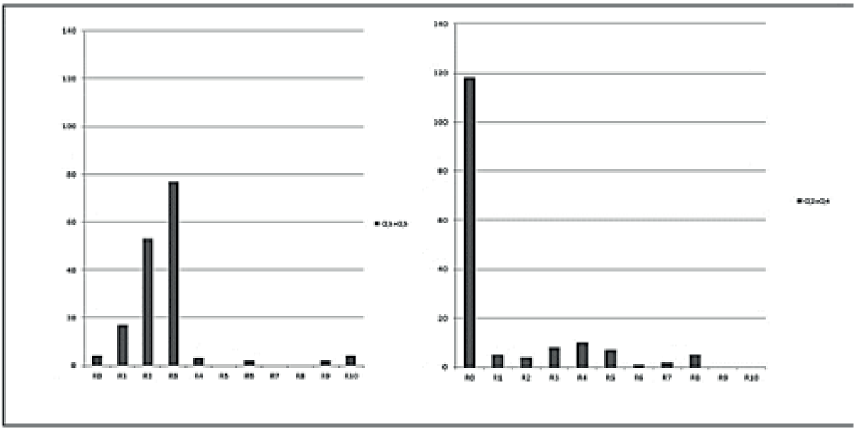
Табела1.
Избор репрезентације према питању

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
R0	1	60	3	58	10
R1	9	3	8	2	9
R2	39	2	14	2	20
R3	29	3	48	2	28
R4	0	5	3	5	1
R5	0	3	0	5	0
R6	2	2	0	4	2
R7	0	1	0	1	0
R8	0	2	0	3	1
R9	1	0	1	0	0
R10	0	0	4	0	10

Међутим, учитељи релативно често бирају и Р1 „скуповну" репрезентацију која је изабрана у 19% одговора. Уочљиво је да учитељи у значајној мери одбијају могућност визуелног представљања симболички датих правила.

Прегруписавањем података уочили смо да учитељи препознају различите степене апстрактности у питањима. Груписањем задатака по апстрактности добијена је слика која указује на тенденције у изборима (Слика 4). Показало се да учитељи исте начине представљања бирају за питања постављена на истом нивоу апстрактности. Питања Q1 и Q3 се односе на одређене бројеве, па, без обзира на чињеницу да се једно од питања односи на појам множења, а други на правило комутативности изражено на конкретном примеру бројева, учитељи их третирају на сличан начин.

Испитаници су сматрали да су тада најпогодније представе помоћу: вишеструких ланаца, Веновог дијаграма и тзв. „акционих" слика (односно слика из реалног окружења).



Слика 4. Збирна заступљеност репрезентација за питања Q1 и Q3, односно Q2 и Q4.

У питањима Q2 и Q4 се појављујују слова као ознаке за променљиве, те их учитељи представљају користећи исту репрезентацију. Према резултатима, већина учитеља одлучила се да за таква питања не изабере ниједну „визуелну“ репрезентацију.

Дискусија и закључци

Бројност репрезентација које су продуковали учитељи указује на могућност проналажења алтернативних видова представљања појмова у циљу постизања дубљег разумевања и флексибилности мишљења. Ипак, у већини случајева учитељи користе само две репрезентације: вишеструке ланце и Венов дијаграм, при том не уважавајући различитост појмова који се разматрају. У нашем узорку, резултати указују да је избор репрезентација повезан са нивоом апстрактности садржаја, а не са значењем појма.

Резултати осветљавају не само како учитељи визуелно сагледавају операцију множења, већ рефлектују и имплицитне ставове учитеља о ограниченој корисности визуелних репрезентација. Испитани учитељи не увиђају корисност визуелног представљања записа са променљивим. Будућа истраживања би могла даље испитати наше налазе.

Анализа резултата истраживања отвара питање релативно неразвијених компетенција учитеља у коришћењу репрезентација, чиме је ослабљена могућност учитеља да адекватним избором репрезентације помогне ученицима у учењу математике. Стога је неопходно размотрити начине развијања тих компетенција.

Кључне речи: учитељске компетенције, репрезентације, настава, математика, множење.

Литература

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: Continuum.

Arcavi, A. *(*2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational studies in mathematics,* 52, 215–241. Netherlands: Academic Press.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. D. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Barmby, P. & Milinkovic, J. (2011). Pre-service teachers' use of visual representations of multiplication, Ubuz, D. (Ed) *Developing Mathematical Thinking, The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, 105–112, Ankara, Turkey.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow. C. V. A. (1998). Students› spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 503–532

Дејић, М. и Егерић, М. (2006). Методика наставе математике. Београд: Учитељски факултет.

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. Grouws (Ed.),*Those who understand: knowledge growth in teaching of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting мultiple representations in Algebra. Cuoco,

Curcio, F. (Eds.), *The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook*, (pp. 173–186). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representatons and the development of mathematical concepts. In Cuoco, A & Curcio, F. (Eds), *The roles of representations in school mathematics*, 2001 Yearbook, (pp. 1–23). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.). *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53–74). Dordrecht: Kluwer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36.

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, England: Penguin Books

Jasmina Milinković
University of Belgrade, Teacher Education Faculty

TEACHERS` COMPETENCIES IN USING REPRESENTATIONS IN TEACHING

Introduction

In which way do teachers visually represent abstract mathematical concepts and rules? Competence in using different representations is an element of basic teachers` and students` knowledge (Arcavi, 2003, Janvier, 1987, Sfard, 2003). Arcavi explains the functions of visual representation 1) as a support and illustration of symbolic representation, 2) as a means of resolving the conflict between intuitive and formal solutions, and 3) as a tool for in-depth understanding of the concepts. Visual representations can be viewed as a kind of "cognitive tools".

Visual representations of concepts, procedures, problems bring new challenges for teachers because they encourage the development of the ability of translating. When a teacher knows how to transform knowledge into a form understandable for students, this knowledge becomes an element of didactic knowledge (Livingston & Borko, 1990). This is why understanding and using representations is one of the key issues in the didactics of mathematics. Goldin and Shteingold (Goldin, G. & Shteingold, 2001: 9) explain that:

> "Efficient mathematical thinking involves understanding the relationships between different representations of the same concept, as well as the structural similarities and differences between representational systems."

Several levels of methodological competencies related to representation can be distinguished: (1) knowledge of the different representations of concepts and procedures, (2) functional knowledge of using different representation in solving problems, (3) functional using different representation in posing problems, (4) understanding representations as didactic tools in teaching. Teachers` competence in transforming knowledge is directly related to the question of representation, because it is related to the ability of teachers to represent contents in various forms. The representations are used in teaching in order to: identify the elements of a process, understand relations, uncover, group and reorganize information, solve problems using transfer and memorize.

Kaput suggests that understanding abstract mathematical ideas requires identification of their most important features in a variety of representations (Kaput, 1991).

One way to help learners to become confident of using different representations to solve problems is to confront them with different representations of a problem. Friedlander & Tabachy (Tabachy & Friedlander, 2001) argue that confronting students with different problem situations through variations of representations encourage flexibility in using different representations for problem solving. But, in practice, teachers rarely use different representations, and even do not consider the question of representation as a significant one. Although it is considered that representations are important for understanding mathematics, research works show that teachers do not have enough competence in using pictorial representations of mathematical concepts (Ball et al, 1990). Using representations for the purpose of clarifying a concept or solving a problem is very rare in teaching.

Research Methodology

Our research deals with using representations in teaching multiplication. Previous research works identified the following types of representations of multiplication: set representation, equal groups representation, array model, Cartesian product, number line representation, rectangular model (Skemp, 1971, Greer, 1992 Battista et al., 1986, Anghileri, 2000). We can point out that action representations, Venn diagrams, multiple chains, number lines and numeral representations imply the idea of grouping, i. e. the idea that multiplication can be explained as repeated addition in lower grades of elementary school. Other 2D representations, such as multiple chains, a rectangular box, a rectangular surface, an area in the Cartesian coordinate system visually reflect the properties of multiplication, e. g. the commutative laws. Methodologists believe that the array model is particularly suitable for analyzing the properties of multiplication (Skemp, Anghileri & Barmby). Earlier research works showed that students identified representations based on grouping as a visually acceptable model for introducing the concept of multiplication as repeated addition (Barmby & Milinkovic, 2011). It was found that students do not choose 2D representations for learning the properties of multiplication, and do not choose array models and rectangular surfaces for representing variables (Barmby & Milinkovic, 2011).

The research involved 81 teachers, randomly selected participants of the Teachers seminar. A questionnaire was used to examine the following competencies of the participants in the research: 1) capability of identifying representations of multiplication and properties of changing the order of the factors; 2) capability of using different representations in setting up a problem. The questionnaire contained the following tasks: (Q1) make a pictorial representation for “3 · 4“; (Q2) make a pictorial representation for “a · b”; (Q3) make a pictorial representation for “3 = 4 · 4 · 3”; (Q4) make a pictorial representation for “a · b = b · a” and visually represent “(5 + 3) = 5 · 2 · 3 · 2 + 2”.

Research Results

The responses were grouped in ten categories formed on the basis of a preliminary examination, from R1 to R10. Some exemplary responses that belong to these categories are presented in Figure 2.

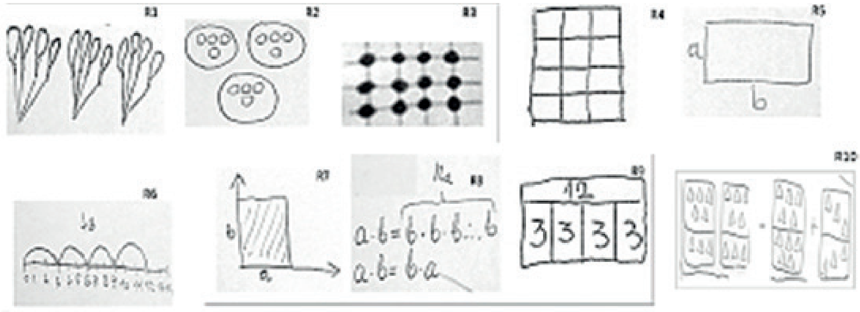


Figure 2. Representations of multiplication R1–R10.

The following categories of representation of multiplication are identified: R1 – action representation, R2 – Venn diagram, R3 – multiple chains, R4 – rectangular box, R5 – rectangular surface, R6 – number line, R7 – Cartesian coordinate system, R8 – symbolic representation (formula), R9 – number picture, R10 – domino representation. Some of these visual representations are common in textbooks (action representation, Venn diagram, number line). Some others, such as rectangular surface and number picture are taught to students within the course of Didactics of teaching mathematics. For example, a rectangular surface is often used in solving arithmetic problems by using geometric methods. The Figure 3 shows an unacceptable representation (from a mathematical point of view) as proposed by some teachers.

Figure 3. Unacceptable representation for “a · b “

The research results are shown in the Table 1. It is evident that teachers most often use representation R3 – “multiple chains”.

Table 1.
Choice of representations by questions.

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
R0	1	60	3	58	10
R1	9	3	8	2	9
R2	39	2	14	2	20
R3	29	3	48	2	28
R4	0	5	3	5	1
R5	0	3	0	5	0
R6	2	2	0	4	2
R7	0	1	0	1	0
R8	0	2	0	3	1
R9	1	0	1	0	0
R10	0	0	4	0	10

However, teachers relatively often choose R1, a “set” representation, which was chosen by 19% of participants. It is evident that teachers rejected the possibility of a significant degree of visual representation symbolic applicable rules.

Rearranging the data, we have noticed that teachers identify the different levels of abstraction in the questions. Grouping tasks by the level of abstractness, different ways of making choice were identified (Figure 4). It turned out that teachers choose the same to ways to represent the tasks which are at the same level of abstraction. The questions Q1 and Q3 are related to specific numbers, and, despite the fact that one of the issues relates to the very concept of multiplication, and the other to the commutative law represented by specific numbers, the teachers treat them similarly. The examinees considered the following representations to be the most appropriate: multiple chains, Venn diagrams and so-called “action” models (or images from the real world).

In questions Q2 and Q4 letters appear as symbols for variables, and teachers represent them using the same kind of representation. According to the results, most teachers decided to choose none of the “visual” representations in doing these tasks.

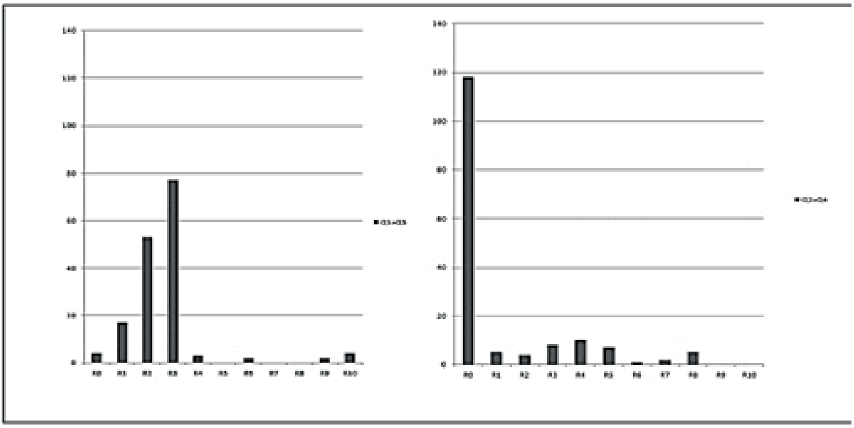


Figure 4. Cumulative choice of representations for questions Q1 and Q3, Q2 and Q4.

Discussion and Conclusions

Number of representations produced by teachers indicate the possibility of finding alternative forms of representations of concepts in order to achieve a deeper understanding and flexibility of thinking. However, in most cases, teachers use only two representations: the array (multiple chains) representations and Venn diagram, not taking into account the diversity of concepts in question. The results of our research suggest that the choice of representation is related to the level of abstraction of a content, and not to the meaning of a term.

The results shed light on not only how teachers visually perceive the operation of multiplication, but also reflect the implicit attitudes of teachers about limited usefulness of visual representations. The teachers who participated in the research do not understand the usefulness of visual representations of a notation with variables. A further research is needed to analyze these findings in details.

The analysis of the research results raises the question of relatively underdeveloped teachers` competencies in using representations, which weakens their capability to help students learn mathematics. It is therefore necessary to consider ways of developing these competencies.

References

Anghileri, J. (2000). Teaching number sense. London: Continuum.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics, Educational studies in mathematics, 52, 215–241. Netherlands: Academic Press.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. D. (2008). Content knowledge for teaching:

What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389–407.

Barmby, P. & Milinkovic, J. (2011). Pre-service teachers' use of visual representations of multiplication, Ubuz, D. (Ed) Developing Mathematical Thinking, The 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, 105–112, Ankara, Turkey.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow. C. V. A. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 503–532.

Dejic, M. and Egeric, M. (2006). Metodika nastave matematike [Didactics of Teaching Mathematics]. Beograd: Uciteljski fakultet.

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992).Teachers' knowledge and its impact. In D. Grouws (Ed.), Those who understand: knowledge growth in teaching of research on mathematics teaching and learning (pp. 147–164). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in Algebra. In Cuoco, A & Curcio, F. (Eds.), The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook, (pp. 173–186). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In Cuoco, A & Curcio, F. (Eds), The roles of representations in school mathematics, 2001 Yearbook, (pp. 1–23). NCTM: Macmillan Publishing Company.

Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.). Radical constructivism in mathematics education (pp. 53–74). Dordrecht: Kluwer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.

Skemp, R. R. (1971). The psychology of learning mathematics. Harmondsworth, England: Penguin Books.